Algorithmen

Skript zur Vorlesung im WS 2014/2015

Prof. Dr. Oliver Vornberger

Institut für Informatik
Fachbereich Mathematik/Informatik
Universität Osnabrück

Literatur

Die Veranstaltung behandelt (naturgemäß) nur einen Teil der Programmiersprache Java und auch nur exemplarisch einige wichtige Datenstrukturen. Der prüfungsrelevante Stoff ist vollständig in diesem Skript dokumentiert. Wer sich darüberhinaus noch umfassender informieren möchte, sei auf folgende Bücher verwiesen:

- Christian Ullenboom:
  Java ist auch eine Insel, 10. Auflage, Galileo Computing, 2011,
  Onlinefassung: `http://openbook.galileocomputing.de/javainsel/`
- Robert Sedgewick, Kevin Wayne:
  Einführung in die Programmierung mit Java, Pearson, 2011

Danksagung

Ich danke ...

... Herrn Frank Lohmeyer für die Bereitstellung des Pakets `AlgoTools` von *Java*-Klassen zur vereinfachten Ein- und Ausgabe sowie für die Implementation eines *Java-Applets* zur Simulation der Beispiel-Programme im WWW-Browser.

... Frank Thiesing, Olaf Müller, Ralf Kunze, Dorothee Langfeld, Patrick Fox, Nicolas Neubauer, Mathias Menninghaus, Jana Lehnfeld, Christian Viergutz, Nils Haldenwang und Sebastian Büscher für die inhaltliche Mitarbeit.

... Herrn Viktor Herzog für die Konvertierung des Skripts nach HTML.

HTML-Version
Der Inhalt dieser Vorlesung kann online betrachtet werden unter
`http://www-lehre.inf.uos.de/~ainf`

Osnabrück, im September 2014

Inhaltsverzeichnis

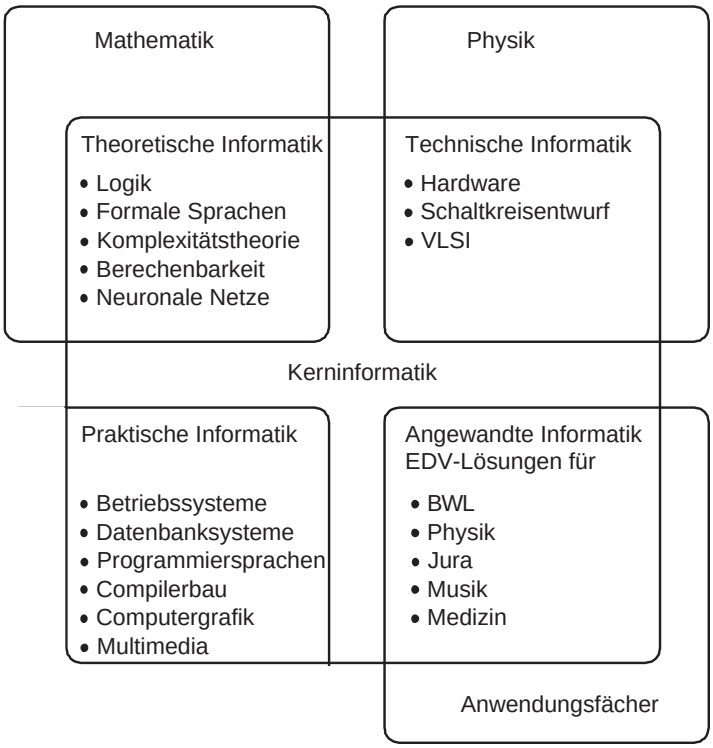
Verzeichnis der Java-Programme

Kapitel 1

Einführung

1.1 Informatik

Wissenschaft von der EDV
Konzepte, unabhängig von Technologie
Formalismus
Interdisziplinärer Charakter



1.2 Algorithmus, Programm, Prozess

Eine endlich lange Vorschrift, bestehend aus Einzelanweisungen, heißt *Algorithmus*.

Beispiele:

Telefonieren:	Hörer abnehmen Geld einwerfen wählen sprechen auflegen
Kochrezept:	Man nehme . . .
Bedienungsanleitung:	Mit Schlüssel S die Mutter M auf Platte P festziehen.

Der Durchführende kennt die Bedeutung der Einzelanweisungen; sie werden deterministisch, nicht zufällig abgearbeitet. Endliche Vorschrift bedeutet **nicht** endliche Laufzeit, aber die Beschreibung der Vorschrift muss endlich sein.

Hier: Elementaranweisungen müssen vom Computer verstanden werden.

Programm	$\rightarrow$	Maschinenprogramm
`if (a > b)`	Compiler	`0110111011010110111`

Ein für den Compiler formulierter Algorithmus heißt *Programm*.
Ein Programm in Ausführung heißt *Prozess*.

1.3 Anweisungen, Ablaufprotokoll

Elementare Anweisungen

Beispiel: teile x durch 2
erhöhe y um 1

Strukturierte Anweisungen

enthalten Kontrollstruktur, Bedingung, Teilanweisungen.
Beispiele:

```
WENN es tutet
   DANN waehle
   SONST lege auf
```

```
abheben
waehlen
SOLANGE besetzt ist TUE
                      auflegen
                      abheben
                      waehlen
```

Beispiel für einen Algorithmus in umgangssprachlicher Form

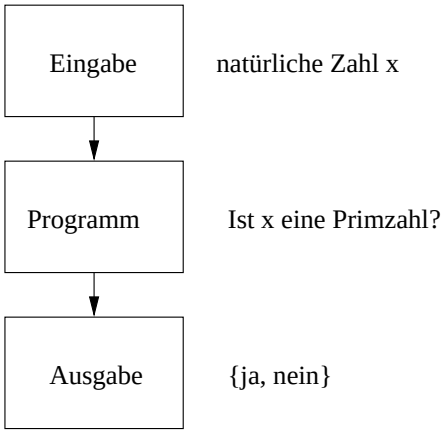
```
lies x
setze z auf 0
SOLANGE x ≠ 1 TUE
   WENN x gerade
      DANN halbiere x
      SONST verdreifache x und erhoehe um 1
   erhoehe z um 1
drucke z
```

Ablaufprotokoll (`trace`)

Zeile	x	z
	undef.	undef.
1	3	undef.
2	3	0
3	10	0
4	10	1
3	5	1
4	5	2
3	16	2
4	16	3
3	8	3
4	8	4
3	4	4
4	4	5
3	2	5
4	2	6
3	1	6
4	1	7
5	Ausgabe	7

Programm iteriert Collatz-Funktion
$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$f(x) =$ Anzahl der Iterationen, um x auf 1 zu transformieren

Typisch: Programm löst Problem



Terminierung, Korrektheit und Effizienz sind nicht algorithmisch zu bestimmen. Dafür ist jeweils eine neue Idee erforderlich.

Kapitel 2

Java

2.1 Sprachmerkmale

```
/*****************************  Collatz.java  *********************************/

import AlgoTools.IO;

/**  Berechnet Collatz-Funktion, d.h.
 *   Anzahl der Iterationen der Funktion g: N -> N
 *   bis die Eingabe auf 1 transformiert ist
 *   mit g(x) = x/2 falls x gerade, 3*x+1 sonst
 */

public class Collatz {

  public static void main(String [] argv) {

    int x, z;                                       // definiere 2 Variablen

    x = IO.readInt("Bitte eine Zahl: ");            // lies einen Wert ein
    z = 0;                                          // setze z auf 0

    while (x != 1) {                                // solange x ungleich 1 ist
        if (x % 2 == 0)                             // falls x gerade ist
            x = x / 2;                              // halbiere x
        else                                        // andernfalls
            x = 3*x+1;                              // verdreifache x und add. 1
        z = z+1;                                    // erhoehe z um eins
    }
    IO.println("Anzahl der Iterationen: " + z); // gib z aus
  }
}
```

Java ist eine objektorientierte Programmiersprache: Die Modellierung der Realwelt erfolgt durch in Klassenhierarchien zusammengefasste Objekte, beschrieben durch Datenfelder und Methoden. Datenfelder sind zur Klasse oder ihren Objekten gehörende Daten; Methoden sind Anweisungsfolgen, die auf den Datenfeldern operieren, um ihren Zustand zu manipulieren.

Der Collatz-Algorithmus als Java-Programm besteht aus der Definition der Klasse `Collatz` mit der Methode `main`. Nach Übersetzung des Programms in den maschinenunabhängigen Bytecode wird die Methode `main` gestartet, sobald die sie umschließende Klasse geladen wurde. Der Quelltext besteht aus durch Wortzwischenräume (Leerzeichen, Tabulatoren, Zeilen- und Seitenvorschubzeichen) getrennte Token. Zur Verbesserung der Lesbarkeit werden Kommentare eingestreut, entweder durch `/* ... */` geschachtelt oder durch `//` angekündigt bis zum Zeilenende. Der Dokumentationsgenerator ordnet den durch `/** ... */` geklammerten Vorspann der nachfolgenden Klasse zu. Die von den Schlüsselwörtern verschieden gewählten Bezeichner beginnen mit einem Buchstaben, Unterstrich `(_)` oder Dollarzeichen `($)`. Darüberhinaus dürfen im weiteren Verlauf des Bezeichners auch Ziffern verwendet werden. Zur Vereinfachung der Ein-/Ausgabe verwenden wir die benutzer-definierte Klasse `AlgoTools.IO` mit den Methoden `readInt` und `println`.

2.2 Variablen

Variablen sind benannte Speicherstellen, deren Inhalte gemäß ihrer vereinbarten Typen interpretiert werden. Java unterstützt folgende “eingebaute” Datentypen (genannt *einfache Datentypen*).

