

Differentialgeometrie von Flächen – Die Gaußsche Krümmung

Eine Darstellung mit Computeralgebra und Computergrafik

Heinz Spindler

Fachbereich Mathematik/Informatik
der Universität Osnabrück

Uni-AG, Samstag, den 8. 6. 2002



Einleitung

Differentialgeometrie ist die Untersuchung der gekrümmten Flächen im Raum mit Methoden der Analysis. Es werden auch abstrakte höherdimensionale Gebilde untersucht. Durch die bahnbrechenden Arbeiten von Gauß und Riemann wurde der Weg bereitet für ein tieferes Verständnis der Geometrie. Es setzte sich der Gedanke durch, dass die euklidische Geometrie, also die nicht-gekrümmte Geometrie, nur eine unter vielen denkbaren Geometrien ist. Nach Riemann wird die geometrische Struktur einer Fläche, eines Raumes oder allgemein einer n -dimensionalen Mannigfaltigkeit durch ein sogenanntes metrisches Tensorfeld beschrieben. Diese Auffassung hat zu revolutionären Umwälzungen in der modernen theoretischen Physik geführt. Einsteins Entwicklung der Allgemeinen Relativitätstheorie baut auf den Ideen von Riemann auf.

Die Ideen lassen sich am besten am Beispiel der Flächen im Anschauungsraum illustrieren. Hier werden jedoch die innere Geometrie und die äußere, durch die Art der Einbettung in den Raum bestimmte Geometrie miteinander verquickt. Um so genialer muss es erscheinen, dass Gauss erkannt hat, dass fundamentale, auf den ersten Blick von der Gestalt der Fläche im Raum abhängige Größen in Wahrheit intrinsische Eigenschaften der Fläche darstellen, d. h. Größen sind, die sich nur durch Messen auf der Fläche ohne Rückgriff auf den umgebenen Raum bestimmen lassen. Das 'theorem egregium' von Gauß sagt: Krümmung ist eine innere Eigenschaft der Fläche. Durch Phantasie und abstraktes Denken gelingt es dann, einen abstrakteren Begriff der Fläche als abstrakte zweidimensionale Mannigfaltigkeit unabhängig von einer Realisierung im Raum zu schaffen. Die Riemannsche Geometrie ist die Theorie der n -dimensionalen Mannigfaltigkeiten, denen ein metrisches Tensorfeld aufgeprägt ist. Dieses Tensorfeld legt fest, wie Längen von Kurven, Winkel, Flächeninhalte, Volumina zu berechnen sind. Darüber hinaus –und das ist die Fortführung der durch das 'theorem egregium' von Gauss eingeleiteten Entwicklung der Geometrie durch Riemann –kann man die Krümmung, genauer den Krümmungstensor einer solchen Riemannschen Mannigfaltigkeit aus dem metrischen Tensor ableiten.

Die Differentialgeometrie hat einen lokalen und einen globalen Aspekt. Die interessantesten Fragestellungen beziehen sich auf den Zusammenhang zwischen lokalen und globalen Eigenschaften. Kann man zum Beispiel die globale Gestalt einer Fläche vorhersagen, wenn man weiß, dass sie im Kleinen euklidisch ist? Die Antwort ist: Nein! Es gibt ganz verschiedene Modelle von Flächen, die alle im Kleinen euklidisch sind, Torus und Möbiusband gehören zum Beispiel dazu. Noch verwickelter wird es, wenn die Flächen lokal nicht euklidisch sind. Dieselbe Frage stellt sich natürlich auch in höheren Dimensionen. Es ist keinesfalls evident, und auch falsch, dass die Geometrie des Universums euklidisch ist.

Der fundamentale Begriff der Differentialgeometrie ist die **Krümmung**. Dies ist ein lokales Konzept. Demzufolge studiert man die Flächen zunächst in kleinen Umgebungen ihrer Punkte. Einiges aus der Theorie der **Flächen im Kleinen**, wie sie Gauß in seiner Arbeit 'Disquisitiones generales circa superficies curvas' (1823) entwickelt hat, möchte ich Ihnen vorstellen, insbesondere den zentralen Begriff der Gaußschen Krümmung einer Fläche. Zum Schluss folgt ein Ausblick auf die Theorie der **Flächen im Großen**. Es gibt einen ganzen Zoo von merkwürdigen mathematischen Individuen. Dazu gehören

