Logische Sprachen

Theoretische Grundlagen

Prädikatenlogik erster Stufe:

- Aussagen treffen
- Relationen zwischen Aussagen ausdrücken
- Schlüsse ziehen

Elemente sind

- Terme
- Formeln

Logische Sprachen

Terme:

- Konstante (pommes_frites, zeus, …)
- Variable (Mutter, Person, Z, …)
- Zusammengesetzte Terme:

  funktor(arg1, arg2,…)

  arg1, arg2,… Terme
  ihre Anzahl heißt Stelligkeit des Funktors
  Funktornamen beginnen mit Kleinbuchstaben
- Bsp.:
  alter(meier)
  datum(11,12,2007)
  entfernung(osnabrueck,hauptstadt(niedersachen))

Logische Sprachen

Relationen (zwischen Termen):

- über Formeln ausdrückbar
- atomare Formeln: prädikatname(term1,term2,…)
- zusammengesetzte Formeln:
  F,G Formeln, dann auch
  $\neg F$
  $F \wedge G$
  $F \vee G$
  $F \Rightarrow G$
- Bsp.: vater(b,a) $\wedge$ mutter(c,a)

  vater(b,a) $\wedge$ mutter(c,a) => eltern(b,c,a)

Logische Sprachen

- soll Formel allgemein gelten:
  Variablen und Allquantoren
  $\forall$ A,B,C vater(B,A) $\wedge$ mutter(C,A) => eltern(B,C,A)
- Existenzquantor: es existiert ein Vater zu a
  vater(D,a)

- Fazit: ist F Formel und X Variable, dann sind auch

  ($\exists$ X: F)
  ($\forall$ X: F)
  Formeln
- Formeln können beliebig geschachtelt sein
  ($\forall$ X : ($\exists$ Y : (vater(Y,X)))

Logische Sprachen

Formeln der Wissensbasis und zu beweisende Formel in konjunktive Normalform (Klauselnormalform) transformieren $\rightarrow$ Resolutionsverfahren anwendbar

1. Ersetze: $(A \Rightarrow B)$ durch $\neg A \vee B$ und
   $(A \Leftrightarrow B)$ durch $A \Rightarrow B \wedge B \Rightarrow A$
2. Verschiebe Negation an Symbole: ersetze z.B.
   $\neg (A \wedge B)$ durch $\neg A \vee \neg B$
   und eliminiere Doppelnegation: d.h. ersetze $\neg(\neg A)$ durch A
3. Ziehe die Quantoren nach vorne, z.B. ersetze
   $\forall X: A(X) \wedge \forall X: B(X)$ durch $\forall X: (A(X) \wedge B(X))$

Logische Sprachen

4. Stelle quantorenfreien Ausdruck als Konjunktion von Disjunktionen dar, z.B. ersetze
   $(A \wedge B) \vee C$ durch $(A \vee C) \wedge (B \vee C)$
5. Eliminiere alle Existenzquantoren durch Einführung von sog. Skolemfunktionen
6. Lasse alle noch vorhandenen Allquantoren fest

entstandene Klausel in Normalform nicht mehr äquivalent zur Ausgangsformel, aber

Logische Sprachen

Es gilt:

1. Jede prädikatenlogische Formel kann in eine Klauselform überführt werden ohne dass die Unerfüllbarkeit verändert wird.
2. Ist A eine Aussage (prädikatenlogische Formel) und S die Klauselform von A, dann ist A genau dann unerfüllbar, wenn S unerfüllbar ist.

Nun Resolutionsverfahren mit Unifikation der Terme (Belegung der Variablen so, dass Terme unifizieren)

Logische Sprachen

um zu zeigen: $\exists$ **X** ***P*(X)** versucht man zu zeigen: $\forall$ **X** $\neg$***P*(X)**