`boolean`	entweder `true` oder `false`
`char`	16 Bit Unicode
`byte`	vorzeichenbehaftete ganze Zahl in 8 Bit
`short`	vorzeichenbehaftete ganze Zahl in 16 Bit
`int`	vorzeichenbehaftete ganze Zahl in 32 Bit
`long`	vorzeichenbehaftete ganze Zahl in 64 Bit
`float`	Gleitkommazahl in 32 Bit
`double`	Gleitkommazahl in 64 Bit

2.3 Kontrollstrukturen

Kontrollstrukturen regeln den dynamischen Ablauf der Anweisungsfolge eines Programms durch Bedingungen, Verzweigungen und Schleifen.

```
/*****************************  Bedingung.java  ******************************/

import AlgoTools.IO;

/**  Verzweigung durch Bedingung (if-Anweisung, Bedingungsoperator)
 *
 *   Vergleichsoperatoren:   <    kleiner
 *                           <=   kleiner gleich
 *                           ==   gleich
 *                           >    groesser
 *                           >=   groesser gleich
 *                           !=   ungleich
 *
 *   logische Operatoren:    &&   und
 *                           ||   oder
 *                           ^    exklusives oder
 *                           !    nicht
 */

public class Bedingung {

  public static void main (String [] argv) {

    int x = -5, y, m;                    // definiere 3 Integer-Variablen
                                         // davon eine initialisiert

    x = x % 2 == 0 ? x/2 : 3*x + 1;      // bedingter Ausdruck
                                         // weise der linken Seite
                                         // den Ausdruck vor ':' zu,
                                         // falls Bedingung vor '?' wahr;
                                         // sonst Ausdruck hinter ':'


    if (x < 0) x = -x;                   // bedingte Anweisung ohne else
                                         // setze x auf Absolutbetrag

    if (x < 0) y = -x; else y = x;       // bedingte Anweisung mit else
                                         // setze y auf den
                                         // Absolutbetrag von x

    m = IO.readInt("Bitte Monatszahl: "); // bedingte Anweisung
                                         // mit mehreren else-Zweigen
    if      ((3 <= m) && (m <=  5)) IO.println("Fruehling");
    else if ((6 <= m) && (m <=  8)) IO.println("Sommer");
    else if ((9 <= m) && (m <= 11)) IO.println("Herbst");
    else if (m==12 || m==1 || m==2) IO.println("Winter");
    else                            IO.println("unbekannte Jahreszeit");

  }
}
```

```
/*************************** Fall.java ***********************************/

import AlgoTools.IO;

/**  Verzweigung durch Fallunterscheidung (switch/case-Anweisung)
 *
 */

public class Fall {

  public static void main (String [] argv) {

    int zahl  = 42;
    int monat = 11;

   switch (zahl % 10) {// verzweige in Abhaengigkeit der letzten Ziffer von zahl

        case 0:  IO.println("null  "); break;
        case 1:  IO.println("eins  "); break;
        case 2:  IO.println("zwei  "); break;
        case 3:  IO.println("drei  "); break;
        case 4:  IO.println("vier  "); break;
        case 5:  IO.println("fuenf "); break;
        case 6:  IO.println("sechs "); break;
        case 7:  IO.println("sieben"); break;
        case 8:  IO.println("acht  "); break;
        case 9:  IO.println("neun  "); break;
    }


    switch(monat) {                 // verzweige in Abhaengigkeit von monat

        case  3: case  4: case  5:   IO.println("Fruehling"); break;
        case  6: case  7: case  8:   IO.println("Sommer   "); break;
        case  9: case 10: case 11:   IO.println("Herbst   "); break;
        case 12: case  1: case  2:   IO.println("Winter   "); break;
        default:                     IO.println("unbekannte Jahreszeit");
    }

  }
}
```

```
/*************************  Schleife.java  ********************************/

import AlgoTools.IO;

/**  while-Schleife, do-while-Schleife, for-Schleife                        */

public class Schleife {

  public static void main (String [] argv) {

    int i, x=10, y=2, summe;                    // 4 Integer-Variablen

    while (x > 0) {                             // solange x groesser als 0
        x--;                                    // erniedrige x um eins
        y = y + 2;                              // erhoehe y um zwei
    }

    do {
        x++;                                    // erhoehe x um eins
        y += 2;                                 // erhoehe y um 2
    } while (x < 10);                           // solange x kleiner als 10

    IO.println("Bitte Zahlen eingeben. 0 als Abbruch");
    summe = 0;                                  // initialisiere summe
    x = IO.readInt();                           // lies x ein
    while (x != 0) {                            // solange x ungleich 0 ist
        summe += x;                             // erhoehe summe
        x = IO.readInt();                       // lies x ein
    }
    IO.println("Die Summe lautet " + summe);

    do {
        x=IO.readInt("Bitte 1<= Zahl <=12");    // lies x ein
    } while (( x < 1) || (x > 12));             // solange x unzulaessig

    for (i=1; i<=10; i++) {                     // drucke 10 mal
      IO.print(i, 6);                           // Zahl i auf 6 Stellen
      IO.print(" zum Quadrat = ");              // das Wort zum Quadrat
      IO.println(i*i, 6);                       // das Quadrat von i auf 6 Stellen
    }
  }
}
```

```
/*************************  Fakultaet.java  *******************************/

import AlgoTools.IO;

/**  Berechnung der Fakultaet mit for-, while- und do-while-Schleifen
  *
  *  n! :=   1 fuer n=0,
  *          1*2*3* ... *n sonst
  *
  */

public class Fakultaet {

  public static void main (String [] argv) {

    int i, n, fakultaet;                    // 3 Integer-Variablen

    n = IO.readInt("Bitte Zahl: ");         // fordere Zahl an


    fakultaet = 1;                          // berechne n! mit for-Schleife
    for (i = 1; i <= n; i++)
        fakultaet = fakultaet * i;
    IO.println(n + " ! = " + fakultaet);


    fakultaet = 1;                          // berechne n! mit while-Schleife
    i = 1;
    while (i <= n) {
        fakultaet = fakultaet * i;
        i++;
    }
    IO.println(n + " ! = " + fakultaet);


    fakultaet = 1;                          // berechne n! mit do-while-Schleife
    i = 1;
    do {
        fakultaet = fakultaet * i;
        i++;
    } while (i <= n);
    IO.println(n + " ! = " + fakultaet);
  }
}
```

```
/*************************  GGT.java  ************************************/

import AlgoTools.IO;

/**  Berechnung des GGT
 *
 *   ggt(x,y) =     groesster gemeinsamer Teiler von x und y
 *
 *                  x                falls x = y
 *   ggt(x,y) =     ggt(x-y, y)      falls x > y
 *                  ggt(x, y-x)      falls y > x
 *
 *                  denn wegen x=t*f1 und y=t*f2 folgt (x-y) = t*(f1-f2)
 *
 *                  x                falls y = 0
 *   ggt(x,y) =     ggt(y, x mod y)  sonst
 *
 */

public class GGT {

    public static void main (String [] argv) {

        int teiler, a, b, x, y, z;                  // 6 Integer-Variablen

        IO.println("Bitte zwei Zahlen: ");
        a=x=IO.readInt();  b=y=IO.readInt();        // lies 2 Zahlen ein

        teiler = x<y ? x:y;                         // beginne mit kleinerer Zahl
        while ((x % teiler != 0) ||                 // solange x nicht aufgeht
               (y % teiler != 0))                   // oder y nicht aufgeht
            teiler--;                               // probiere Naechstkleineren
        IO.println("GGT = " + teiler);

        while (a != b)                              // solange a ungleich b
            if (a > b) a = a - b;                   // subtrahiere die kleinere
            else       b = b - a;                   // Zahl von der groesseren
        IO.println("GGT = " + a);

        while (y != 0) {                            // solange y ungleich 0
            z = x % y;                              // ersetze x durch y
            x = y;                                  // und y durch x modulo y
            y = z;
        }
        IO.println("GGT = " + x);
    }
}
```

2.4 Einfache Datentypen

Der Datentyp legt fest:

- Wertebereich,
- Operationen,
- Konstantenbezeichner

Die Implementierung verlangt:

- Codierung.

einfach = von der Programmiersprache vorgegeben.

2.4.1 Ganze Zahlen (`byte`, `short`, `int`, `long`)

Wertebereich: ganze Zahlen darstellbar in 8, 16, 32, 64 Bits.

Typ	Wertebereich	Länge
`byte`	`-128..127`	8 Bit
`short`	`-32768..32767`	16 Bit
`int`	`-2147483648..2147483647`	32 Bit
`long`	`-9223372036854775808..9223372036854775807`	64 Bit

Codierung

Codierung der positiven Zahlen in Dualzahldarstellung:
Sei

$$x = \sum_{i=0}^{n-1} d_i \cdot 2^i$$

Algorithmus dezimal $\rightarrow$ dual:

```
while (x != 0){
   if (x%2 == 0) IO.print('0');
            else IO.print('1');
   x = x/2;
}
```

Obacht: Bits werden rückwärts generiert!

Codierung der ganzen Zahlen im 2-er Komplement:

d_3	d_2	d_1	d_0	x
0	1	1	1	7
0	1	1	0	6
0	1	0	1	5
0	1	0	0	4
0	0	1	1	3
0	0	1	0	2
0	0	0	1	1
0	0	0	0	0
1	1	1	1	-1
1	1	1	0	-2
1	1	0	1	-3
1	1	0	0	-4
1	0	1	1	-5
1	0	1	0	-6
1	0	0	1	-7
1	0	0	0	-8

Beispiel zur Berechnung des 2-er Komplements einer negativen Zahl:

Gegeben $-x$	-4
Finde d_i zu x	0100
Invertiere Bits	1011
Addiere 1	1100

Vorteil: Nur ein Addierwerk!

```
   0011   3
+  1011  -5
------------
=  1110  -2
```

Subtraktion mittels Negierung auf Addition zurückführen. Obacht: Überlauf beachten!

```
   0111   7
+  0001   1
------------
=  1000  -8   falsch
```

Trick: Vorzeichenbits verdoppeln, müssen nach der Verknüpfung identisch sein:

```
   00111        7                    00011       3
+  00001        1                    11011      -5
-------------------------------------------------
   01000                             11110      -2
```

Ergebnis undefiniert — Ergebnis ok!

Operatoren

`+`	:	`Ganzzahl` × `Ganzzahl`	→	`Ganzzahl`	Addition
`-`	:	`Ganzzahl` × `Ganzzahl`	→	`Ganzzahl`	Subtraktion
`*`	:	`Ganzzahl` × `Ganzzahl`	→	`Ganzzahl`	Multiplikation
`/`	:	`Ganzzahl` × `Ganzzahl`	→	`Ganzzahl`	ganzzahlige Division
`%`	:	`Ganzzahl` × `Ganzzahl`	→	`Ganzzahl`	Modulo = Rest der Division
`&`	:	`Ganzzahl` × `Ganzzahl`	→	`Ganzzahl`	bitweise Und-Verknüpfung
`|`	:	`Ganzzahl` × `Ganzzahl`	→	`Ganzzahl`	bitweise Oder-Verknüpfung
`^`	:	`Ganzzahl` × `Ganzzahl`	→	`Ganzzahl`	bitweise XOR-Verknüpfung
`<<`	:	`Ganzzahl` × `Ganzzahl`	→	`Ganzzahl`	Linksshift
`>>`	:	`Ganzzahl` × `Ganzzahl`	→	`Ganzzahl`	Vorzeichen erhaltender Rechtsshift
`>>>`	:	`Ganzzahl` × `Ganzzahl`	→	`Ganzzahl`	Vorzeichen ignorierender Rechtsshift
`~`	:	`Ganzzahl`	→	`Ganzzahl`	Bitweise Negation
`-`	:	`Ganzzahl`	→	`Ganzzahl`	Vorzeichenumkehr
`++`	:	`Ganzzahl`	→	`Ganzzahl`	Inkrement
`--`	:	`Ganzzahl`	→	`Ganzzahl`	Dekrement

Konstantenbezeichner

`123` `+123` `-123`

Eine führende Null kündigt eine Oktalzahl zur Basis `8` an: `0173`. Eine führende Null mit nachfolgendem `x` oder `X` kündigt eine Hexadezimalzahl zur Basis `16` an: `0x7B`.

```
/************************  Ueberlauf.java ***********************************/
import AlgoTools.IO;

/**  Integer-Ueberlauf */

public class Ueberlauf {

  public static void main (String [] argv) {

    int n = 1;                          // initialisiere n
    while (n > 0) {                     // solange n positiv ist
        n = n * 10;                     // verzehnfache n
        IO.println(n, 20);              // drucke n auf 20 Stellen
    }                                   // letzter Wert ist negativ !

  }
}
```

2.4.2 Gleitkommazahlen (`float, double`)

Gleitkommazahlen werden durch Vorzeichen, Mantisse und Exponent beschrieben und erreichen damit deutlich größere Absolutwerte als Integerzahlen und können auch gebrochene Zahlen codieren. Genauer: Für eine gegebene Zahl x werden Mantisse m und Exponent e gesucht mit der Eigenschaft

$$x = m \cdot 2^e$$

Das heißt: Der Wert der Gleitkommazahl ergibt sich aus dem Produkt von Mantisse und der Zweierpotenz des Exponenten. Da es für ein gegebenes x mehrere zueinander passende Mantissen und Exponenten gibt, wählt man die normalisierte Form mit einer Mantisse $1 \leq m < 2$. Da eine normalisierte Mantisse m immer mit einer 1 vor dem Komma beginnt, reicht es aus, ihren Nachkommawert als reduzierte Mantisse $f = m - 1.0$ abzuspeichern.

