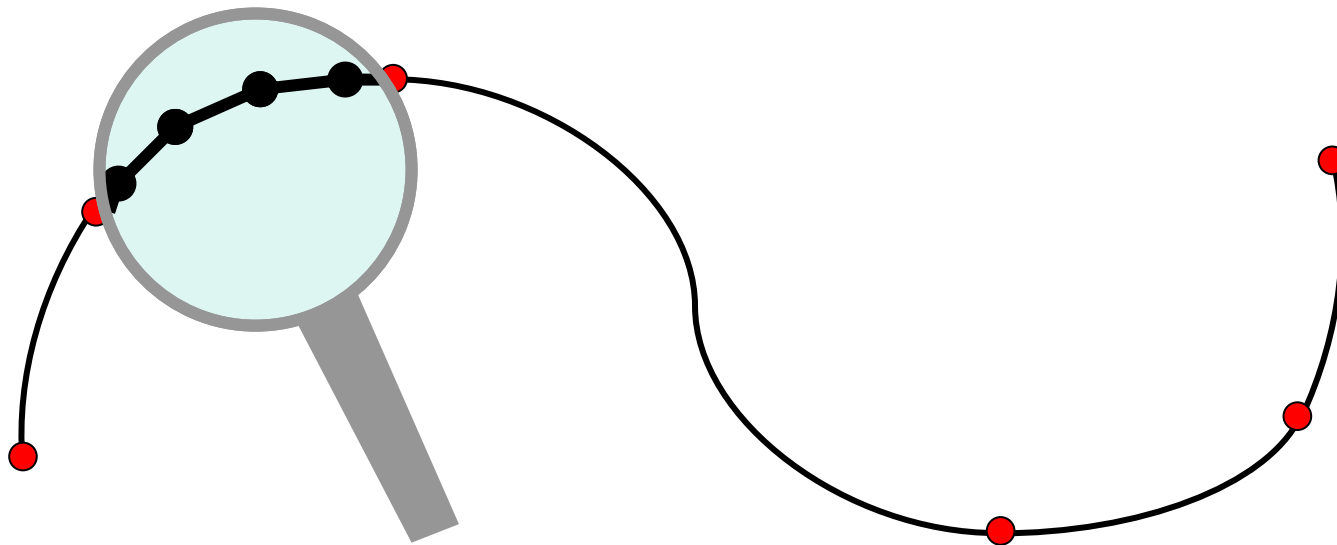


Computergrafik SS 2008

Oliver Vornberger

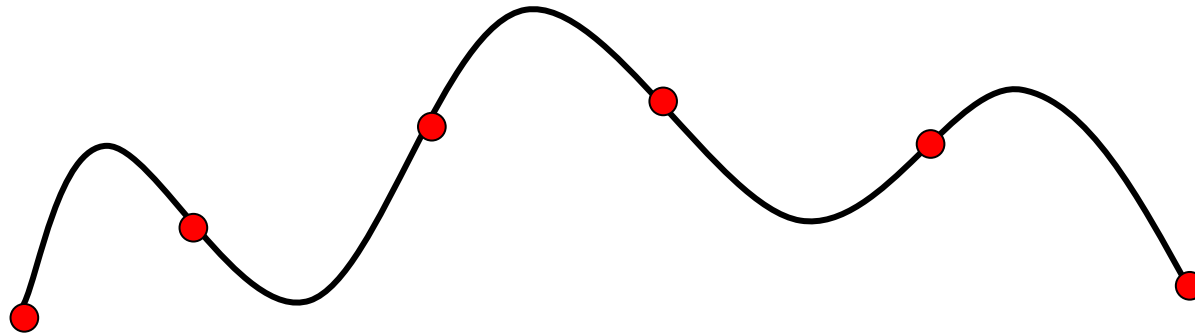
Kapitel 7:
2D-Kurven

Spezifikation einer Kurve



Stützpunkte P_0, P_1, \dots, P_n

Algebraischer Ansatz



Bestimme $n+1$ Koeffizienten für Polynom n -ten Grades

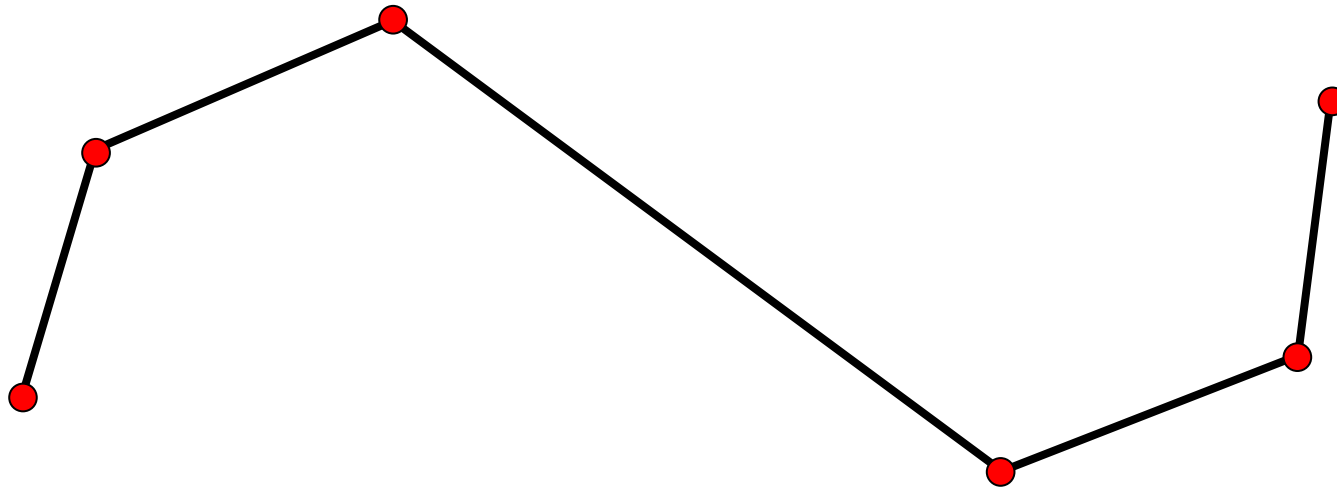
$$y = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0$$

Oszillation!

Rechenaufwand!

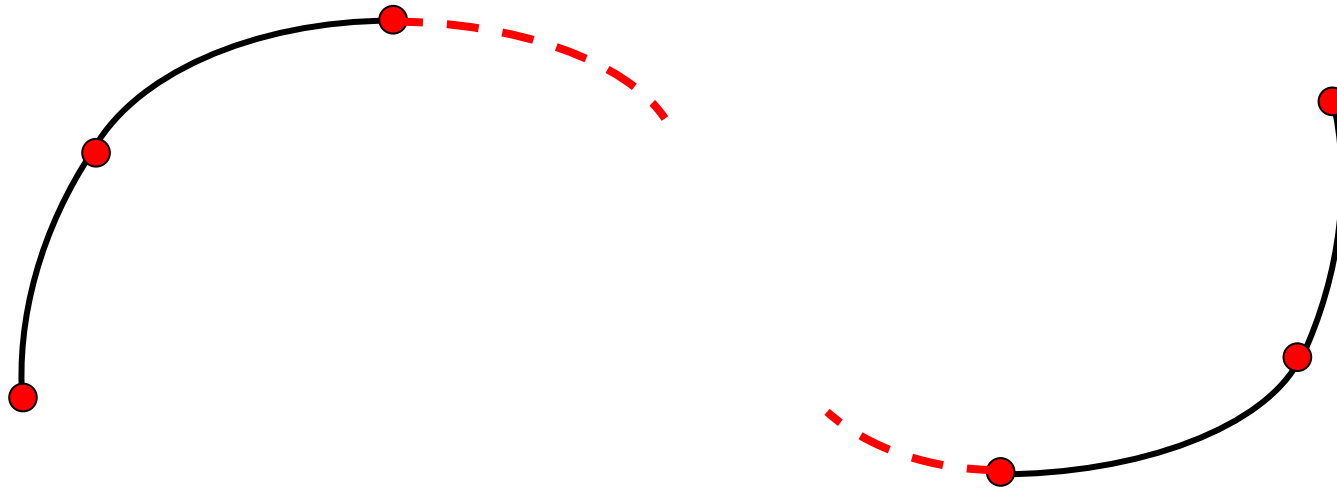
Rundungsfehler !

lineare Splines



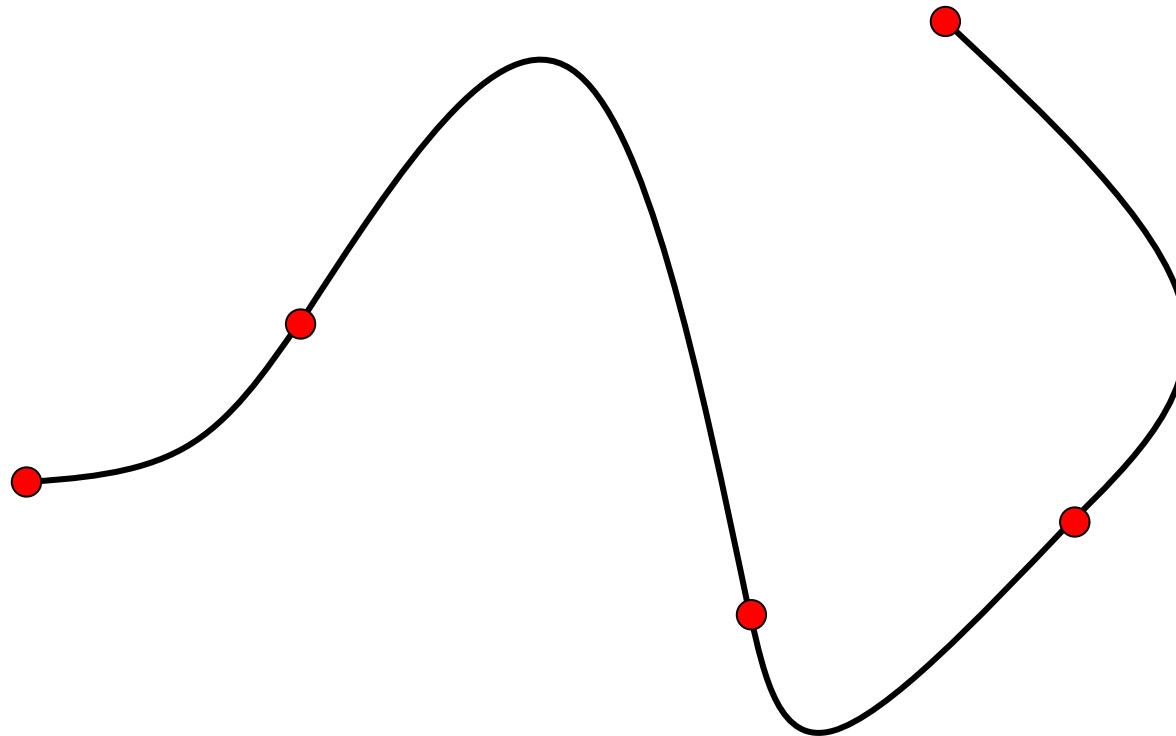
verbinde zwei aufeinanderfolgende Punkte
durch eine Gerade