die euklidische Ebene,

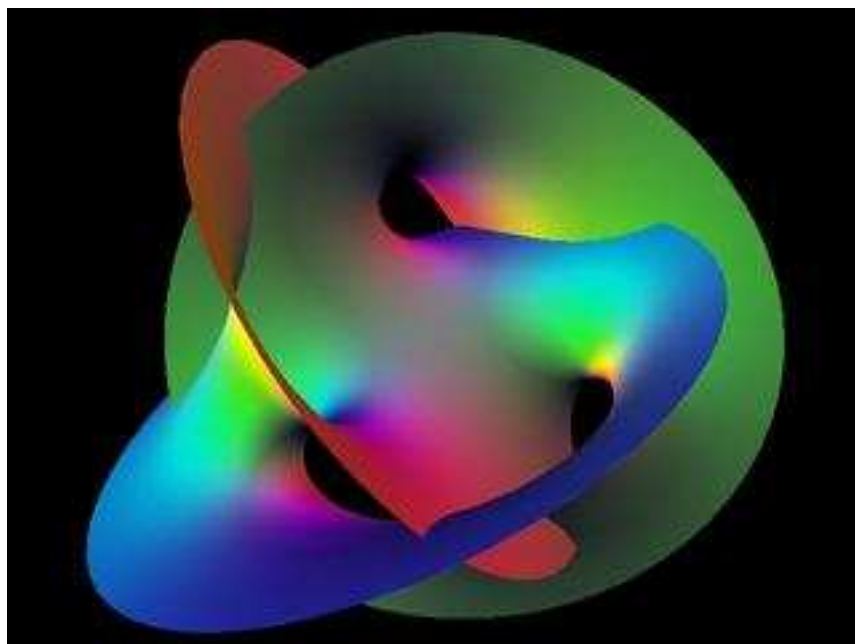
das Möbiusband,

die Kleinsche Flasche,

der Zylinder,

der Torus – diese Flächen entstehen sämtlich aus Rechtecken der euklidischen Ebene durch geeignetes Identifizieren von Rechteckskanten mittels euklidischer Bewegungen.

die projektive Ebene – die sogenannte elliptische Geometrie von Hilbert, in der sich zwei verschiedene Geraden stets in genau einem Punkt schneiden.



This non-orientable minimal surface has the topological type of a projective plane and has three embedded planar ends. (Found by Robert Bryant.)

die hyperbolische Ebene –die sogenannte nicht-euklidische Ebene, in der das Parallelenaxiom nicht gilt und schließlich die aus nichteuklidischen Polygonen in der hyperbolischen Ebene durch geeignetes Verkleben der Kanten mittels nicht-euklidischer Bewegungen entstehenden **geschlossenen Flächen höheren Geschlechts**. Das führt aber weit weg von der elementaren Geometrie in das wunderschöne Gebiet der sogenannten Riemannschen Flächen.

Die erforderlichen mathematischen Grundbegriffe sind aus dem Analysis- und Geometrieunterricht der Oberstufe bekannt. Es sind dies der Begriff der **Funktion**, der **Ableitung**, des **Integrals**, der kartesischen **Koordinaten**, des **Vektors** und des **Skalarprodukts** von Vektoren.

Zur Behandlung konkreter Beispiele ist eine Vertrautheit mit der **Exponentialfunktion**, den **trigonometrischen Funktionen** und ihren Umkehrfunktionen unerlässlich.

Die Berechnungen und die grafischen Darstellungen der Flächen wurden mit Hilfe des Computeralgebrasystems *Mathematica* durchgeführt. Einige Grafiken sind den Seiten

◆ www.gang.umass.edu
◆ pantheon.yale.edu/~jar55/math/project/index.html
entnommen.

■ Literatur

Besonders lesenswert erscheinen mir die beiden Klassiker [6] und [8]. Interessant ist auch der Bestseller [1]. Wer Comics mag, schaue einmal in [7].

- [1] Robert Ossermann: Die Geometrie des Universums Von der Göttlichen Komodie zu Riemann und Einstein
- [2] Manfrdo P. do Carmo: Differentialgeometrie von Kurven und Flächen
- [3] Geometry I, Encyclopaedia of Mathematical Sciences Volume 28
- [4] Mike Spivak: Differential Geometry, Volume II , Publish or Perish Boston 1970
- [5] Hermann Weyl: Riemanns geometrische Ideen, Springer 1988
- [6] David Hilbert/ Stefan Cohn-Vossen: Anschauliche Geometrie, Wissenschaftliche Buchgesellschaft Darmstadt 1973
- [7] Jean-Pierre Petit: Die Abenteuer des Anselm Wüßteger – Das Geometrikon, vieweg 1995
- [8] Courant/Robbins: Was ist Mathematik? Fünfte Auflage, Springer 2001