Java verwendet zur Kodierung von Vorzeichen, Mantisse und Exponent den IEEE-Standard 754-1985, den wir hier aus didaktischen Gründen etwas vereinfacht darstellen.

Codierung

Bei einer Codierung für 32 Bits (`float`) werden für das Vorzeichen 1 Bit, für den Exponenten 8 Bits und für die reduzierte Mantisse 23 Bits vorgesehen.

X	XXXXXXXX	XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
Vorzeichen s	Exponent e	reduzierte Mantisse f

Die Codierung des Vorzeichens geschieht über 0 = positiv und 1 = negativ, die Codierung des ganzzahligen Exponenten erfolgt im 2-er Komplement, die Codierung der nichtganzzahligen Mantisse erfolgt als Dualzahl mit Nachkommastellen. Hierbei werden die Dualziffern nach dem Komma gewichtet mit 2er-Potenzen der Form 2^i mit negativen i. D.h.

$$0.d_{-1}d_{-2}d_{-3}\ldots d_{-k} \text{ hat die Bedeutung } \sum_{i=-1}^{-k} d_i \cdot 2^i$$

Zu gegebenem x lässt sich eine normalisierte Mantisse und der dazu passende Exponent wie folgt finden:

Bestimme die größte 2-er Potenz 2^e mit $2^e \leq x$. Setze $m = x/2^e$. Offenbar gilt

$$x = m \cdot 2^e \text{ mit } 1 \leq m < 2.$$

Zur Bestimmung der k Nachkommastellen der reduzierten Mantisse $f := m - 1.0$ eignet sich folgender Algorithmus

```
for (i = 0; i < k; i++) {
   f = f * 2.0;
   if (f >= 1.0) {IO.print('1'); f = f - 1.0;}
      else IO.print('0');
}
```

Beispiel: Sei $x = 13.5$ gegeben. Offenbar gilt

$$13.5 = 1.6875 \cdot 2^3$$

Als Codierung ergibt sich

$$\begin{aligned} s &= 0 \\ e &= 3 \\ m &= (13.5)/2^3 = 1.6875 \\ f &= 1.6875 - 1.0 = 0.6875 = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \end{aligned}$$

0	00000011	10110000000000000000000
Vorzeichen	Exponent	reduzierte Mantisse

Für die Spezialfälle wird vereinbart: Das vorzeichenbehaftete Unendlich ($\pm\infty$) wird durch den maximal möglichen Exponent $e = +127$ kodiert. Die vorzeichenbehaftete Null wird durch den minimal möglichen Exponent $e = -128$ kodiert.

Die größte darstellbare positive Zahl im vereinfachten float-Format liegt knapp unter

$$2 \cdot 2^{126} = 2^{127} \approx 10^{38}$$

0	01111110	11111111111111111111111
Vorzeichen	Exponent	reduzierte Mantisse

Die kleinste darstellbare positive Zahl im vereinfachten float-Format lautet

$$1.0 \cdot 2^{-127} = 2^{-127} \approx 10^{-38}$$

0	10000001	00000000000000000000000
Vorzeichen	Exponent	reduzierte Mantisse

Bei der Codierung für 64 Bits (`double`) sind für das Vorzeichen 1 Bit, für den Exponenten 11 Bits und für die reduzierte Mantisse 52 Bits vorgesehen.

X	XXXXXXXXXXX	XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
Vorzeichen s	Exponent e	reduzierte Mantisse f

$$\text{Wert} = \begin{cases} (-1)^s \cdot 2^e \cdot 1.f & \text{falls } -1024 < e < 1023 \\ \pm\infty & \text{falls } e = 1023 \\ \pm 0 & \text{falls } e = -1024 \end{cases}$$

Damit liegt die größte darstellbare positive Zahl im vereinfachten double-Format knapp unter

$$2 \cdot 2^{1022} = 2^{1023} \approx 10^{308}$$

Die kleinste darstellbare positive Zahl im vereinfachten double-Format lautet

$$1.0 \cdot 2^{-1023} = 2^{-1023} \approx 10^{-308}$$

Operatoren

`+`	:	`Gleitkomma` × `Gleitkomma`	→	`Gleitkomma`	Addition
`-`	:	`Gleitkomma` × `Gleitkomma`	→	`Gleitkomma`	Subtraktion
`*`	:	`Gleitkomma` × `Gleitkomma`	→	`Gleitkomma`	Multiplikation
`/`	:	`Gleitkomma` × `Gleitkomma`	→	`Gleitkomma`	Division
`%`	:	`Gleitkomma` × `Gleitkomma`	→	`Gleitkomma`	Modulo
`++`	:	`Gleitkomma`	→	`Gleitkomma`	Inkrement um 1.0
`--`	:	`Gleitkomma`	→	`Gleitkomma`	Dekrement um 1.0

Konstantenbezeichner

Beispiele:

```
.2
2
2.
2.0
2.538                                          a
2.538f
2.5E2    =  2.5 * 10^2    =   250
2.5E-2   =  2.5 * 10^-2   =   0.025
```

Multiplikation: (Exponenten addieren, Mantissen multiplizieren)

Beispiel:

$$\begin{array}{rcrcl} 12 & * & 20 & = & \\ 1.5 \cdot 2^3 & * & 1.25 \cdot 2^4 & = & \\ 1.5 \cdot 1.25 & * & 2^3 \cdot 2^4 & = & \\ 1.875 & * & 2^7 & = & 240 \end{array}$$

Addition: (Exponenten angleichen, Mantissen addieren)

Beispiel:

$$\begin{array}{rcrcl} 12 & + & 20 & = & \\ 1.5 \cdot 2^3 & + & 1.25 \cdot 2^4 & = & \\ 0.75 \cdot 2^4 & + & 1.25 \cdot 2^4 & = & \\ (0.75 + 1.25) & * & 2^4 & = & \\ 1 & * & 2^5 & = & 32 \end{array}$$

Problem beim Angleichen der Exponenten:

Beispiel:

$$\begin{array}{rcrcl} 1024 & + & \frac{1}{1048576} & = & \\ 1 \cdot 2^{10} & + & 1 \cdot 2^{-20} & = & \\ 1 \cdot 2^{10} & + & 2^{-30} \cdot 2^{10} & = & \\ 1 \cdot 2^{10} & + & 0 \cdot 2^{10} & = & 1024 \end{array}$$

Bei 23 Bits für die Mantisse ist 2^{-30} nicht mehr darstellbar.

Die Dezimalzahl $0,4 = 1,6 * 2^{-2}$ ist nicht exakt darstellbar, da die Dualzahlentwicklung der Mantisse eine Periode enthält.

Gleitkommaoperationen stoßen in Java keine Ausnahmebehandlung an. D.h., Division durch Null führt nicht zum Abbruch, sondern ergibt den Wert $+\infty$ bzw. $-\infty$; Null dividiert durch Null ergibt `NaN` (not a number).

```
/************************  Gleitkomma.java  *******************************/

import AlgoTools.IO;

/**  Gleitkommaoperationen
 */

public class Gleitkomma {

  public static void main (String [] argv) {

    double summe, summand, pi, nenner, x;  // fuenf 64-Bit-Gleitkommazahlen

    IO.println("1/2 + 1/4 + 1/8 + ...");
    summe = 0.0; summand = 1.0;            // Initialisierungen
    while (summand > 0.0000000000001) {    // solange Summand gross genug
        summand = summand / 2.0;           // teile Summand
        summe   = summe + summand;         // erhoehe Summe
        IO.println(summe, 22, 16);         // drucke Summe auf insgesamt
    }                                      // 22 Stellen mit 16 Nachkommastellen

                                           // Pi/4 = 1 -1/3 +1/5 -1/7 ...
                                           // Pi   = 4 -4/3 +4/5 -4/7 ...
    summe  = 4.0;                          // setze NAEHErung auf 4
    nenner = 1.0;                          // setze nenner auf 1
    IO.println("Naeherung von Pi :");      // gib Naeherungswerte aus
    for (int i=0; i < 10000; i++) {        // tue 10000 mal
        nenner += 2.0;                     // erhoehe nenner um 2
        summand = 4.0 / nenner;            // bestimme naechsten summand
        if (i%2 == 0) summand = -summand;  // abwechselnd positiv/negativ
        summe = summe + summand;           // addiere summand auf Naeherung
        IO.println(summe, 22, 16);         // drucke Naeherung auf insgesamt
                                           // 22 Stellen, 16 Nachkommastellen
    }

    IO.println("Ueberlaufdemo :");
    x = 2.0;                               // setze x auf 1
    while (x < Double.MAX_VALUE) {         // solange kleiner als Maximum
        x = x * x;                         // quadriere x
       IO.println(x,30);                      // drucke in wiss. Notation
    }                                      // druckt als letzten Wert Infinity

    IO.println("Behandlung der 0:");
    IO.println( 1.0 / 2.0 );               // ergibt 0.5
    IO.println( 0.0 / 2.0 );               // ergibt 0
    IO.println( 1.0 / 0.0 );               // ergibt Infinity
    IO.println( 0.0 / 0.0 );               // ergibt NaN (not a number)

  }
}
```

2.4.3 Boolean (`boolean`)

Der Typ `boolean` dient zum Speichern der logischen Werte wahr und falsch. Die einzigen Konstantenbezeichner lauten `true` und `false`.

Codierung

Mögliche Codierung in einem Byte:

```
false  =  0
true   =  1
```

Operatoren

`&&`	:	`boolean`	×	`boolean`	→	`boolean`	logisches Und mit verkürzter Auswertung
`||`	:	`boolean`	×	`boolean`	→	`boolean`	logisches Oder mit verkürzter Auswertung
`&`	:	`boolean`	×	`boolean`	→	`boolean`	logisches Und mit vollständiger Auswertung
`|`	:	`boolean`	×	`boolean`	→	`boolean`	logisches Oder mit vollständiger Auswertung
`^`	:	`boolean`	×	`boolean`	→	`boolean`	Exklusiv-Oder
`==`	:	`boolean`	×	`boolean`	→	`boolean`	Gleichheit
`!=`	:	`boolean`	×	`boolean`	→	`boolean`	Ungleichheit
`!`	:	`boolean`			→	`boolean`	Negation

P	Q	P && Q	P || Q	P ^ Q	!Q
false	false	false	false	false	true
false	true	false	true	true	false
true	false	false	true	true	
true	true	true	true	false	

Verkürzte Auswertung erfolgt von links nach rechts und bricht frühstmöglich ab:

```
while ((t > 0) && (n % t != b)) {
   t = t - 1;
}
```

De Morgan'sche Regeln:

```
!p && !q = !(p || q)
!p || !q = !(p && q)
```

2.4.4 Charakter (`char`)

Wertebereich: alle Zeichen im 16 Bit breiten Unicode-Zeichensatz.