quadratische Splines

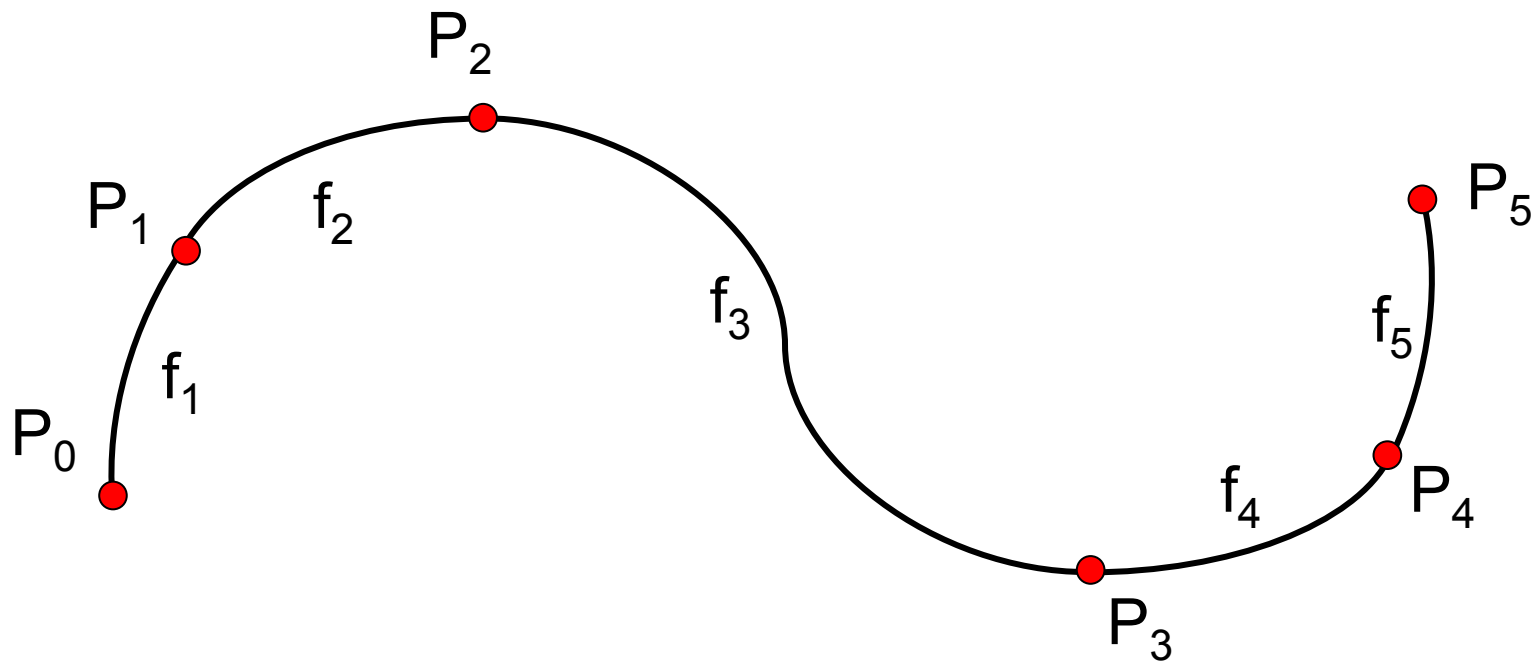


verbinde zwei aufeinanderfolgende Punkte
durch eine Kurve 2. Grades

quadratische Splines

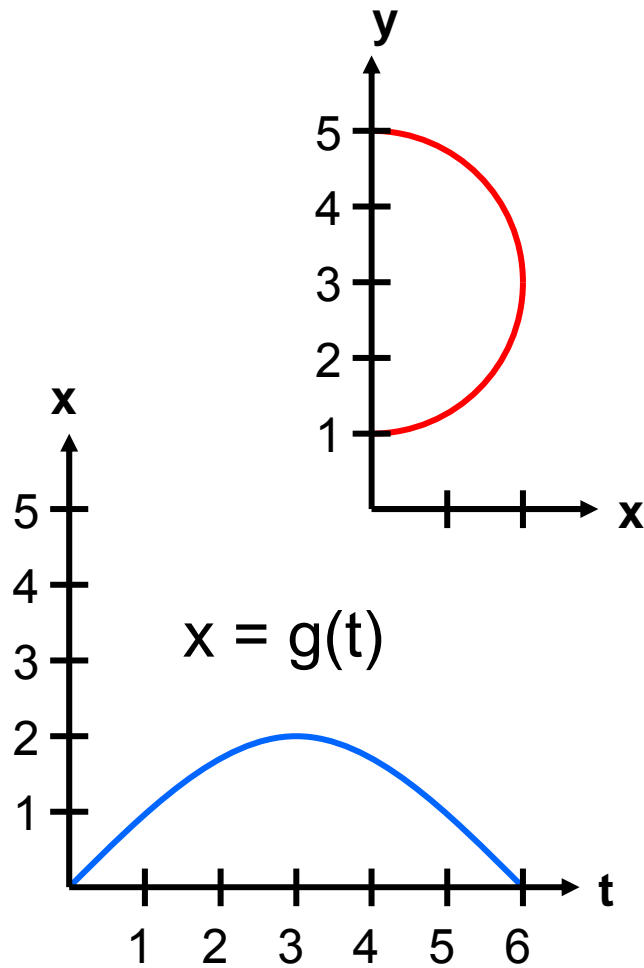


kubische Splines

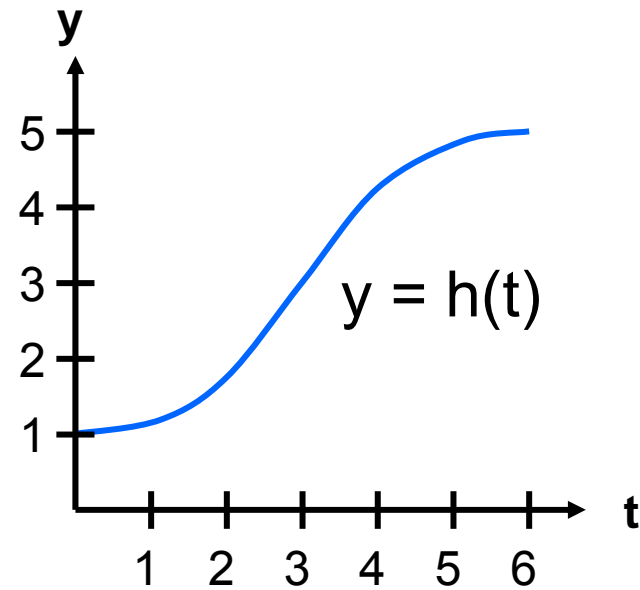


Verbinde zwei aufeinanderfolgende Punkte
durch eine Kurve 3. Grades

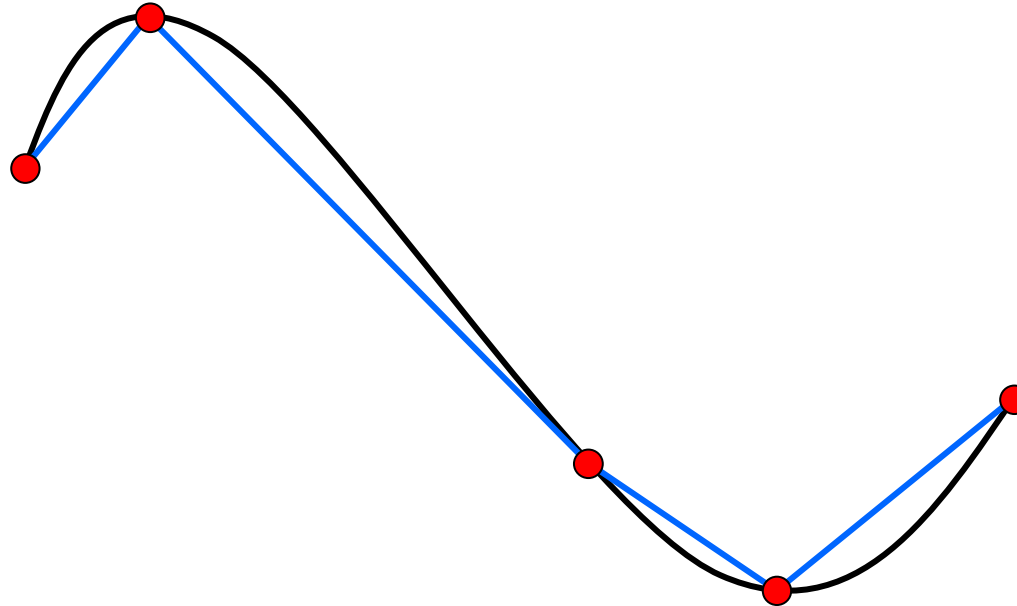
Parametrisierte Kurvengleichung



$$f(t) = [g(t), h(t)]$$



Intervallgrenzen



$$\Delta_i = \sqrt{(x_i - x_{i+1})^2 + (y_i - y_{i+1})^2}$$



Kurvenabschnitte

Gesucht ist pro Intervall i , $i=1, \dots, n$

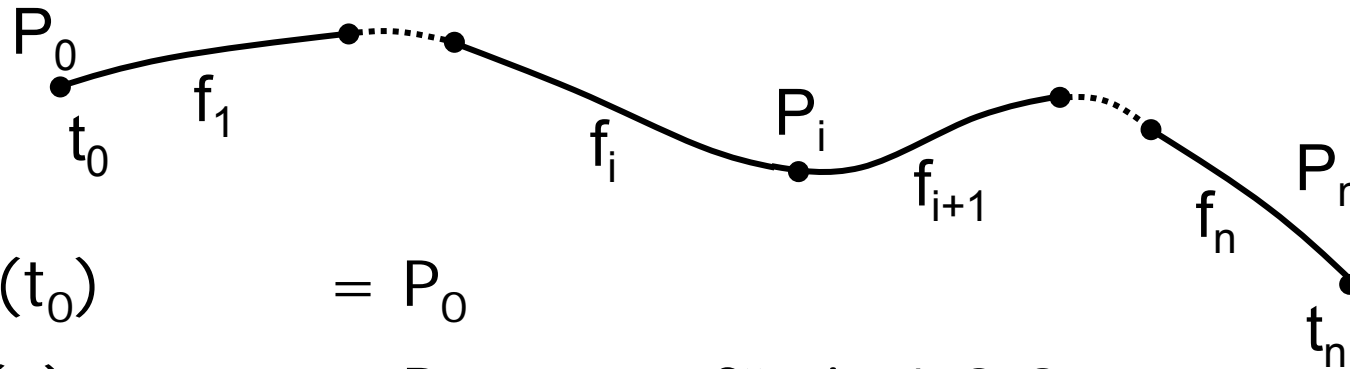
$$f_i(t) = a_i + b_i \cdot t + c_i \cdot t^2 + d_i \cdot t^3$$

genauer:

$$g_i(t) = a_i^g + b_i^g \cdot t + c_i^g \cdot t^2 + d_i^g \cdot t^3$$

$$h_i(t) = a_i^h + b_i^h \cdot t + c_i^h \cdot t^2 + d_i^h \cdot t^3$$

Gleichungssystem



$$f_1(t_0) = P_0$$

$$f_i(t_i) = P_i \quad \text{für } i=1,2,3,\dots,n$$

$$f_i(t_i) = f_{i+1}(t_i) \quad \text{für } i=1,2,3,\dots,n-1$$

$$f'_i(t_i) = f'_{i+1}(t_i) \quad \text{für } i=1,2,3,\dots,n-1$$

$$f''_i(t_i) = f''_{i+1}(t_i) \quad \text{für } i=1,2,3,\dots,n-1$$

$$f_1''(t_0) = 0$$

$$f_n''(t_n) = 0$$

2 • 4n Gleichungen mit

2 • 4n Unbekannten

Approximation

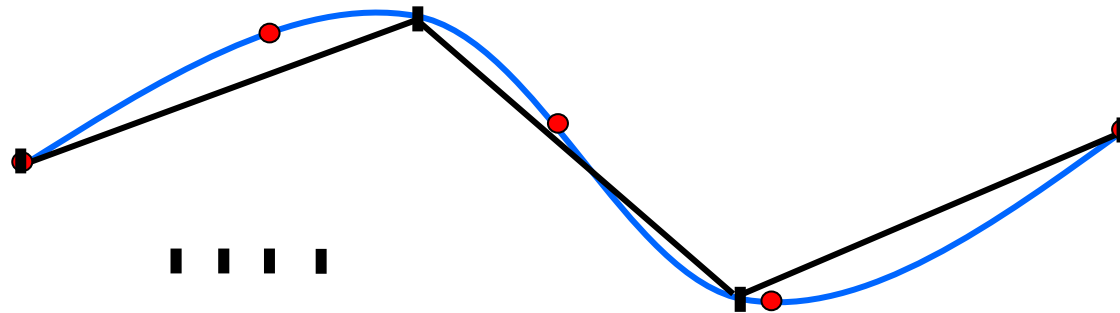
Gegeben $n+1$ Stützpunkte P_0, P_1, \dots, P_n

Berechne Kurvenabschnitte f_1, f_2, \dots, f_n

Bestimme Zahl der Interpolationspunkte k

Verteile längs der Kurvenabschnitte

Zeichne $k-1$ Geradenabschnitte



Java-Applet zu kubischen Splines

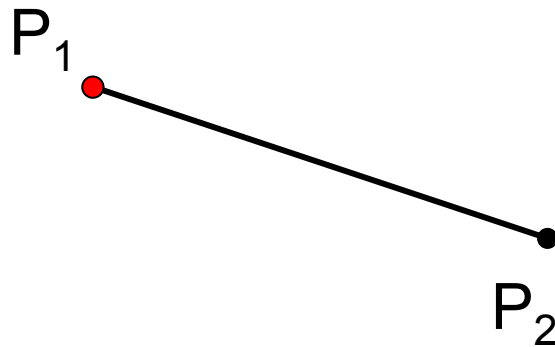
[~cg/2008/skript/Applets/Splines/App.html](#)

Bewertung von Splines

bei vielen Stützpunkten:

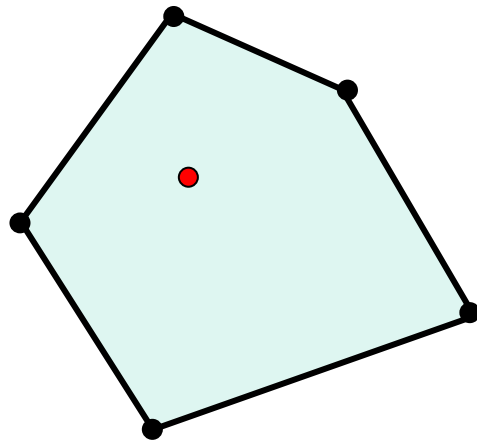
- hoher Rechenaufwand zur Lösung des Gleichungssystems
- Kein lokaler Einfluss möglich

Kontrollpunkte



$$P = (1 - t) \cdot P_1 + t \cdot P_2$$

1.0000

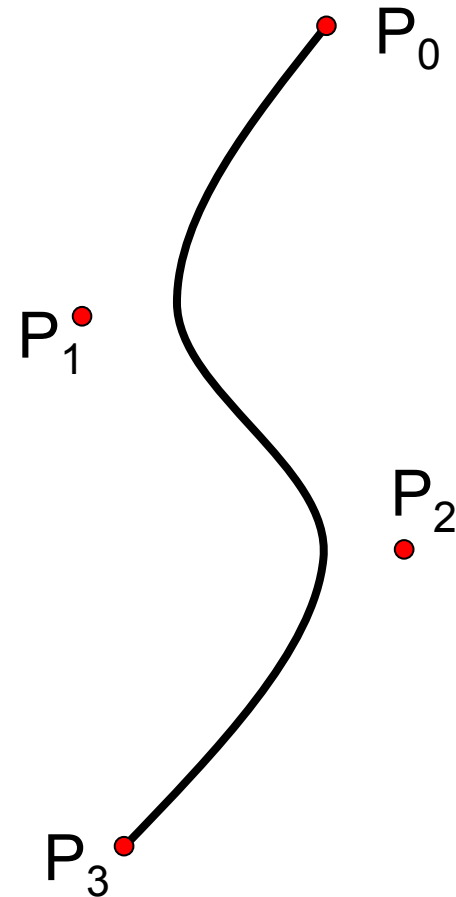


$$P = \sum_{i=0}^n m_i \cdot P_i$$

Bézier-Kurven

Pierre Bézier
1911-1999
Ingenieur bei Renault

Paul deCasteljau
1930 -
Ingenieur bei Citroen



Bernstein-Polynome

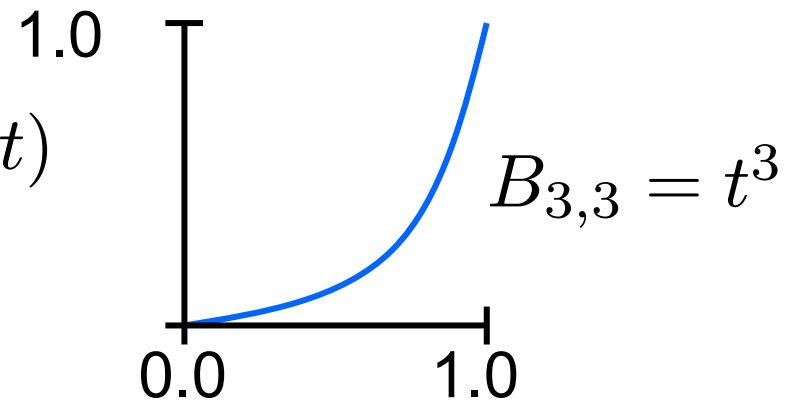
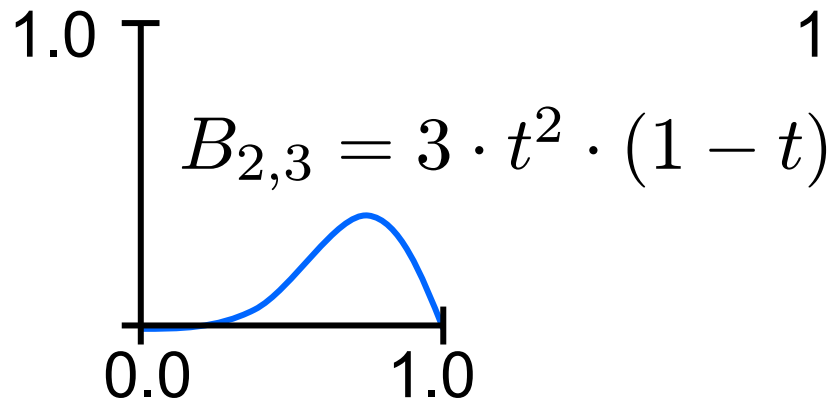
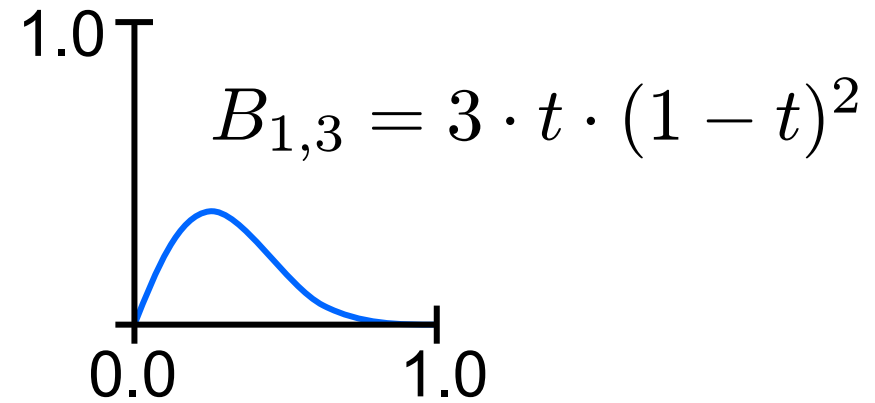
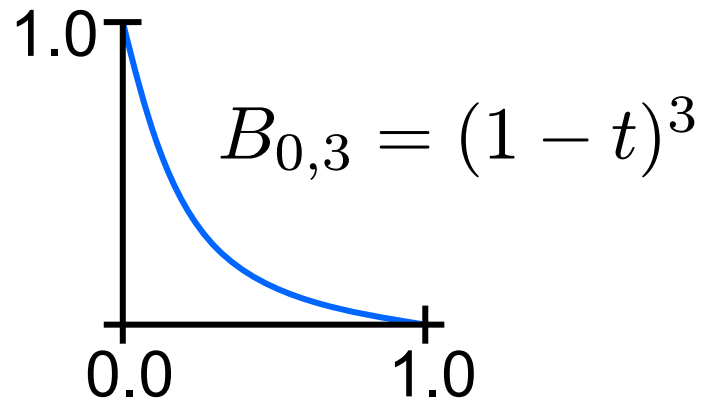
$n+1$ Kontrollpunkte