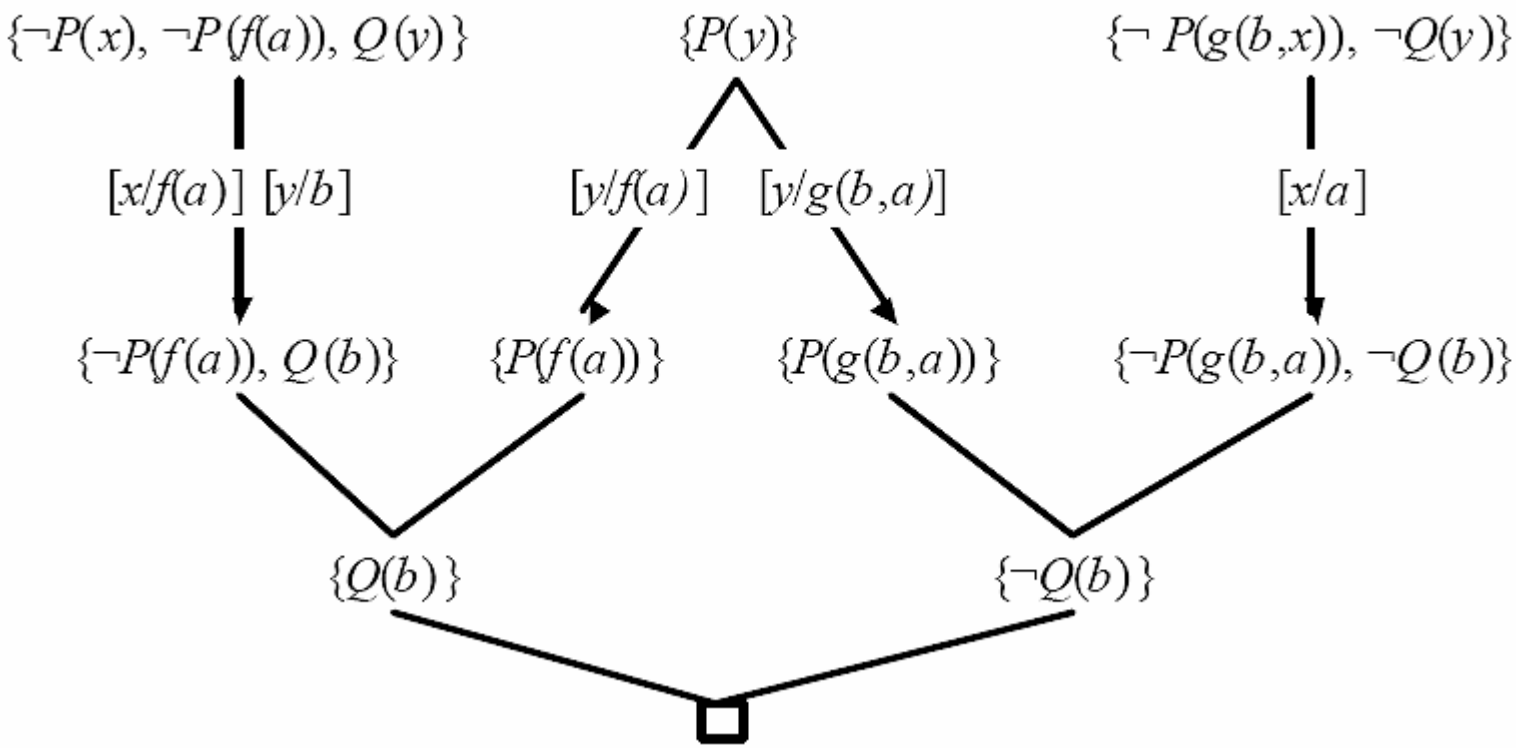
i) Falls die Behauptung $\exists$ **X** ***P*(X)** nicht gilt und zudem x ein Element aus einer unendlichen Menge (z.B. Nat) ist, kann es sein, dass das Beweisverfahren nicht terminiert.

ii) Falls die Behauptung $\exists$ **X** ***P*(X)** gilt, dann führt WB $\cup$ {$\forall$**X** $\neg$***P*(X)** } nach N Beweisschritten zur leeren Klausel (und somit zum Widerspruch).

Logische Sprachen

Beispiel:

$$\forall x \forall y((\neg P(x) \vee \neg P(f(a)) \vee Q(y)) \wedge P(y) \wedge (\neg P(g(b,x)) \vee \neg Q(y)))$$



Logische Sprachen

In der Praxis:
Einschränkung auf praktisch wichtige Spezialform:

Hornklauseln: haben höchstens ein positives Literal

entsprechen damit den Elementen in Prolog

A1,…,An => B	entspr.	B :- A1,…,An	(Regel)
=>B	entspr.	B	(Faktum)
A1,…,Am =>	entspr.	?-A1,…,Am	(Anfrage)