Codierung

Jedes Zeichen wird codiert durch eine 2 Byte breite Zahl, z.B. der Buchstabe `A` hat die Nummer `65` (dezimal) = `00000000 01000001` (binär). Die niederwertigen 7 Bits stimmen mit dem ASCII-Zeichensatz (American Standard Code for Information Interchange) überein.

Zeichen-Literale werden zwischen zwei Apostrophen geschrieben, z.B. `'Q'` oder `'5'` oder `'?'`. Einige Sonderzeichen können durch eine Escape-Sequenz ausgedrückt werden.

Escape-Sequenz	Bedeutung	Codierung
`\a`	bell	7
`\b`	backspace	8
`\t`	horizontal tab	9
`\n`	newline	10
`\v`	vertical tab	11
`\f`	form feed	12
`\r`	carriage return	13
`\101`	Buchstabe A in Oktal-Schreibweise	65
`\u0041`	Buchstabe A in Hexadezimal-Schreibweise	65
`\"`	Anführungsstriche	34
`\'`	Apostroph	39
`\\`	backslash	92

Operatoren

`<, <=, ==, >=, >, != : char × char → boolean`

verlangen Ordnung auf dem Zeichensatz!

Es gilt `0 < 1 <...< 9 <...< A < B <...< Z <...< a < b <...< z < ...`

```
c = IO.readChar();
if ((('A' <= c) && (c <= 'Z')) ||
    (('a' <= c) && (c <= 'z')))
    IO.print ("Das Zeichen ist ein Buchstabe");
```

```
/************************  Zeichen.java  ***********************************/

import AlgoTools.IO;

/**  Umwandlung von Character zur Zahl
 *   Umwandlung von Zahl zum Character
 */

public class Zeichen {

  public static void main (String [] argv) {

    for (int i=0; i<=255; i++) {                // fuer den Latin-1-Zeichensatz
        IO.print(i,7);                          // drucke laufende Nummer
        IO.print( " " + (char) i );             // drucke zugehoeriges Zeichen
        if (i % 8 == 0) IO.println();           // nach 8 Zeichen neue Zeile
    }
    IO.println();

    char c;
    do {
        c = IO.readChar("Bitte ein Zeichen: "); // lies ein Zeichen ein
        IO.print("Der ASCII-Code lautet : ");   // gib den zugehoerigen
        IO.println((int) c,3);                  // ASCII-Code aus
    } while (c != '\n' );                       // bis ein Newline kommt
  }
}
```

33 !	34 "	35 #	36 $	37 %	38 &	39 '	40 (
41)	42 *	43 +	44 ,	45 -	46 .	47 /	48 0
49 1	50 2	51 3	52 4	53 5	54 6	55 7	56 8
57 9	58 :	59 ;	60 <	61 =	62 >	63 ?	64 @
65 A	66 B	67 C	68 D	69 E	70 F	71 G	72 H
73 I	74 J	75 K	76 L	77 M	78 N	79 O	80 P
81 Q	82 R	83 S	84 T	85 U	86 V	87 W	88 X
89 Y	90 Z	91 [	92 \	93]	94 ^	95 _	96 `
97 a	98 b	99 c	100 d	101 e	102 f	103 g	104 h
105 i	106 j	107 k	108 l	109 m	110 n	111 o	112 p
113 q	114 r	115 s	116 t	117 u	118 v	119 w	120 x
121 y	122 z	123 {	124 |	125 }	126 ~	127	128
161 ¡	162 ¢	163 £	164 ¤	165 ¥	166 ¦	167 §	168 ¨
169 ©	170 ª	171 «	172 ¬	173 -	174 ®	175 ¯	176 °
177 ±	178 ²	179 ³	180 ´	181 µ	182 ¶	183 ·	184 ¸
185 ¹	186 º	187 »	188 ¼	189 ½	190 ¾	191 ¿	192 À
193 Á	194 Â	195 Ã	196 Ä	197 Å	198 Æ	199 Ç	200 È
201 É	202 Ê	203 Ë	204 Ì	205 Í	206 Î	207 Ï	208 Ð
209 Ñ	210 Ò	211 Ó	212 Ô	213 Õ	214 Ö	215 ×	216 Ø
217 Ù	218 Ú	219 Û	220 Ü	221 Ý	222 Þ	223 ß	224 à
225 á	226 â	227 ã	228 ä	229 å	230 æ	231 ç	232 è
233 é	234 ê	235 ë	236 ì	237 í	238 î	239 ï	240 ð
241 ñ	242 ò	243 ó	244 ô	245 õ	246 ö	247 ÷	248 ø
249 ù	250 ú	251 û	252 ü	253 ý	254 þ	255 ÿ	

Teile der Ausgabe vom Programm zeichen.java

2.4.5 Typumwandlung

Der Typ eines Ausdrucks wird durch seine Bestandteile und die Semantik seiner Operatoren bestimmt. Grundsätzlich werden sichere, d.h. verlustfreie, Umwandlungen implizit, d.h. automatisch, ausgeführt. Konvertierungen, die ggf. verlustbehaftet sind, verlangen einen expliziten Cast-Operator.

Arithmetische Operationen auf ganzzahligen Werten liefern immer den Typ `int`, es sei denn, einer oder beide Operanden sind vom Typ `long`, dann ist das Ergebnis vom Typ `long`.

Die kleineren Integer-Typen `byte` und `short` werden vor einer Verknüpfung auf `int` umgewandelt. Character-Variablen lassen sich implizit konvertieren.

Ist ein Operand in Gleitkommadarstellung, so wird die Operation in Gleitkomma-Arithmetik durchgeführt. Gleitkommakonstanten ohne Suffix sind vom Typ `double` und erfordern eine explizite Typumwandlung (cast), wenn sie einer `float`-Variable zugewiesen werden.

```
/************************  Umwandlung.java  *********************************/

import AlgoTools.IO;

/**  implizite und explizite Typumwandlungen zwischen einfachen Datentypen
 */


public class Umwandlung {

  public static void main (String [] argv) {

    char   c = '?';                  // das Fragezeichen
    byte   b = 100;                  // ca.  3 Stellen
    short  s = 10000;                // ca.  5 Stellen
    int    i = 1000000000;           // ca.  9 Stellen
    long   l = 100000000000000000L;  // ca. 18 Stellen
    float  f = 3.14159f;             // ca.  6 Stellen Genauigkeit
    double d = 3.141592653589793;    // ca. 15 Stellen Genauigkeit

    i = s ;                          // implizite Typumwandlung ohne Verlust
    i = c ;                          // implizite Typumwandlung ohne Verlust
    s = (short) c;                   // explizite Typumwandlung ohne Verlust
    s = (short) i;                   // explizite Typumwandlung  mit Verlust
    d = i;                           // implizite Typumwandlung ohne Verlust
    i = (int) d;                     // explizite Typumwandlung  mit Verlust

    d = f;                           // implizite Typumwandlung ohne Verlust
    f = (float) d;                   // explizite Typumwandlung  mit Verlust

    d = 1/2;                         // ergibt 0 wegen ganzzahliger Division
    IO.println(d);
    d = 1/2.0;                       // ergibt 0.5 wegen Gleitkommadivision
    IO.println(d);

    IO.println(2 * b + c );          // Ausdruck ist vom Typ int, Wert = 263
    IO.println(i + 1.5);             // Ausdruck ist vom Typ double

  }
}
```

2.4.6 Konstanten

Benannte Konstanten können innerhalb einer Klasse zur Verbesserung der Lesbarkeit benutzt werden. Sie werden bei der Deklaration mit dem Attribut `final` markiert und erhalten ihren nicht mehr änderbaren Wert zugewiesen.

```
/************************  Konstanten.java  *********************************/

import AlgoTools.IO;

/**  Einsatz von Konstanten fuer ganze Zahlen, Gleitkomma und Character
 */


public class Konstanten {

  public static void main (String [] argv) {

    final int    MAX_GRAD = 360;               // Integer-Konstante
    final double PI       = 3.141592653589793; // Double Konstante
    final char   PIEP     = (char) 7;          // Character-Konstante

    int g;
    double r;

    IO.print(PIEP);                           // erzeuge Piep

    for (g=0; g <= MAX_GRAD; g++) {           // fuer jeden ganzzahligen Winkel
        r = Math.sin(g/360.0*2*PI);           // berechne Sinus vom Bogenmass
        IO.println(g + " " + r);              // gib Winkel und Sinus aus
    }
  }
}
```

Kapitel 3

Felder

Mehrere Daten desselben Typs können zu einem Feld (Array) zusammengefasst werden.

```
/**************************  Feld.java  ************************************/

import AlgoTools.IO;

/**  Zusammenfassung mehrerer Daten desselben Typs zu einem Feld
 */

public class Feld {

  public static void main (String [] argv) {

    double[] a;                                  // eindimensionales double-Feld
    int i, j;                                    // Laufvariablen

    a = new double[5];                           // besorge Platz fuer 5 Double

    for (i=0; i < a.length; i++)                 // durchlaufe das Feld
        IO.println(a[i]);                        // drucke jedes Feldelement

    double[][] m = new double[4][3];             // 4x3 Matrix vom Typ double

    for (i=0; i<m.length; i++) {                 // durchlaufe jede Zeile
        for (j=0; j < m[i].length; j++)          // durchlaufe die Spalten
            IO.print(m[i][j], 8, 2);             // drucke Matrixelement
        IO.println();                            // gehe auf neue Zeile
    }

    int[][] dreieck = {{1}, {2,3}, {4,5,6}};     // untere linke Dreiecksmatrix
  }
}
```

3.1 Feld von Ziffern

```
/**************************  Ziffern.java  ***********************************/

import AlgoTools.IO;

/**  Erwartet eine Folge von Ziffern
 *   und berechnet den zugehoerigen Wert.
 */

public class Ziffern {

  public static void main (String [] argv) {

    char[] zeile;                          // Array fuer Zeile
    char c;                                // Character-Variable

    int i , wert, ziffernwert;             // Hilfsvariablen

    zeile = IO.readChars("Bitte Ziffernfolge: "); // Liest so lange Zeichen von
                                           // der Tastatur, bis <Return>
    wert = 0;
    for (i=0; i < zeile.length; i++) {
        c = zeile[i];                      // besorge naechstes Zeichen
        ziffernwert = (int) c - (int) '0';  // konvertiere Ziffer zur Zahl
        wert = 10*wert + ziffernwert;      // verknuepfe mit bisherigem Wert
    }
    IO.println("Der Wert lautet " + wert);  // gib Wert aus
  }
}
```