Jeder Kontrollpunkt P_i
wird gewichtet mit Bernstein-Polynom B_i

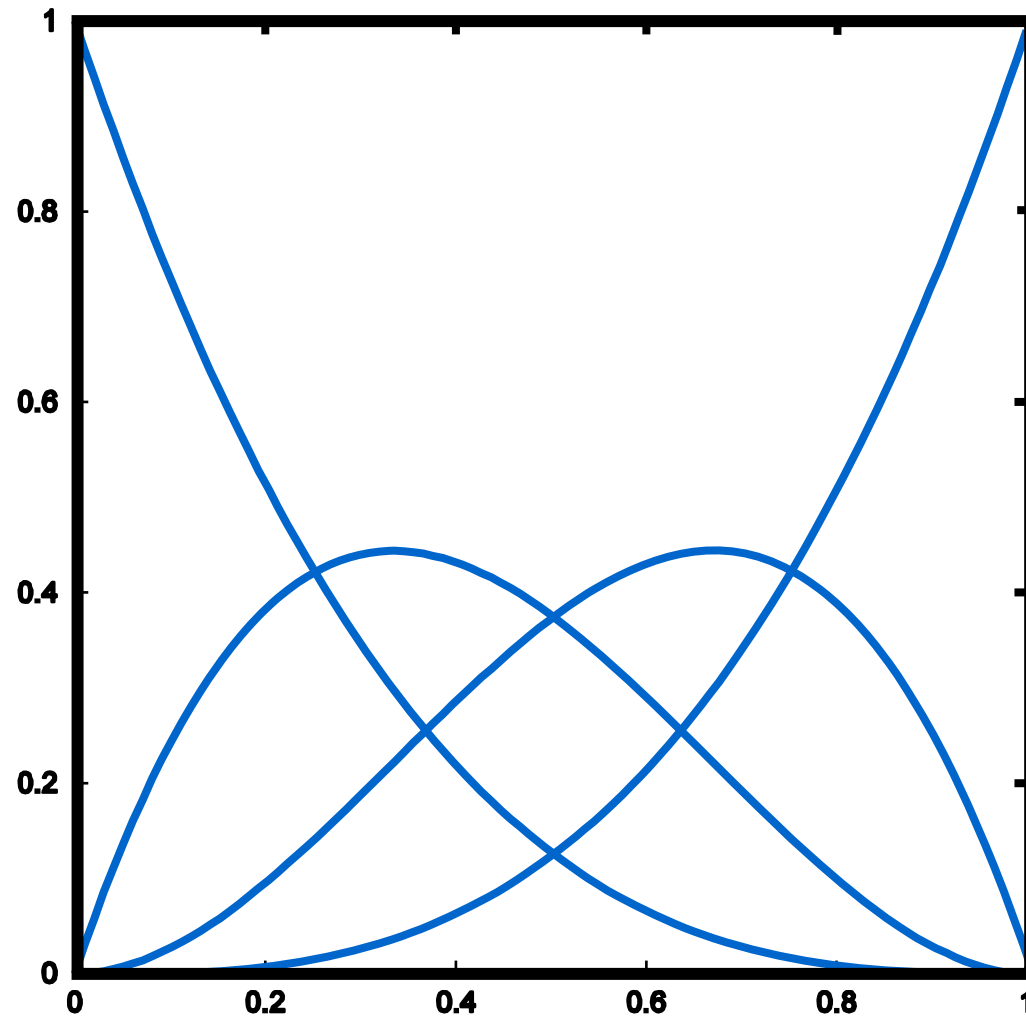
$$P(t) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) \cdot P_i, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$\begin{aligned} B_{i,n}(t) &= \binom{n}{i} \cdot t^i \cdot (1-t)^{n-i}, \quad i = 0, \dots, n \\ &= \frac{n!}{i! \cdot (n-i)!} \cdot t^i \cdot (1-t)^{n-i} \end{aligned}$$

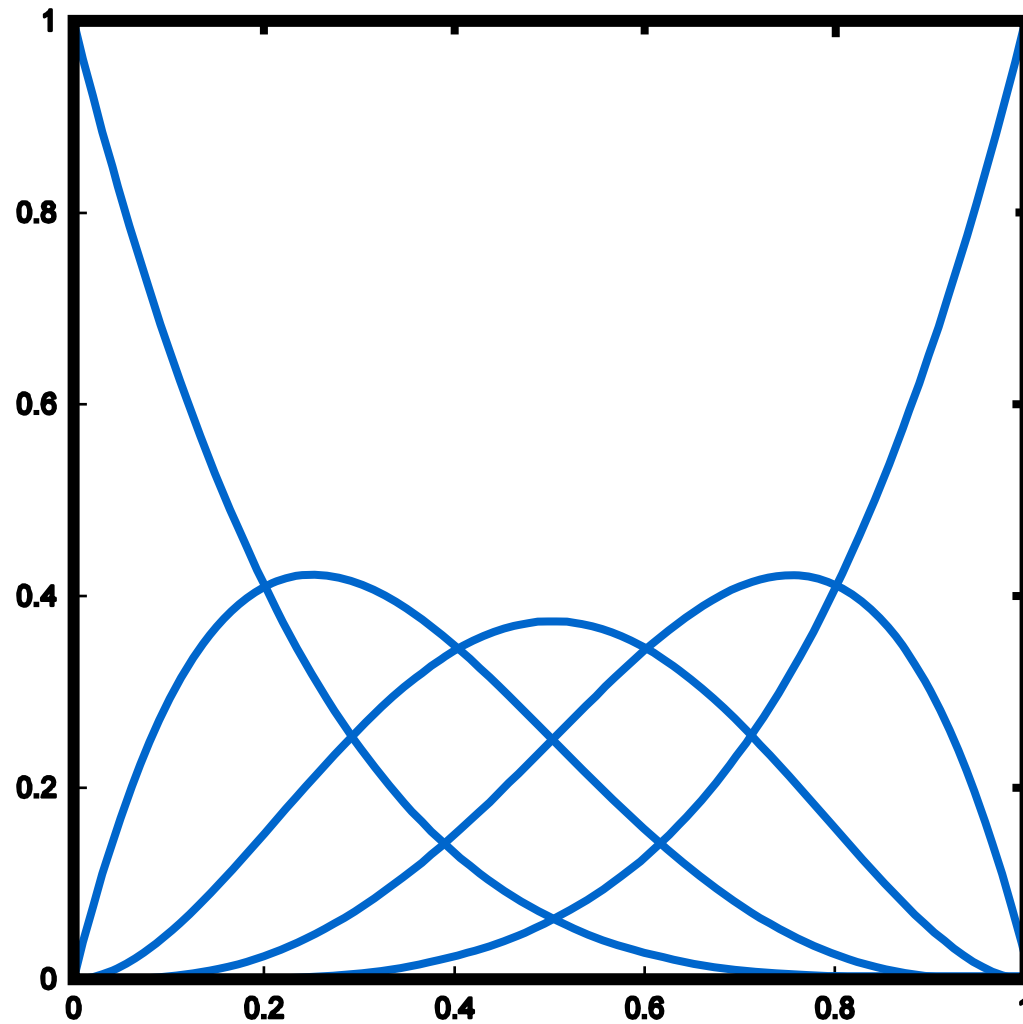
Bernstein-Polynome 3. Grades



Bernsteinpolynome 3. Grades



Bernsteinpolynome 4. Grades



Eigenschaften der Bernstein-Polynome

alle Bernsteinpolynome sind positiv auf $[0,1]$

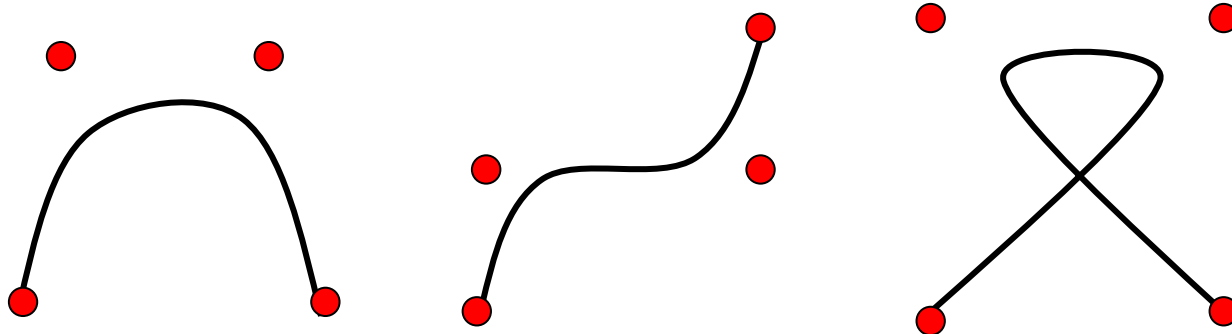
$$\sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) = 1 \quad \text{für jedes feste } t$$

$$B_{i,n}(t) = B_{n-i,n}(1-t)$$

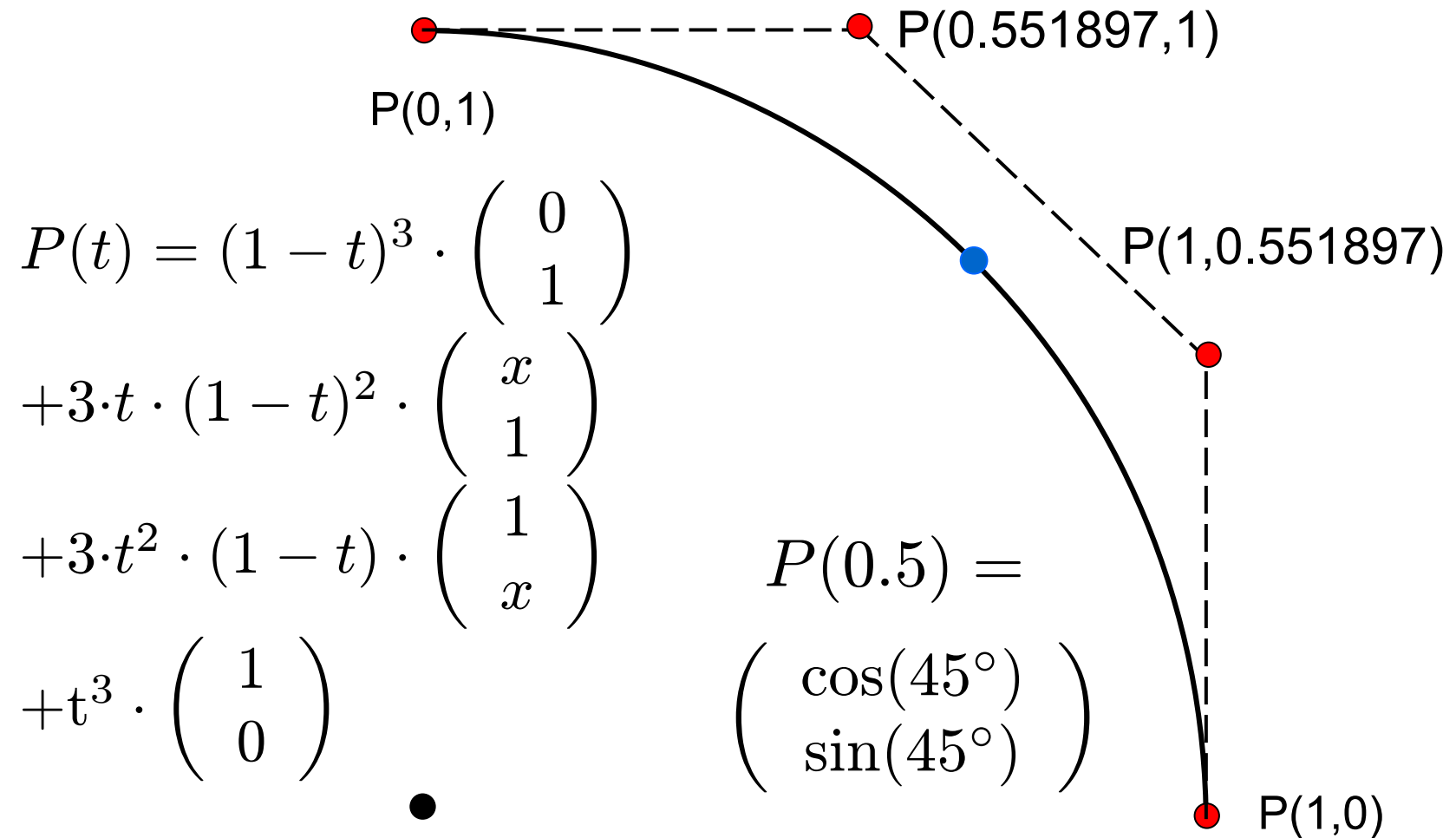
Maxima von $B_{i,n}(t)$ bei $t = \frac{i}{n}, i = 0, \dots, n$

$$\frac{dB_{i,n}(t)}{dt} = n \cdot (B_{i-1,n-1}(t) - B_{i,n-1}(t)), i > 0$$

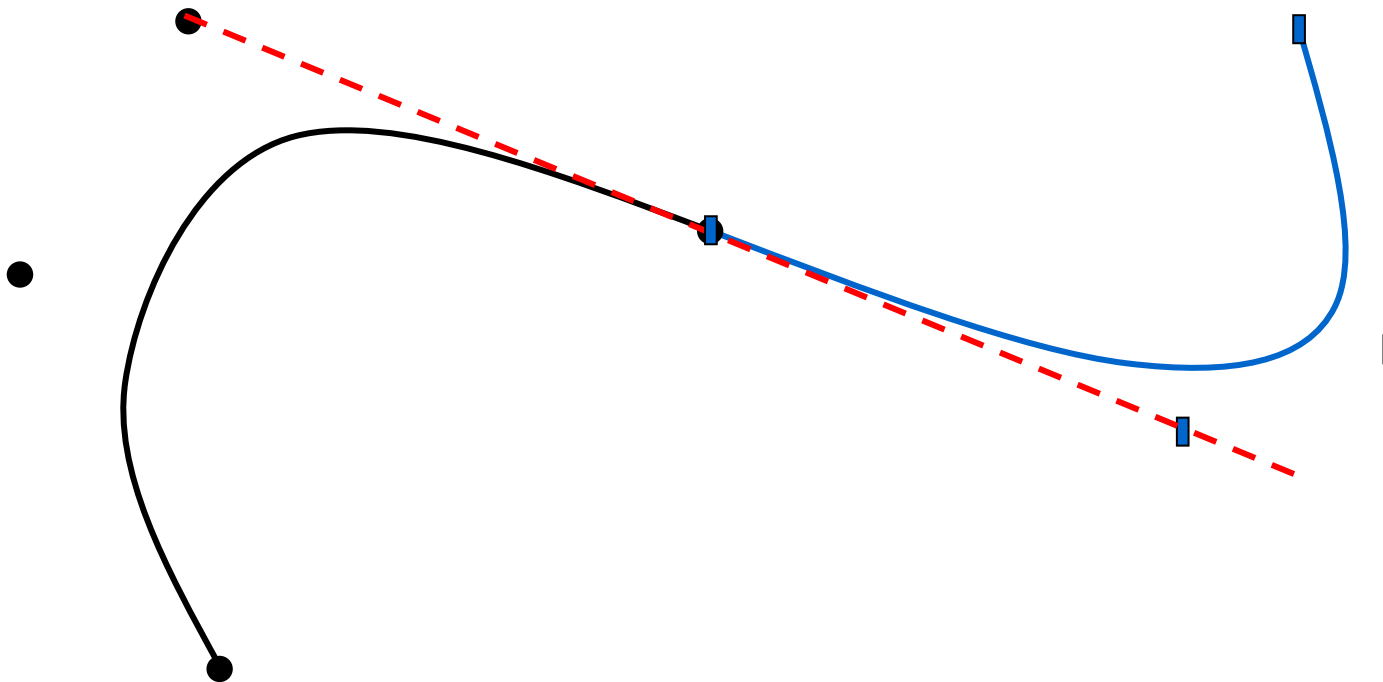
Beispiele für Bézierkurven



Approximation von Viertelkreis



Bézier-Kurven aneinandersetzen



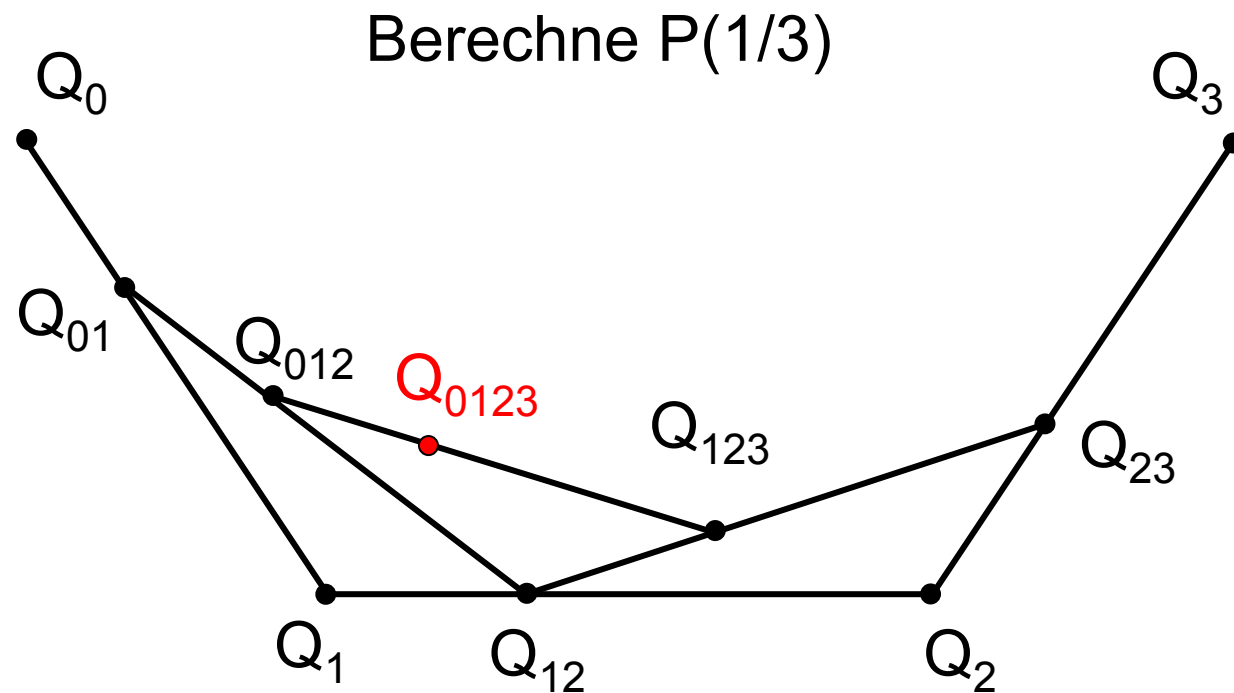
Bézier-Kurve nach de Casteljau

$$P_{0,n}(t) = (1 - t) \cdot P_{0,n-1}(t) + t \cdot P_{1,n}(t)$$

$$P_{0,3}\left(\frac{1}{3}\right)$$

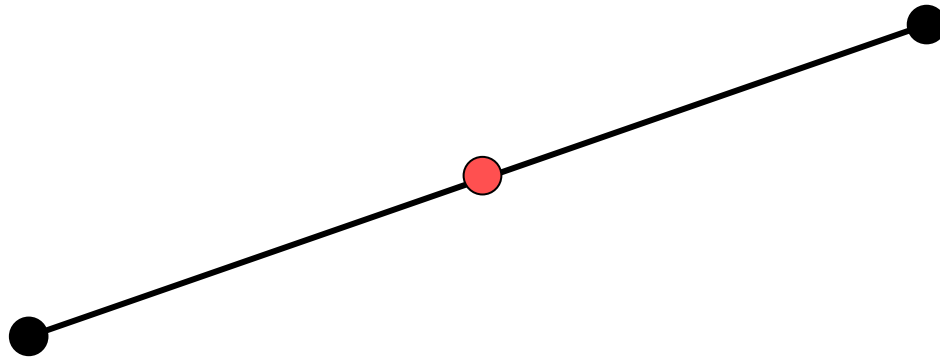
$$\underbrace{\frac{2}{3} \cdot P_{0,2}\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \cdot P_{1,3}\left(\frac{1}{3}\right)}_{\underbrace{\frac{2}{3} \cdot P_{0,1}\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \cdot P_{1,2}\left(\frac{1}{3}\right)} \quad \underbrace{\frac{2}{3} \cdot P_{1,2}\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \cdot P_{2,3}\left(\frac{1}{3}\right)}}$$

Berechnung nach de Casteljau



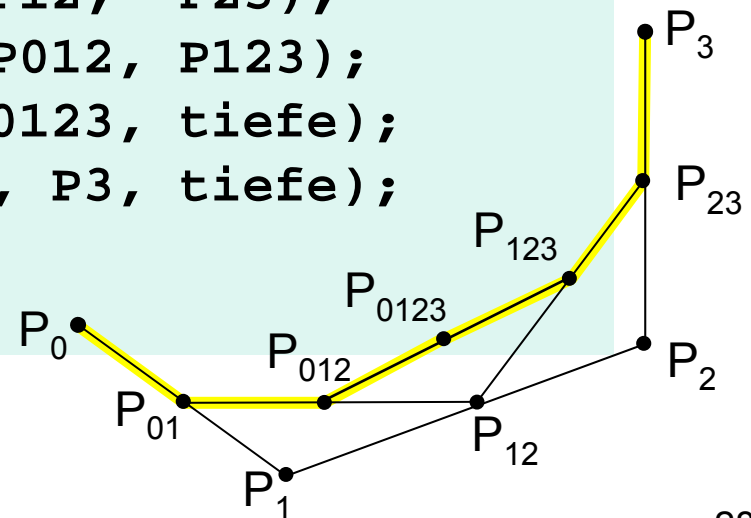
halbiere

```
Point halbiere(Point P1, Point P2){  
    Point P = new Point();  
    P.x = (P1.x + P2.x)/2;  
    P.y = (P1.y + P2.y)/2;  
    return P;  
}
```



Rekursion nach de Casteljau

```
void bezier(Point P0, Point P1,  
            Point P2, Point P3, int tiefe) {  
if (tiefe == 0) drawLine(P0, P3); else {  
    tiefe--;  
    Point P01 = halbiere(P0, P1);  
    Point P12 = halbiere(P1, P2);  
    Point P23 = halbiere(P2, P3);  
    Point P012 = halbiere(P01, P12);  
    Point P123 = halbiere(P12, P23);  
    Point P0123 = halbiere(P012, P123);  
    bezier(P0, P01, P012, P0123, tiefe);  
    bezier(P0123, P123, P23, P3, tiefe);  
}  
}
```



Java-Applet zu Bézier-Kurven

[~cg/2008/skript/Applets/Splines/App.html](#)