Beispiel: wert(4728) = ((((4*10)+7)*10+2)*10+8

3.2 Feld von Daten

```
/**************************  Matrix.java  ***********************************/

import AlgoTools.IO;

/** Multiplikation zweier NxN-Matrizen
 *
 *       c[i][j]  :=  Summe {k=0 bis N-1}  ( a[i][k] * b[k][j] )
 */

public class Matrix {

  public static void main (String [] argv) {

    final int n = 4;

    int[][] a = {{  1,  2,  3,  4},         // initialisiere Matrix A
                 {  5,  6,  7,  8},
                 {  9, 10, 11, 12},
                 { 13, 14, 15, 16}};

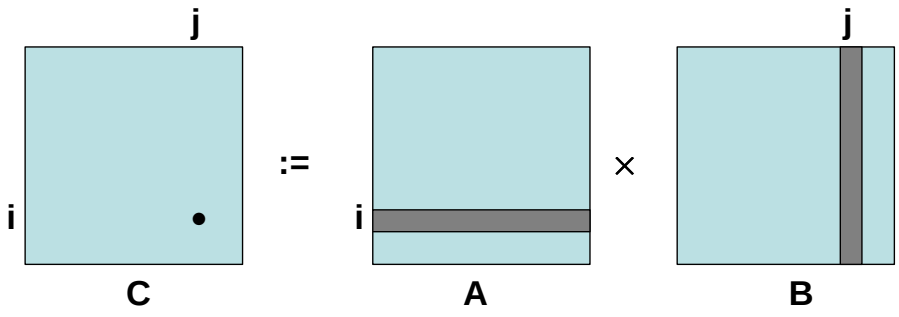
    int[][] b = {{ 17, 18, 19, 20},         // initialisiere Matrix B
                 { 21, 22, 23, 24},
                 { 25, 26, 27, 28},
                 { 29, 30, 31, 32}};

    int[][] c = new int[n][n];              // besorge Platz fuer Matrix

    int i, j, k;                            // Laufindizes

    for (i = 0; i < n; i++)                 // Zeilenindex
      for (j = 0; j < n; j++) {             // Spaltenindex
        c[i][j]=0;                          // setze Ergebnis auf 0
        for (k = 0; k < n; k++)             // verknuepfe alle Komponenten
          c[i][j]=c[i][j]+a[i][k]*b[k][j];  // von Zeile i und Spalte j
      }
   }
}
```

c_{ij} errechnet sich aus i-ter Zeile von A und j-ter Spalte von B:



3.3 Feld von Zeichen

```
/**************************  Zeichenkette.java  *****************************/

import AlgoTools.IO;

/**  Interpretiert zwei eingelesene Zeichenfolgen als Strings
 *   und vergleicht sie.
 */

public class Zeichenkette {

  public static void main (String [] argv) {

    char[] s, t;                          // Felder von Zeichen
    int i;                                // Laufindex

    s = IO.readChars("Bitte einen String: ");
    t = IO.readChars("Bitte einen String: ");

    IO.print(s);

    for (i=0; i<s.length &&         // solange s noch nicht am Ende
              i<t.length &&         // solange t noch nicht am Ende
              s[i]==t[i];           // solange beide noch gleich
              i++);                 // gehe eine Position weiter

    if (i==s.length && i==t.length) IO.print("="); // gleichzeitig zu Ende
    else if (i==s.length)           IO.print("<"); // s kuerzer als t
    else if (i==t.length)           IO.print(">"); // t kuerzer als s
    else if (s[i]<t[i])             IO.print("<"); // s kleiner als t
    else                            IO.print(">"); // t kleiner als s

    IO.println(t);
  }
}
```

Resultierende Ordnung im Telefonbuch:

```
...
MAI
MAIER
MEIER
MEYER
...
```

3.4 Feld von Wahrheitswerten

```
/*************************  Sieb.java  ************************************/

import AlgoTools.IO;

/**  Sieb des Eratosthenes zur Ermittlung von Primzahlen.
 *   Idee: Streiche alle Vielfachen von bereits als prim erkannten Zahlen.
 */

public class Sieb {

  public static void main (String [] argv) {

    boolean[]prim;                            // boole'sches Array
    int i, j, n;                              // Laufvariablen

    n = IO.readInt("Bitte Primzahlgrenze: "); // fordere Obergrenze an
    prim = new boolean[n];                    // allokiere Speicherplatz

    for (i = 2; i < n; i++) prim[i] = true;   // alle sind zunaechst Primzahl

    for (i = 2; i < n; i++)
        if (prim[i]) {                        // falls i als Primzahl erkannt,
            IO.println(i,10);                 // gib sie aus, und
            for (j = i+i; j < n; j = j+i)     // fuer alle Vielfachen j von i
                prim[j] = false;              // streiche j aus der Liste
        }
  }
}
```

Beispiel für n=20 (mit - markiert sind die Vielfachen der Primzahlen):

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
		–		–		–	–	–		–		–	–	–		–		–

Hinweis: Der oben gezeigte Algorithmus lässt sich noch beschleunigen, indem beim Herausstreichen der Vielfachen von *i* nicht bei *i+i*, sondern erst bei *i*i* begonnen wird, da die kleineren Vielfachen von *i* bereits zum Streichen verwendet worden sind. Dabei ist darauf zu achten, dass *i*i* unterhalb von *n* liegt:

```
    for (j=i*i; 0<j && j<n; j=j+i)
```

3.5 Feld von Indizes

```
/*************************  ArrayAbzaehlreim.java  **************************/

import AlgoTools.IO;

/** n Kinder stehen im Kreis, jedes k-te wird abgeschlagen.
 *  Die Kreisordnung wird organisiert durch Array mit Indizes der Nachfolger. */
public class ArrayAbzaehlreim {

  public static void main (String [] argv) {

    int[] next;                             // Array mit Indizes
    int i, index, n, k;                     // Laufvariablen

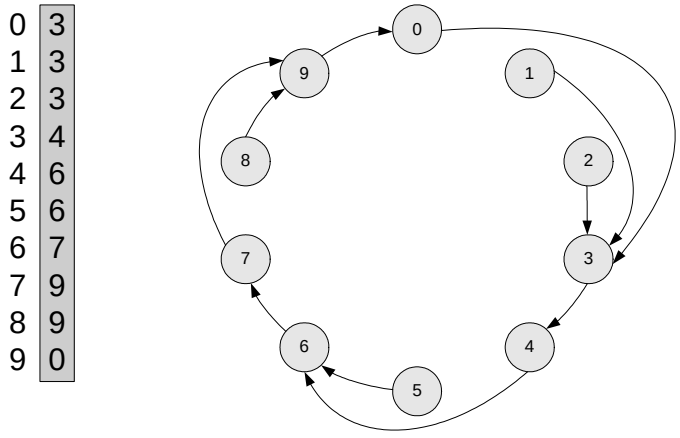
    n = IO.readInt("Wie viele Kinder ? "); // fordere Zahl der Kinder
    k = IO.readInt("Wie viele Silben ? "); // fordere Zahl der Silben an
    next = new int [n];                     // allokiere Platz fuer Index-Array

    for (i = 0; i < n; i++)                 // initiale Aufstellung
        next[i] = (i+1) % n;

    index = n-1;                            // index zeigt auf das Kind vor
                                            // dem ausgezeichneten Kind

    while (next[index] != index) {          // so lange abschlagen, bis jemand
                                            // sein eigener Nachfolger ist
        for (i=1; i< k; i++)                // gehe k-1 mal
            index = next[index];            // zum jeweiligen Nachfolger

        IO.print("Ausgeschieden: ");        // gib den Index des ausgeschiedenen
        IO.println(next[index],5);          // naechsten Nachfolgers aus
        next[index] = next[next[index]];    // setze Index auf neuen Nachfolger
    }
    IO.println("Es bleibt uebrig: " + index);
  }
}
```



Array next und Verweisstruktur nach dem 4. Abschlagen bei n=10 und k=3

3.6 Feld von Zuständen

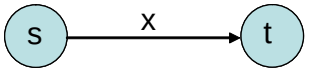
Ein *endlicher Automat* A ist ein 5-Tupel $A = (S, \Sigma, \delta, s_0, F)$ mit

S	$=$	endliche Zustandsmenge
Σ	$=$	endliches Eingabealphabet
$\delta : S \times \Sigma \to S$	$=$	Überführungsfunktion
$s_0 \in S$	$=$	Anfangs- oder Startzustand
$F \subseteq S$	$=$	Endzustände

Ein Wort $w \in \Sigma^*$ wird akzeptiert, falls

$\delta^*(s_0, w) \in F$
$\delta^*(s_0, x_0x_1x_2 \ldots x_{n-1}) = \delta(\ldots\delta(\delta(\delta(s_0, x_0), x_1), x_2)\ldots x_{n-1})$.

Die Wirkungsweise der Überführungsfunktion δ kann durch einen Zustandsüberführungsgraphen beschrieben werden. In diesem Graphen führt eine mit x beschriftete Kante von Knoten s zu Knoten t, falls gilt: $\delta(s, x) = t$.



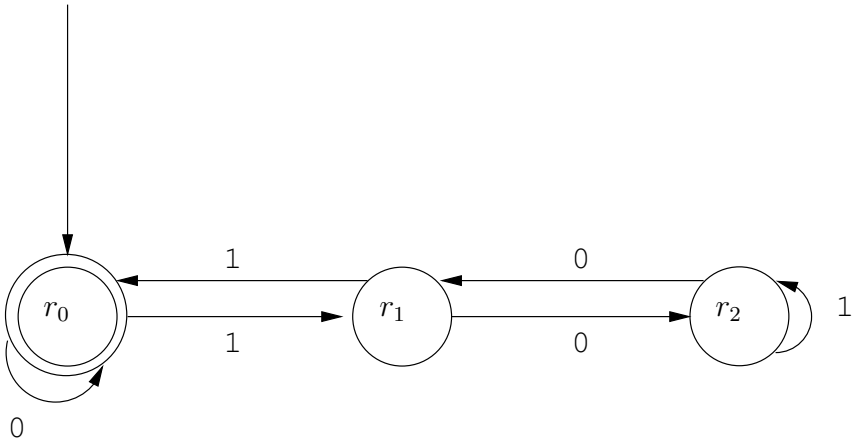
Beispiel: A soll durch 3 teilbare Dualzahlen erkennen. Hierzu spendieren wir drei Zustände mit der Bedeutung Rest 0, Rest 1 und Rest 2. Folgende Fälle können auftreten, wenn ein String w, dessen Rest als 0, 1 oder 2 bekannt ist, verlängert wird mit dem Zeichen `0` bzw. mit dem Zeichen `1`:

w	w0	w1
3x + 0 Rest 0	6x + 0 Rest 0	6x + 1 Rest 1
3x + 1 Rest 1	6x + 2 Rest 2	6x + 3 Rest 0
3x + 2 Rest 2	6x + 4 Rest 1	6x + 5 Rest 2

Also ergibt sich folgender Automat:

$S = \{r_0, r_1, r_2\}$
$\Sigma = \{$`'0', '1'`$\}$
Startzustand ist r_0
$F = \{r_0\}$

Dazu gehört ein Zustandsüberführungsgraph mit den Knoten r_0, r_1 und r_2, welche die Zustände beschreiben, wenn für den bislang eingelesenen String die Division durch 3 den Rest 0, 1 bzw. 2 ergibt. An der Kante steht das jeweils nächste Bit der Dualzahl, die von links nach rechts abgearbeitet wird.




```
/***************************  Automat.java  ***********************************/

import AlgoTools.IO;

/**  Endlicher Automat mit delta : Zustand x Eingabe -> Zustand.
 *   Ueberprueft, ob der eingegebene Binaerstring durch 3 teilbar ist.
 *   Syntaktisch korrekte Eingabe wird vorausgesetzt.
 *   Zeichen '0' und '1' werden umgewandelt in Integer 0 bzw. 1.
 */

public class Automat {

  public static void main (String [] argv) {

    int[][] delta = {{0,1},                              // Ueberfuehrungsfunktion
                     {2,0},
                     {1,2}};
    int s=0;                                             // Nummer des Zustands

    char[] zeile=IO.readChars("Bitte Binaerstring: "); // fordere Eingabe an

    for (int i=0; i < zeile.length; i++)                 // fuer jedes Zeichen

      s = delta[s][zeile[i]-'0'];                        // wende einmal delta an
                                                         // dabei Zeichen
                                                         // in Zahlen umwandeln

    if (s==0) IO.println("ist durch 3 teilbar");        // Automat akzeptiert
         else IO.println("ist nicht durch 3 teilbar"); // Automat lehnt ab
  }
}
```

3.7 Lineare und binäre Suche

```
/*************************  Suche.java  ***********************************/
import AlgoTools.IO;

/**  lineare Suche eines Wertes und des Minimums im Array
 *   und binaere Suche im geordneten Array
 */

public class Suche {

  public static void main (String [] argv) {

    int[] a;                                          // Feld fuer Zahlenfolge
    int i, x, min, index, links, rechts, mitte;

    a = IO.readInts("Bitte Zahlenfolge:      ");      // bestimme das Minimum
    min = a[0]; index = 0;                            // Minimum ist erster Wert
    for (i = 1; i < a.length; i++){                   // durchlaufe gesamte Folge
        if (a[i] < min) {                             // falls neues Minimum
            index = i;                                // merke Position
            min   = a[i];}                            // und Wert des Minimums
    }
    IO.print("Minimum = " + min);                     // gib Ergebnis bekannt
    IO.println(" an Position " + index);

    a = IO.readInts("Bitte Zahlenfolge:      ");      // suche in einer Folge
    x = IO.readInt ("Bitte zu suchende Zahl:      ");// ein bestimmtes Element
    for (i=0; (i < a.length) && (x != a[i]); i++);    // durchlaufe Folge
    if (i==a.length) IO.println("Nicht gefunden");   // gib Suchergebnis bekannt
    else IO.println("Gefunden an Position " + i);

    a = IO.readInts("Bitte sortierte Zahlenfolge: ");// suche in sortierter Folge
    x = IO.readInt ("Bitte zu suchende Zahl:      ");// ein bestimmtes Element
    links  = 0;                                       // initialisiere links
    rechts = a.length-1;                              // initialisiere rechts
    mitte  = (links + rechts)/2;                      // initialisiere mitte
    while (links <= rechts && a[mitte] != x) {        // solange noch Hoffnung
        if (a[mitte] < x)  links  = mitte+1;          // zu kurz gesprungen
        else               rechts = mitte-1;          // zu weit gesprungen
        mitte = (rechts+links)/2;                     // neue Mitte
    }
    if (links > rechts) IO.println("Nicht gefunden");// gib Ergebnis bekannt
    else IO.println("Gefunden an Position " + mitte);
  }
}
```

Analyse der Laufzeit der linearen Suche

Beh.: Die Anzahl der Vergleiche beträgt im ungünstigsten Fall n und im Durchschnitt $\frac{n}{2}$.

Analyse der Laufzeit der binären Suche

Beh.: In einem Schleifendurchlauf schrumpft ein Intervall der Länge $2^k - 1$ auf ein Intervall der Länge $2^{k-1} - 1$.

Beweis:

Sei Länge vom alten Intervall =

$$
\begin{array}{lll}
2^k - 1 & = & \text{rechts} - \text{links} + 1 \\
\Rightarrow \quad 2^k & = & \text{rechts} - \text{links} + 2 \\
\Rightarrow \quad 2^{k-1} & = & \frac{\text{rechts} - \text{links}}{2} + 1 \\
\Rightarrow \quad 2^{k-1} - 1 & = & \frac{\text{rechts} - \text{links}}{2} = \frac{\text{rechts} + \text{rechts} - \text{links} - \text{rechts}}{2} \\
& = & \text{rechts} - (\frac{\text{links} + \text{rechts}}{2} + 1) + 1 \\
& = & \text{neue Intervalllänge im } \texttt{THEN}\text{-Zweig}
\end{array}
$$

Korollar: $2^k - 1$ Zahlen verursachen höchstens k Schleifendurchläufe, da nach k Halbierungen die Intervallänge 1 beträgt.

Beispiel für eine Folge von 31 sortierten Zahlen:

Schleifendurchlauf	1	2	3	4	5
aktuelle Intervalllänge	$2^5 - 1$	$2^4 - 1$	$2^3 - 1$	$2^2 - 1$	$2^1 - 1$
	$= 31$	$= 15$	$= 7$	$= 3$	$= 1$

Anders formuliert:
n Zahlen verursachen höchstens $\log_2 n$ Schleifendurchläufe.

Kapitel 4

Klassenmethoden

Häufig benutzte Algorithmen werden zu so genannten *Methoden* zusammengefasst, die unter Nennung ihres Namens und ggf. mit Übergabe von aktuellen Parametern aufgerufen werden.

Methoden sind entweder objektbezogen (siehe später) oder klassenbezogen. Klassenbezogene Methoden werden durch das Schlüsselwort `static` deklariert und können innerhalb oder außerhalb derselben Klasse aufgerufen werden. Die Zugriffsrechte werden über sogenannte *Modifier* geregelt: Durch den Modifier `private` wird der Zugriff nur von der eigenen Klasse ermöglicht, durch den Modifier `public` darf von einer beliebigen anderen Klasse zugegriffen werden.

Gibt eine Methode einen Wert zurück, so steht sein Typ vor dem Methodennamen, andernfalls steht dort `void`. Als Aufrufmechanismus wird in der Programmiersprache Java *call-by-value* verwendet, d.h., ein im Methodenrumpf benutzter formaler Parameter wird bei Methodenaufruf mit dem Wert des aktuellen Parameters versorgt und innerhalb der Methode kann nur auf den Wert zugegriffen werden.

Methoden können durch verschiedene Parametersätze überladen werden, d.h. der Name einer Methode wird mehrmals verwendet, wobei sich die formalen Parameter unterscheiden müssen. Die Kombination aus Methodenname und den formalen Parametern bezeichnet man auch als *Signatur*.

Eine mit dem Schlüsselwort `static` versehene Deklaration einer Klassenvariablen führt eine klassenbezogene Variable ein, welche in allen Methoden dieser Klasse sichtbar ist. Auch eine Klassenvariable kann mit unterschiedlichen *Modifiern* versehen werden: Durch den Modifier `private` wird der Zugriff nur von der eigenen Klasse ermöglicht, durch den Modifier `public` darf auch von einer beliebigen anderen Klasse zugegriffen werden.

4.1 Methodenaufrufe

```
/*************************  Methoden.java  *********************************/

import AlgoTools.IO;

/**  Klassen-Methoden
 *   mit und ohne formale Parameter
 *   mit und ohne Rueckgabewert
 */

public class Methoden {

                                          // Methode ohne Rueckgabewert
  public static void bitte() {            // und ohne Parameter
    IO.println("Bitte Eingabe: ");
  }

                                          // Methode ohne Rueckgabewert
  public static void sterne(int k) {      // mit einem Integer-Parameter
    int i;                                // lokale Variable
    for (i=0; i < k; i++)                 // zeichne k Sterne
        IO.print('*');
    IO.println();
  }

                                          // Methode mit Rueckgabewert
  public static int zweihoch(int n) {     // mit einem Integer-Parameter
    int i, h = 1;                         // lokale Variablen
    for (i=0; i < n; i++) h = h * 2;      // berechne 2 hoch n
    return h;                             // liefere Ergebnis ab
  }

                                          // Methode mit Rueckgabewert
  public static int ggt(int a, int b) {   // mit zwei Integer-Parametern
    while (a != b)                        // solange Zahlen verschieden
        if (a > b) a=a-b; else b=b-a;     // ziehe kleinere von groesserer ab
    return a;                             // liefere Ergebnis zurueck
  }                                       // aktuelle Parameter unveraendert

                                          // Methode ohne Rueckgabewert
  public static void main (String [] argv) { // oeffentlich aufrufbar
    bitte();                              // rufe bitte auf
    sterne(3*5+7);                        // rufe sterne auf
    IO.println("2 hoch 7 ist "+zweihoch(7)); // rufe zweihoch auf
    IO.println("ggt(28,12) = "+ggt(28,12));  // rufe ggt auf
  }
}
```

4.2 Parameterübergabe an Arrays

```
/*************************  Parameter.java  *********************************/

import AlgoTools.IO;

/**  Uebergabe von Arrays an Methoden
 */

public class Parameter {
                                                 // Methode ohne Rueckgabewert
  public static void zeige(int[] a) {            // erhaelt Array als Parameter
    for (int i=0; i < a.length; i++)             // gibt Array aus
        IO.print(a[i],5);
    IO.println();
  }
                                                 // Methode mit Rueckgabewert
  public static int summe(int[] a) {             // erhaelt Array als Parameter
    int s = 0;                                   // initialisiert Summe
    for (int i=0; i< a.length; i++)              // durchlaeuft Array
        s = s + a[i];                            // berechnet Summe
    return s;                                    // und liefert sie zurueck
  }
                                                 // Methode mit Rueckgabewert
  public static int[] kopiere(int[] a) {         // erhaelt Array als Parameter
    int[] b = new int[a.length];                 // besorgt Platz fuer 2. Array
    for (int i=0; i<a.length; i++)               // durchlaeuft Array a
        b[i] = a[i];                             // kopiert es nach b
    return b;                                    // liefert b zurueck
  }
                                                 // Methode mit Seiteneffekt
  public static void reset(int[] a) {            // erhaelt Array als Parameter
    for (int i=0; i < a.length; i++)             // durchlaeuft Array
        a[i] = 0;                                // und setzt jede Komponente auf 0
  }

  public static void main(String [] argv) {      // erhaelt Strings als Parameter
    int[] folge = {1,4,9,16,25,36};              // deklariere initialisierte Folge
    int[] noch_eine_folge;                       // deklariere leere Folge
    zeige(folge);                                // gib folge aus
    IO.println("Summe = " + summe(folge));       // gib die Summe aus
    noch_eine_folge = kopiere(folge);            // schaffe eine Kopie der Folge
    zeige(noch_eine_folge);                      // gib Kopie aus
    reset(folge);                                // setze folge auf 0
    zeige(folge);                                // gib folge aus
  }
}
```

4.3 Sichtbarkeit

Innerhalb einer Methode verdecken formale Parameter und lokale Variablen gleich lautende Identifier aus der umschließenden Klasse. So kann ein Variablenname mehrmals innerhalb einer Klasse erscheinen, z.B. als Klassenvariable, lokale Variable oder als formaler Parameter.