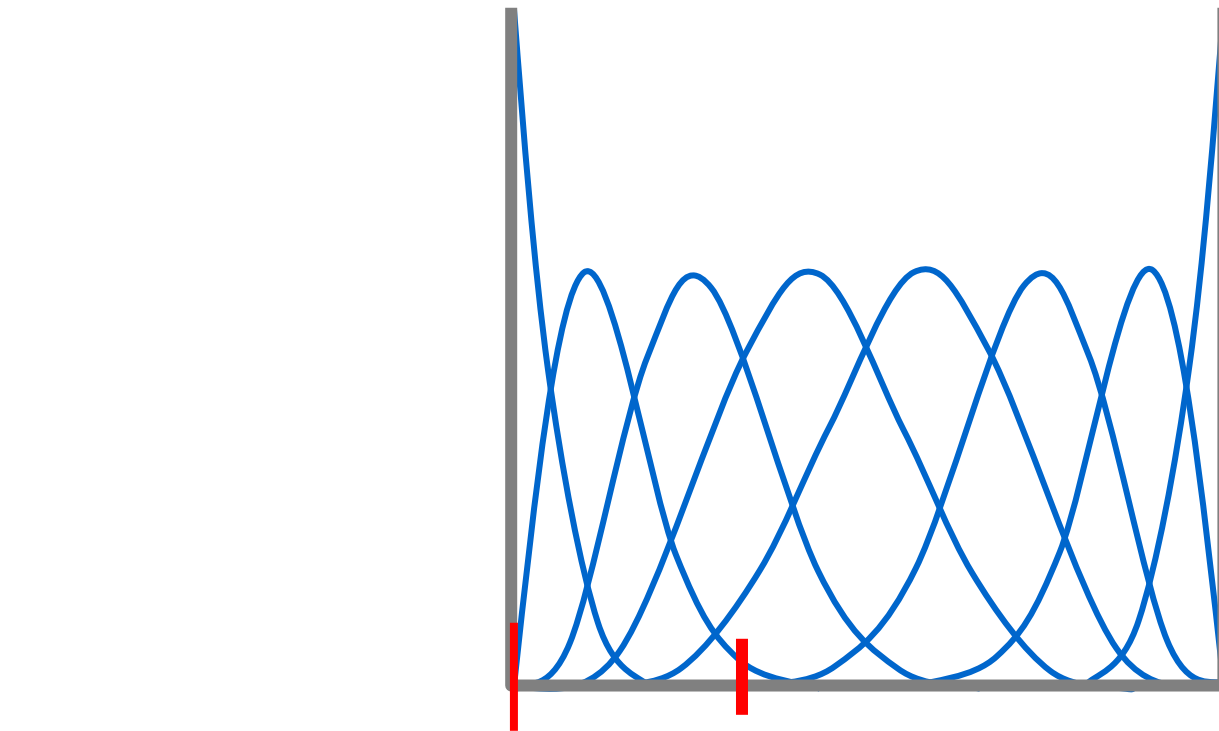
Bewertung von Bézier-Kurven

- Grad der Polynome
ist abhängig von Zahl der Kontrollpunkte
- Alle Kontrollpunkte
wirken auf die gesamte Kurve

Wunsch:

- fester Polynomgrad
- lokaler Einfluss

Wunsch: Lokaler Einfluss



z.B. Einfluss von maximal vier Kontrollpunkten

B-Splines

- wähle $n+1$ Kontrollpunkte P_0, P_1, \dots, P_n
- wähle k
- wähle Knotenvektor $t_0, t_1, t_2, \dots, t_{n+k}$
- konstruiere $n+1$ Gewichtsfunktionen
- Gewichtsfunktion wirkt auf max. k Abschnitte
- Gewichtsfunktion ist Polynom vom Grad $k-1$ (abschnittsweise)

Konstruktion von B-Splines

$$T = (t_0, t_1, \dots, t_{n+k}), t_j \leq t_{j+1}$$

$$N_{j,1}(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } t_j \leq t < t_{j+1} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad j = 0, \dots, n+k-1$$

$$N_{j,i}(t) = \frac{t-t_j}{t_{j+i-1}-t_j} \cdot N_{j,i-1}(t) + \frac{t_{j+i}-t}{t_{j+i}-t_{j+1}} \cdot N_{j+1,i-1}(t)$$

$$P(t) = \sum_{i=0}^n N_{i,k}(t) \cdot P_i$$

Beispiel für Knotenvektor

$$t_j = \begin{cases} 0 & \text{falls } j < k \\ j - k + 1 & \text{falls } k \leq j \leq n \\ n - k + 2 & \text{falls } j > n \end{cases}$$
$$j \in \{0, \dots, n + k\} \quad t \in [0, n - k + 2]$$

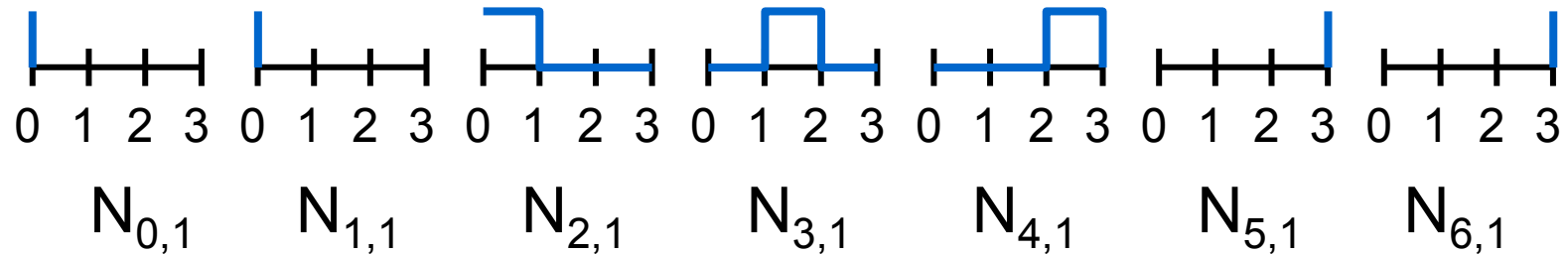
Beispiel: $n = 4, k = 3$

Knotenvektor: $T = (0, 0, 0, 1, 2, 3, 3, 3)$

Beispiel: $n = 8, k = 4$

Knotenvektor: $T = (0, 0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 6, 6, 6)$

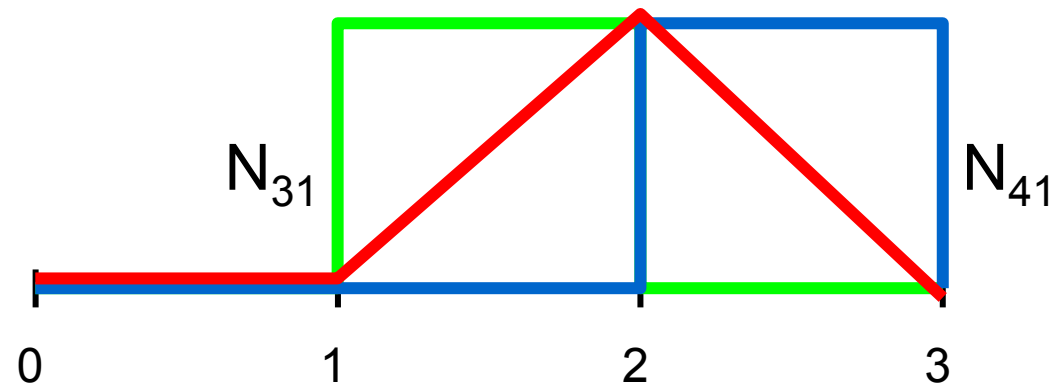
Konstruktion von $N_{i,1}$ für $n=4, k=3$