Soll innerhalb einer Methode auf eine Variable zugegriffen werden, wird diese erst innerhalb der Methode gesucht (lokale Variable oder formaler Parameter). Ist dort die entsprechende Variable nicht vorhanden wird nach einer entsprechenden Klassenvariable gesucht.

```
/*************************** f.java ***************************************/
import AlgoTools.IO;

/** Sichtbarkeit von Variablen- und Methodennamen                         */

public class f {                          // Klasse f

  public static int f;                    // klassenbezogene Variable f

  public static void f(){                 // Klassenmethode f (null-stellig)
    f = 42;                               // referiert klassenbezogene Variable
  }

public static int f(int n) {              // Klassenmethode f (einstellig)
    int f=1;                              // lokale Variable f
    for (int i=1; i<=n; i++) f = f*i;     // berechnet Fakultaet
    return f;
  }

  public static int f(int x, int y){      // Klassenmethode f (zweistellig)
    while (x != y)                        // berechnet ggt von x und y
      if (x>y) x = x-y; else y=y-x;
    return x;
  }

  public static void setze(int k){        // Klassenmethode setze
    f = k;
  }

  public static int hole() {              // Klassenmethode hole
    return f;
  }

  public static void main(String[] argv){
    int f=5;                              // lokale Varibale f
    f();                                  // Aufruf von nullstelligem f
    f = f(f);                             // Aufruf von einstelligem f
    f = f(f,f);                           // Aufruf von zweistelligem f
    setze(42);                            // deponiere in Klassenvariable
    IO.println(hole());                   // hole von Klassenvariable
  }
}
```

4.4 Fehlerbehandlung

Generell ist der Programmierer verpflichtet seine Methoden robust zu implementieren. Darunter versteht man, dass eine Methode mit allen Werten, die ihr übergeben werden können, sinnvolle Resultate liefert.

Man betrachte folgende Klassenmethode `fakultaet()`, die alle positiven Zahlen von `1` bis zum übergebenen Wert aufmultipliziert und das Ergebnis zurückliefert:

```
public static int fakultaet(int n) {
  int f = 1;
  for (int i=1;i<=n;i++) {
    f = f * i;
  }
  return f;
}
```

Falls für `n` ein Wert kleiner als `0` übergeben wird, liefert die Methode das (offenbar falsche) Ergebnis `1` zurück. Falls für `n` ein zu großer Wert übergeben wird, entsteht ein Integer-Overflow. Korrekt wäre es, wenn die Methode dem Benutzer mitteilen kann, ob der übergebene Parameter im korrekten Wertebereich liegt. Dies könnte über den Rückgabewert geschehen (z.B. -1); besser wäre es jedoch, das Ergebnis der Berechnung von der Fehlermeldung zu trennen. Hierzu kann in Java eine Methode eine `RuntimeException` *werfen*. Wird diese `RuntimeException` nicht weiter behandelt, führt sie zu einem Programmabbruch. Dies ist eine recht drastische Maßnahme, allerdings ist es besser als eine Berechnung mit fehlerhaften Werten durchzuführen, ohne es dem Benutzer mitzuteilen.

Die Fehlerbehandlung mit einer `RuntimeException` kann wie folgt aussehen:

```
public static int fakultaet(int n) {
  if (n<0)  throw new RuntimeException("Obacht: Parameter negativ");
  if (n>12) throw new RuntimeException("Obacht: Parameter zu gross");
  int f = 1;
  for (int i=1;i<=n;i++) {
    f = f * i;
  }
  return f;
}
```

Bei der Erzeugung einer `RuntimeException` kann eine Fehlermeldung angegeben werden. Diese wird bei Programmabbruch auf der Kommandozeile ausgegeben. Die erzeugte `RuntimeException` wird dann mit dem Schlüsselwort `throw` aus der Methode zum Aufrufer der Methode *geworfen* und die Abarbeitung der Methode endet an dieser Stelle.

Generell sollte eine Methode fehlerhafte Eingaben ablehnen, aber auch der Benutzer der Methode sollte vorher sicherstellen, dass erst gar keine fehlerhaften Werte an eine Methode übergeben werden.

Kapitel 5

Rekursion

Eine Methode (mit oder ohne Rückgabewert, mit oder ohne Parameter) darf in der Deklaration ihres Rumpfes den eigenen Namen verwenden. Hierdurch kommt es zu einem rekursiven Aufruf. Typischerweise werden dabei die aktuellen Parameter so modifiziert, dass die Problemgröße schrumpft, damit nach mehrmaligem Wiederholen dieses Prinzips schließlich kein weiterer Aufruf erforderlich ist und die Rekursion abbrechen kann.

5.1 Fakultät, Potenzieren, Fibonacci, GGT

```
/************************  Rekursion.java  *********************************/

import AlgoTools.IO;

/** Rekursive Methoden                                                     */

public class Rekursion {

  public static int fakultaet (int n) {  //
    if (n == 0)                          //
        return 1;                        //           1         falls n=0
    else                                 //  n! :=
        return n * fakultaet(n-1);       //           n*(n-1)!  sonst
  }

  public static int zweihoch (int n) {   //
    if (n == 0)                          //           1         falls n=0
        return 1;                        //   n
    else                                 //  2   :=      (n-1)
        return 2*zweihoch(n-1);          //           2*2       sonst
  }

                                         // Leonardo da Pisa, *1180
  public static int fib (int n){         // Jedes Kaninchenpaar bekommt vom
    if (n <=1 )                          // 2. Jahr an ein Paar als Nachwuchs
        return 1;                        //
    else                                 // Jahr     0  1  2  3  4  5  6  7  8
        return fib(n-1) + fib(n-2);      // Paare    1  1  2  3  5  8 13 21 34
  }                                      //

  public static int ggt (int x, int y) { //
    if (y == 0)                          //
        return x;                        //              x          falls y=0
    else                                 // ggt(x,y) :=
        return ggt(y, x % y);            //              ggt(y,x%y) sonst
  }

  public static void muster (int n) {    // schreibt 2 hoch n Kreuze
    if (n>0) {
      muster(n-1);
      IO.print('#');
      muster(n-1);
    }
  }

  public static void main (String [] argv) {
    int[] a = IO.readInts("Bitte zwei Zahlen: ", 2);
    IO.println(a[0] + " ! =  " + fakultaet(a[0]));
    IO.println("2 hoch " + a[0] + " = " + zweihoch(a[0]));
    IO.println(a[0] + ". Fibonacci-Zahl = " + fib(a[0]));
    IO.println("ggt(" + a[0] + "," + a[1] + ") = " + ggt(a[0],a[1]));
    muster(10); IO.println();
  }
}
```

5.2 Türme von Hanoi

```
/**************************  Hanoi.java  ***********************************/

import AlgoTools.IO;

/**  Tuerme von Hanoi:
 *   n Scheiben mit abnehmender Groesse liegen auf dem Startort A.
 *   Sie sollen in derselben Reihenfolge auf Zielort C zu liegen kommen.
 *   Die Regeln fuer den Transport lauten:
 *   1.) Jede Scheibe muss einzeln transportiert werden.
 *   2.) Es darf nie eine groessere Scheibe auf einer kleineren liegen.
 *   3.) Es darf ein Hilfsort B zum Zwischenlagern verwendet werden.
 */

//            |                      |                      |
//           x|x                     |                      |
//          xx|xx                    |                      |
//         xxx|xxx                   |                      |
//        xxxx|xxxx                  |                      |
//     ---------------         ---------------         ---------------
//         Start (A)              Zwischen (B)               Ziel (C)

public class Hanoi {

  static int z=0;

  static void verlege (           // drucke die Verlegeoperationen, um
    int n,                        // n Scheiben
    char start,                   // vom Startort
    char zwischen,                // unter Zuhilfenahme eines Zwischenortes
    char ziel) {                  // zum Ziel zu bringen

    if (n>0) {
        verlege(n-1,start, ziel, zwischen);
        IO.print(z++,10);
        IO.println(": Scheibe " + n +" von " + start + " nach " + ziel);
        verlege(n-1,zwischen, start, ziel);
    }
  }

  public static void main (String [] argv) {
    int n;
    do{ n = IO.readInt("Bitte Zahl der Scheiben (n>0): "); } while (n <= 0);
    verlege(n,'A','B','C');
  }
}
```

Analyse der Größe der erzeugten Ausgabe:

Sei $f(n)$ die Anzahl der generierten Verlegebefehle für n Scheiben, d.h. bei Aufruf von

```
verlege (n, start, zwischen, ziel).
```

Da für $n > 0$ zwei neue Aufrufe mit verkleinertem n sowie eine Druckzeile entstehen, gilt offenbar:

$$f(n) := \begin{cases} 0 & \text{falls n } = 0 \\ 2 \cdot f(n-1) + 1 & \text{falls n } > 0 \end{cases}$$

d.h., die Wertetabelle beginnt wie folgt:

n	$f(n)$
0	0
1	1
2	3
3	7
4	15
5	31
6	63

Verdacht: $f(n) = 2^n - 1$

Beweis durch Induktion

Induktionsverankerung: $f(0) = 0 = 2^0 - 1$

Induktionsschritt: Sei bis $n-1$ bewiesen:

$f(n)$ $= 2 \cdot f(n-1) + 1$ $= 2 \cdot (2^{n-1} - 1) + 1 = 2^n - 2 + 1 = 2^n - 1$

↑ Rekursionsgleichung

↑ Induktionsannahme

Kapitel 6

Komplexität, Verifikation, Terminierung

Nicht:	absolute CPU-Zeit angeben
Nicht:	Anzahl der Maschinenbefehle zählen
Sondern:	Wachstum der Laufzeit in "Schritten" in Abhängigkeit
	von der Größe der Eingabe
	= Länge ihrer Codierung
	= Anzahl der Daten beschränkter Größe oder Länge der Darstellung einer Zahl

6.1 O-Notation

Seien $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

f ist höchstens von der Größenordnung g

in Zeichen: $f \in O(g)$

falls $n_0,\ c \in \mathbb{N}$ existieren mit

$$\forall\, n \geq n_0 :\ f(n) \leq c \ \cdot\ g(n)\ .$$

Statt $f \in O(g)$ sagt man auch $f = O(g)$

$\Rightarrow$ Wegen des konstanten Faktors c ist die exakte Festlegung eines Schrittes nicht erforderlich.

Beispiel:

Sei $f(n) = 31n + 12n^2$.