$n+k$ Ausgangsfunktionen

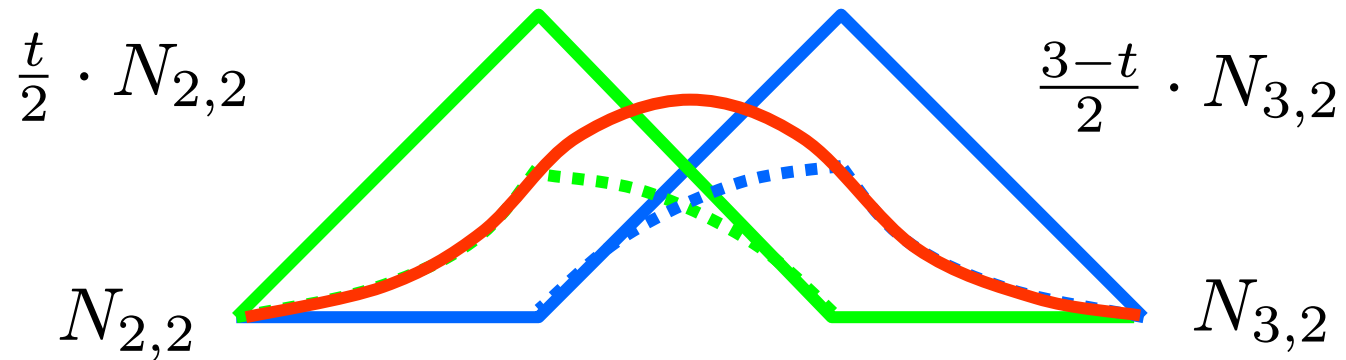
Konstruktion von $N_{3,2}$

$$N_{32} = (t-1) \cdot N_{3,1} + (3-t) \cdot N_{4,1}$$



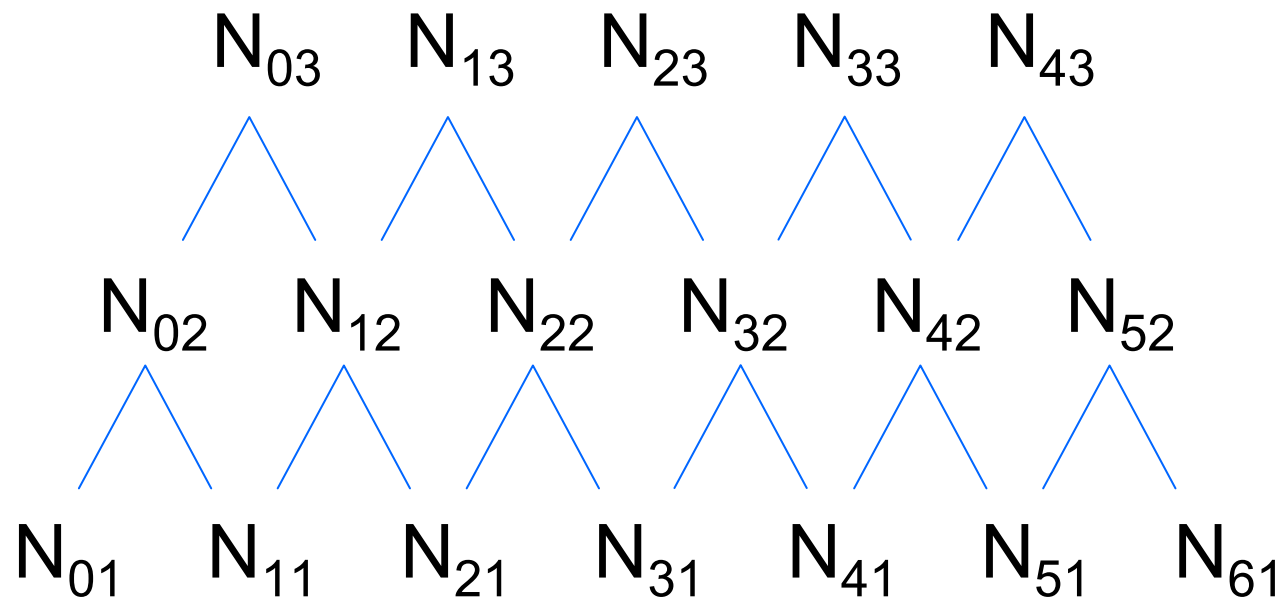
Konstruktion von $N_{2,3}$

$$N_{2,3} = \frac{t}{2} \cdot N_{2,2} + \frac{3-t}{2} \cdot N_{3,2}$$



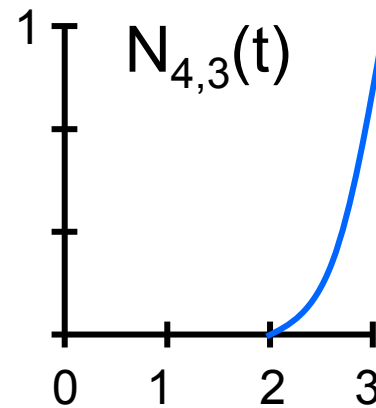
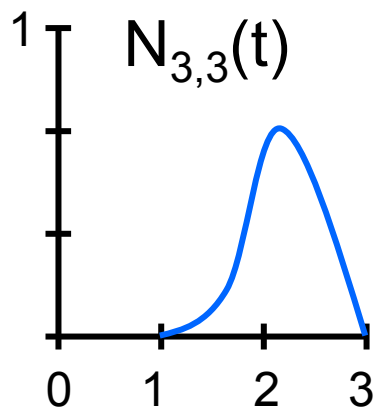
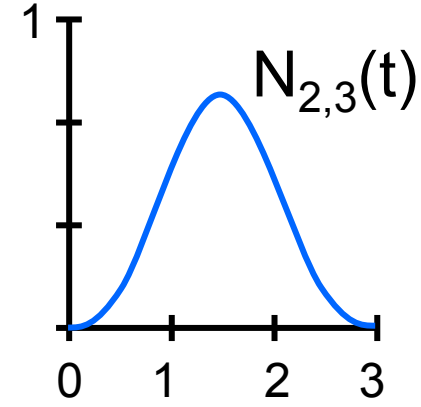
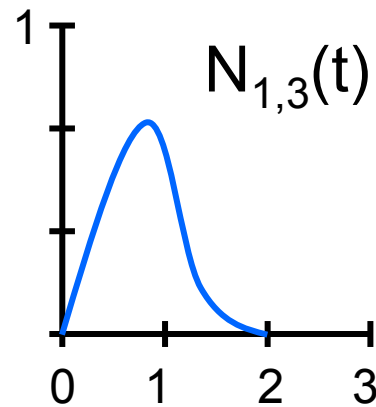
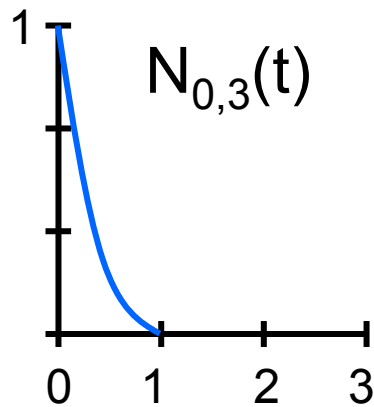
Konstruktion von $N_{i,k}$

$n+1$ Gewichtsfunktionen



$n+k$ Ausgangsfunktionen

Gewichtspolynome für $n=4, k=3$



$$P(t) = \sum_{i=0}^4 N_{i,3}(t) \cdot P_i$$

Sonderfall

$$k = n + 1$$

$$T = (\underbrace{0, \dots, 0}_{k \text{ mal}}, \underbrace{1, \dots, 1}_{k \text{ mal}}).$$

$$\begin{aligned} N_{i,k}(t) &= \frac{(k-1)!}{i! \cdot (k-1-i)!} \cdot t^i \cdot (1-t)^{k-1-i} \\ &= \binom{n}{i} \cdot t^i \cdot (1-t)^{n-i} = B_{i,n}(t) \end{aligned}$$

⇒ Bernstein-Polynome sind Spezialfall von B-Splines

Java-Applet von B-Splines

[~cg/2008/skript/Applets/Splines/App.html](#)

Bewertung von B-Splines

- tolle Sache !

aber:

- kein Kreis
- nur invariant bzgl. affiner Abbildungen

Affine Abbildung

$$\vec{y} = A \cdot \vec{x} + \vec{b}$$

Erhalten bleiben:

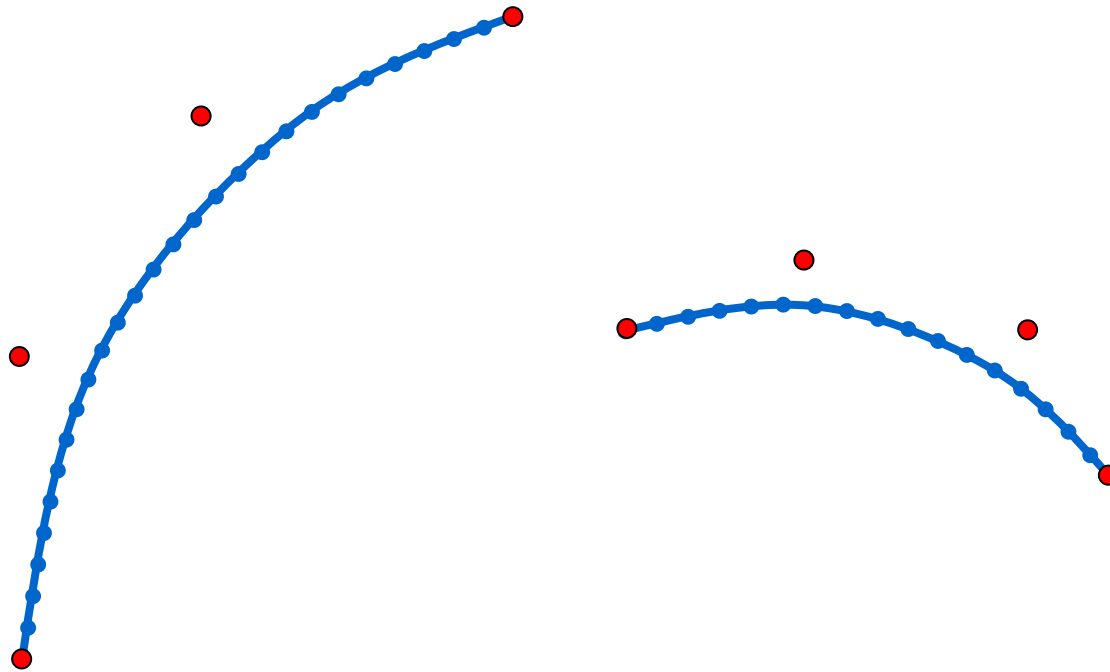
- Gradlinigkeit
- Parallelität von Geraden

nicht erhalten bleiben:

- Winkel
- Flächeninhalte

- Translation
 - Skalierung
 - Rotation
- sind affine Abbildungen

Invarianz bzgl Abbildung



B-Splines sind nicht invariant unter Projektion !

NURBS

Non Uniform

Rational

B-Splines

t_j nicht äquidistant

Gewichtsquotient

Gewichtsfunktion

NURBS

Punkte P_i Knoten t_j Gewichte h_i

$$\sum_{i=0}^n N_{i,k}(t) = 1$$

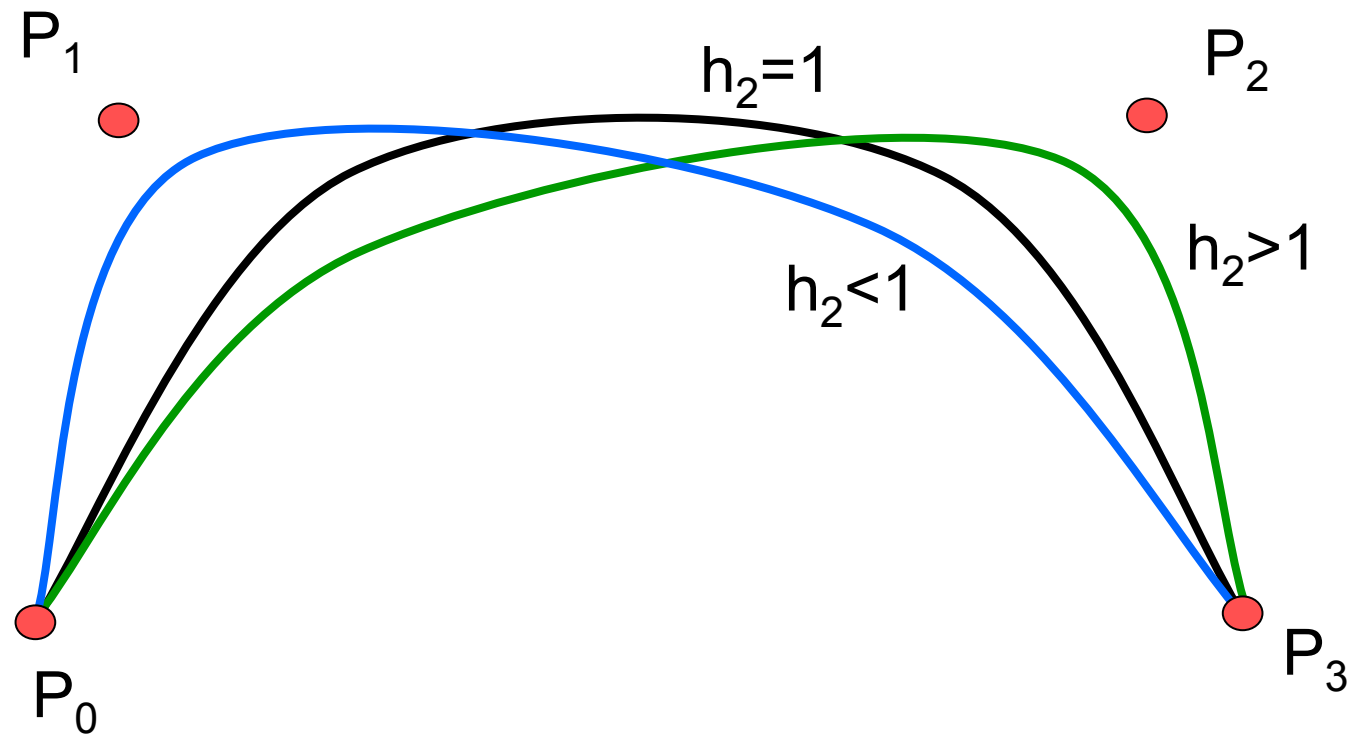
$$\sum_{i=0}^n h_i \cdot N_{i,k}(t) = z$$

normiere auf 1

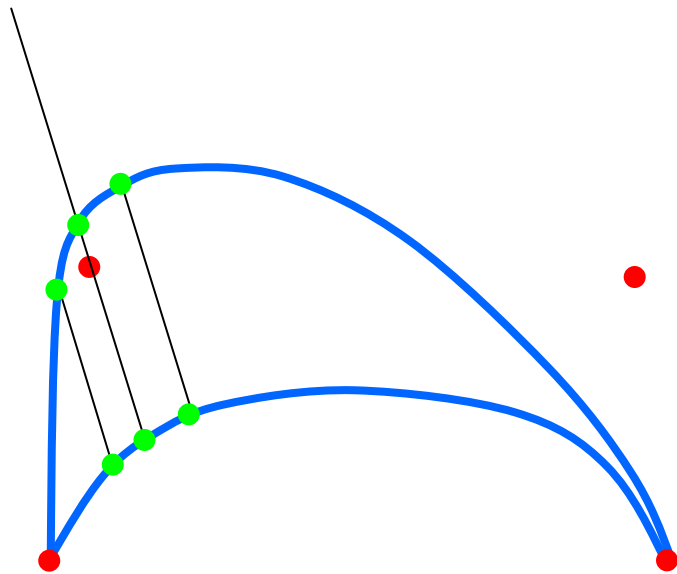
$$R_{i,k}(t) = \frac{h_i \cdot N_{i,k}(t)}{\sum_{j=0}^n h_j \cdot N_{j,k}(t)}$$

$$P(t) = \sum_{i=0}^n R_{i,k}(t) \cdot P_i$$

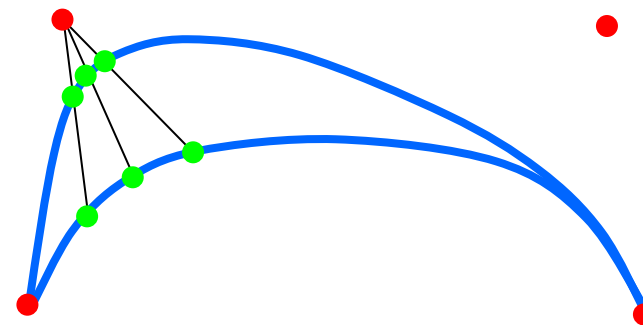
Auswirkung der NURBS-Gewichte



Möglichkeiten der Einflussnahme

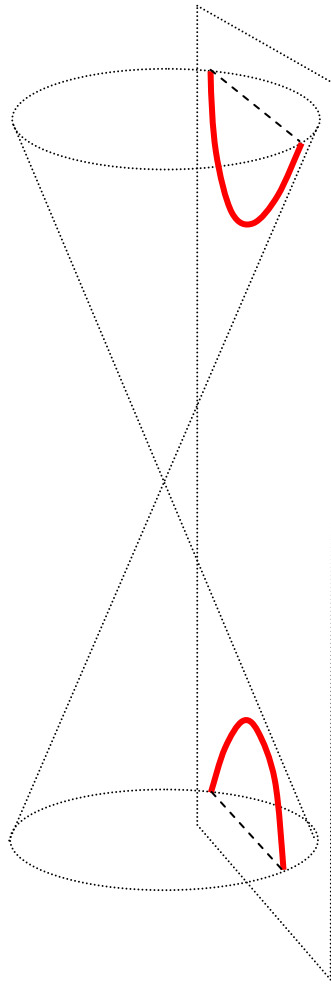


Kontrollpunkt verschieben:
Punkte wandern parallel

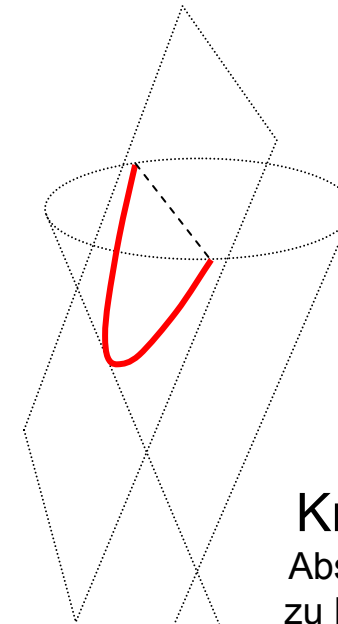


Gewicht erhöhen:
Punkte wandern auf
Kontrollpunkt zu

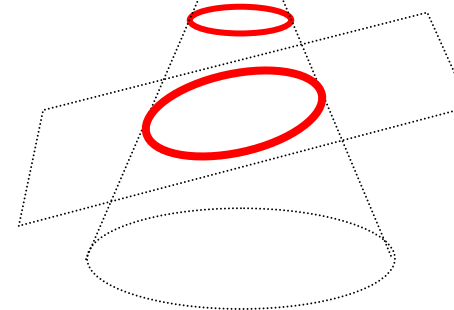
Kegelschnitte



Hyperbel
Differenz der
Abstände
konstant



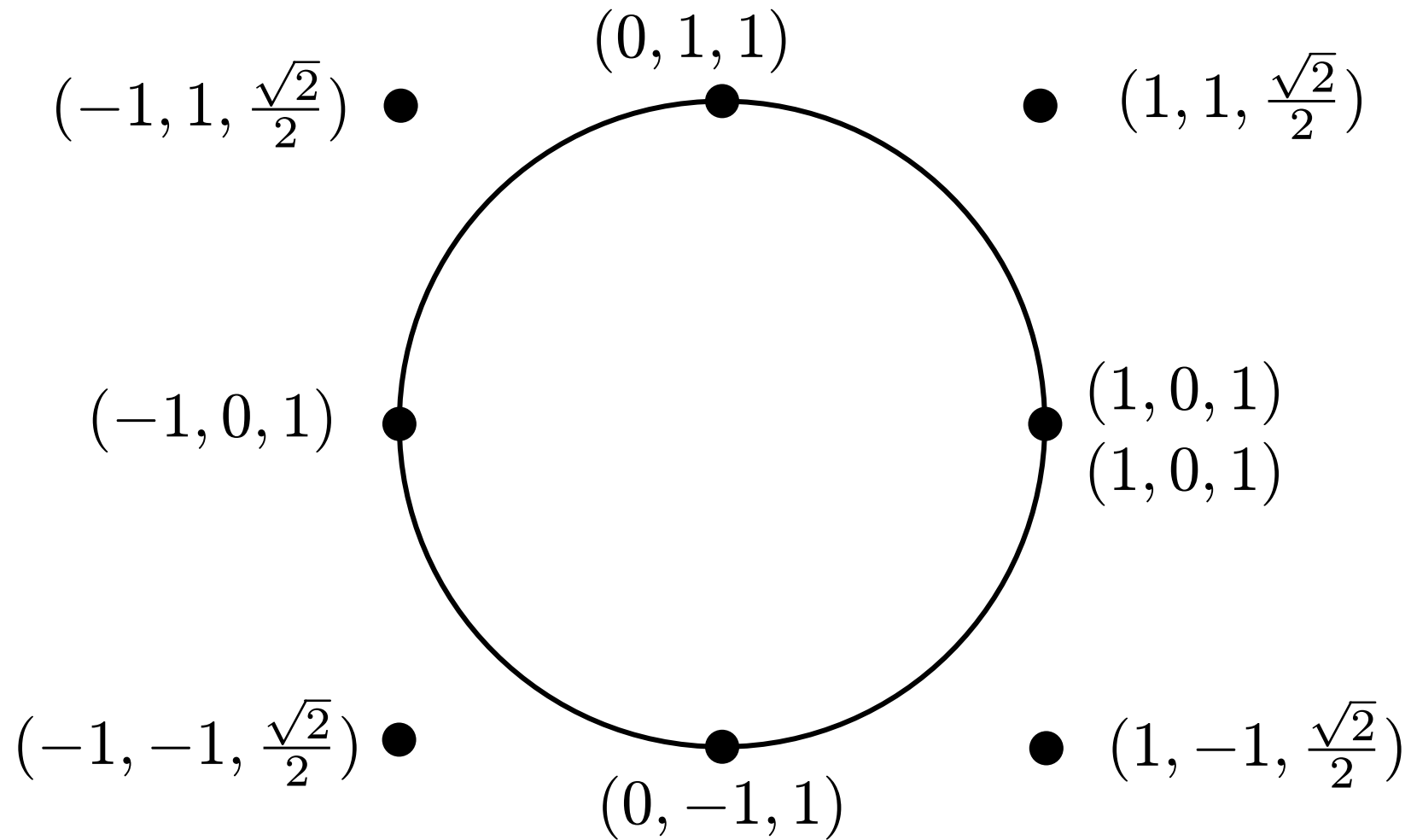
Parabel
Abstand zu
Punkt und
Gerade
gleich



Kreis
Abstand
zu Punkt
konstant

Ellipse
Summe der
Abstände
konstant

NURBS-Kreis



Knotenvektor: 0,0,0,1,1,2,2,3,3,4,4,4

Viertelkreis durch NURBS

$$P_x(t) = \left(\frac{16t^2 - 8t + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}(-32t^2 + 8t)}{16t^2 - 8t + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}(-32t^2 + 8t) + 16t^2} \right)$$

$$P_x(t) = \left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(-32t^2 + 8t) + 16t^2}{16t^2 - 8t + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}(-32t^2 + 8t) + 16t^2} \right)$$

korrekter Kreis, denn $P_x^2(t) + P_y^2(t) =$

$$\left(\frac{16t^2 - 8t + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}(-32t^2 + 8t)}{16t^2 - 8t + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}(-32t^2 + 8t) + 16t^2} \right)^2 + \left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(-32t^2 + 8t) + 16t^2}{16t^2 - 8t + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}(-32t^2 + 8t) + 16t^2} \right)^2 = 1$$

NURBS + homogene Koordinaten

$$P(t) = \sum_{i=0}^n \frac{h_i \cdot N_{i,k}(t)}{\sum_{j=0}^n h_j \cdot N_{j,k}(t)} \cdot P(i)$$

Punktkoordinaten \rightarrow Homogene Koordinaten

$$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} h_i \cdot x_i \\ h_i \cdot y_i \\ h_i \end{pmatrix}$$
$$P_i \longrightarrow P'_i$$

NURBS + homogene Koordinaten

verwende B-Splines: $P'(t) = \sum_{i=0}^n N_{i,k}(t) \cdot P'_i$

1.+2. Komponente: $\sum_{i=0}^n h_i \cdot N_{i,k}(t) \cdot P_i$

3. Komponente: $\sum_{j=0}^n h_j \cdot N_{j,k}(t)$

Punktkoordinaten \leftarrow Homogene Koordinaten

$$\begin{pmatrix} x/z \\ y/z \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$
$$\frac{\sum_{i=0}^n h_i \cdot N_{i,k}(t) \cdot P_i}{\sum_{j=0}^n h_j \cdot N_{j,k}(t)} = \sum_{i=0}^n R_{i,k}(t) \cdot P_i = P(t)$$



Wer kurvt am besten ?

Splines Bézier B-Splines NURBS

konstanter Polynomgrad	+	-	+	+
lokaler Einfluss	-	-	+	+
effiziente Speicherung	+	+	+	+
Kreis möglich	-	-	-	+
invariant bzgl. Affine Abb.	+	+	+	+
invariant bzgl. Projektion	-	-	-	+