Dann ist $f \in O(n^2)$

Natürlich gilt auch: $f \in O(n^7)$

Die wesentlichen Klassen

$\log n$	n	$n \cdot \log n$	n^2	n^3	n^4	...	2^n	3^n	$n!$
↑	↑	↑	↑	↑			↑		↑
binäre Suche	lineare Suche	schlaues Sortieren	dummes Sortieren	Gleichungs-system lösen			alle Teil-mengen		alle Permu-tationen

Annahme: 1 Schritt dauert 1 μs = 0.000001 s

$n =$	10	20	30	40	50	60
$log(n)$	2.3 μs	3.0 μs	4.9 μs	5.3 μs	5.6 μs	5.9 μs
n	10 μs	20 μs	30 μs	40 μs	50 μs	60 μs
$n \cdot log(n)$	23 μs	60 μs	147 μs	212 μs	280 μs	354 μs
n^2	100 μs	400 μs	900 μs	1.6 ms	2.5 ms	3.6 ms
n^3	1 ms	8 ms	27 ms	64 ms	125 ms	216 ms
2^n	1 ms	1 s	18 min	13 Tage	36 J	366 Jh
3^n	59 ms	58 min	6.5 J	3855 Jh	10^8 Jh	10^{13} Jh
$n!$	3.62 s	771 Jh	10^{16} Jh	10^{32} Jh	10^{49} Jh	10^{66} Jh

Für einen Algorithmus mit Laufzeit $O(2^n)$ gilt daher:

> Wächst n um 1, so wächst 2^n um den Faktor 2.
> Wächst n um 10, so wächst 2^n um den Faktor $2^{10} = 1024$.
> Ein 1000-mal schnellerer Computer kann eine um 10 Daten größere Eingabe in derselben Zeit bearbeiten.

Analoge Aussagen sind möglich bzgl. Speicherplatz.
Wir zählen nicht die Anzahl der Bytes, sondern betrachten das Wachstum des Platzbedarfs in Speicherplätzen in Abhängigkeit von der Größe der Eingabe.

Aussagen über *Laufzeit* und *Platzbedarf* beziehen sich auf

- *best case* günstigster Fall
- *worst case* ungünstigster Fall
- *average case* im Mittel

Analyse von `for`-Schleifen

Beispiel: Minimumsuche in einem Array der Länge n

```
min = a[0];
for (i = 1; i < n; i++){
       if(a[i] < min) min = a[i];
}
```

Laufzeit $O(n)$ für best case
worst case
average case.

Beispiele:

```
s = 0;
for (i = 0; i < k; i++) {
   for (j = 0; j < k; j++) {
      s = s + brett[i][j];
   }
}
```

k^2 Schritte für k^2 Daten
$\Rightarrow O(n)-$Algorithmus

```
int treffer=0;
for (i = 0, i < k-1; i++) {
   for (j = i+1; j < k; j++) {
      if (a[i] == a[j]) treffer++;
   }
}
```

$(k \cdot (k-1))/2$ Schritte für k Daten
$\Rightarrow O(n^2)-$Algorithmus

Analyse von `while`-Schleifen

Beispiel:

Lineare Suche im Array

```
i = 0;
while (i < n) && (a[i] != x) {
   i++;
}
```

Laufzeit:	best case	1 Schritt	$\Rightarrow$	$O(1)$
	worst case	n Schritte	$\Rightarrow$	$O(n)$
	average case	$\frac{n}{2}$ Schritte	$\Rightarrow$	$O(n)$

Annahme für den average case:
Es liegt Permutation der Zahlen von 1 bis n vor, darunter die gesuchte Zahl
Dann ist die mittlere Anzahl

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} i \quad \approx \quad \frac{n}{2}$$

Beispiel:

Suche 0 in einem Array, bestehend aus Nullen und Einsen.

Laufzeit:	best case	1 Schritt	$\Rightarrow$	$O(1)$
	worst case	n Schritte	$\Rightarrow$	$O(n)$
	average case	$\sum_{i=1}^{n} i \cdot \frac{1}{2^i} \leq 2$	$\Rightarrow$	$O(1)$

Obacht:

Alle Laufzeitangaben beziehen sich jeweils auf einen konkreten Algorithmus A (für ein Problem P) = *obere Schranke* für Problem P.

Eine Aussage darüber, wie viele Schritte jeder Algorithmus für ein Problem P mindestens durchlaufen muss, nennt man *untere Schranke* für Problem P.

Beispiel: naives Pattern-Matching

```
char[] s = new char[N];                                  // Zeichenkette
char[] p = new char[M];                                  // Pattern
```

Frage: Taucht Pattern p in Zeichenkette s auf?

```
boolean erfolg=false;
for (i = 0; i < N - M + 1 && !erfolg; i++) {             // Index in Zeichenkette
   for (j = 0; (j < M) && (p[j] == s[i+j]); j++);        // Index im Pattern
   if (j == M) erfolg=true;                              // Erfolg
}
```

Laufzeit best case: $O(1)$
Laufzeit worst case: $(N - M + 1) \cdot M$ Vergleiche für $s = AAA \ldots AB$
$p = A \ldots AB$

Sei n die Summe der Buchstaben in p und s. Sei $M = x \cdot n$ und $N = (1 - x) \cdot n$ für $0 < x < 1$.

Gesucht wird x, welches $((1 - x) \cdot n - x \cdot n + 1) \cdot x \cdot n = (n^2 + n) \cdot x - 2n^2 \cdot x^2$ maximiert.

Bilde 1. Ableitung nach x und setze auf 0: $0 = n^2 + n - 4n^2 \cdot x$

$\Rightarrow$ Maximum liegt bei $\frac{n^2+n}{4n^2} \approx \frac{1}{4}$

Also können $(\frac{3}{4}n - \frac{1}{4}n + 1) \cdot \frac{1}{4}n = \frac{1}{8}n^2 + \frac{1}{4}n$ Vergleiche entstehen.

$\Rightarrow$ Die Laufzeit im worst case beträgt $O(n^2)$.

Analyse eines rekursiven Programms

Beispiel:

Die Laufzeit von $fib(n)$ beträgt:

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{falls } n \leq 1 \\ f(n-1) + f(n-2) + 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Offenbar gilt: $f \in O(\alpha^n)$ für ein $\alpha < 2$ (denn $f(n) = f(n-1) + f(n-1)$ würde zu $O(2^n)$ führen).

Gesucht ist also ein α, so dass für große n gilt:

$$\alpha^n = \alpha^{n-1} + \alpha^{n-2} + 1$$

Teile durch α^{n-2}:

$\Rightarrow \alpha^2 = \alpha + 1 + \frac{1}{\alpha^{n-2}}$. Für $n \to \infty$ und $\alpha > 1$ geht $\frac{1}{\alpha^{n-2}} \to 0$.

$\Rightarrow \alpha^2 = \alpha + 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = 1.61803$ (gemäß Formel $-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$)

$\Rightarrow$ Das rekursive Fibonacci-Programm hat die Laufzeit $O(1.62^n)$, wobei n der Wert des Inputs ist, nicht seine Länge!

für $n = 20$ ist $1.62^n \approx 15.000$
$2^n \approx 1.000.000$.

6.2 Korrektheit und Terminierung

Durch *Testen* kann nachgewiesen werden, dass sich ein Programm für **endlich viele** Eingaben korrekt verhält. Durch eine *Verifikation* kann nachgewiesen werden, dass sich ein Programm für **alle** Eingaben korrekt verhält.

Bei der *Zusicherungsmethode* sind zwischen den Statements so genannte *Zusicherungen* eingestreut, die eine Aussage darstellen über die momentane Beziehung zwischen den Variablen.

Syntaktisch lassen sich diese Zusicherungen am einfachsten als Kommentare formulieren. Z.B.

// $i > 0 \wedge z = i^2$

Aus einer Zusicherung und der folgenden Anweisung lässt sich dann eine weitere Zusicherung ableiten:

```
i = i - 1;
```
// $i \geq 0 \ \wedge z = (i+1)^2$

Bei Schleifen wird die Zusicherung P, die vor Eintritt und vor Austritt gilt, die *Schleifeninvariante* genannt.

```
// P
while Q {
    // P ∧ Q
    ⋮
    ⋮
    // P
}
// P ∧ ¬Q
```

Beginnend mit einer ersten, offensichtlich richtigen Zusicherung, lässt sich als letzte Zusicherung eine Aussage über das berechnete Ergebnis ableiten = *partielle Korrektheit*.

Zusammen mit dem Nachweis der *Terminierung* ergibt sich die *totale Korrektheit*.

Beispiel für die Zusicherungsmethode:

```
int n, x, y, z;
do n = IO.readInt(); while (n < 0);
// n ≥ 0
x = 0; y = 1; z = 1;
// x² ≤ n ∧ z = (x+1)² ∧ y = 2x+1    = Schleifeninvariante P
while (z <= n) /* Q */ {
    // x² ≤ n ∧ z = (x+1)² ∧ y = 2x+1 ∧ z ≤ n
    // (x+1)² ≤ n ∧ z = (x+1)² ∧ y = 2x+1
    x = x + 1;
    // x² ≤ n ∧ z = x² ∧ y = 2x-1
    y = y + 2;
    // x² ≤ n ∧ z = x² ∧ y = 2x+1
    z = z + y;
    // x² ≤ n ∧ z = x²+2x+1 ∧ y = 2x+1
    // x² ≤ n ∧ z = (x+1)² ∧ y = 2x+1    = Schleifeninvariante P
}
// x² ≤ n ∧ z = (x+1)² ∧ y = 2x+1 ∧ z > n    = P ∧ ¬Q
// x² ≤ n < (x+1)²
// x = ⌊√n⌋
IO.println (x);
// Ausgabe: ⌊√n⌋
```

Terminierung

Da y immer positiv ist und z immer um y erhöht wird und n fest bleibt, muß irgendwann gelten $z > n$

$\Rightarrow$ Abbruch gesichert

$\Rightarrow$ totale Korrektheit.

Laufzeit

In jedem Schleifendurchlauf wird x um eins erhöht.

Da x bei 0 beginnt und bei $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ endet, wird der Schleifenrumpf $\sqrt{n}$ mal durchlaufen. Der Schleifenrumpf selbst hat eine konstante Anzahl von Schritten.

$\Rightarrow$ Laufzeit $O(n^{\frac{1}{2}})$, wobei n der Wert der Eingabezahl ist!

Weiteres Beispiel für die Zusicherungsmethode:

```
int n, x, y, z;
do { n = IO.readInt(); } while (n < 0);
// n ≥ 0
x = 2; y = n; z = 1;
// z · x^y = 2^n ∧ y ≥ 0
while (y > 0) {
   // z · x^y = 2^n ∧ y > 0
   if (y % 2 == 1) {
      // z · x^y = 2^n ∧ y > 0 ∧ y ungerade
      z = z * x;
      // z/x · x^y = 2^n ∧ y > 0 ∧ y ungerade
      y = y - 1;
      // z/x · x^(y+1) = 2^n ∧ y ≥ 0
      // z · x^y = 2^n ∧ y ≥ 0
   } else {
      // z · x^y = 2^n ∧ y > 0 ∧ y gerade
      x = x * x;
      // z · (x^(1/2))^y = 2^n ∧ y > 0 ∧ y gerade
      y = y/2;
      // z · (x^(1/2))^(2y) = 2^n ∧ y ≥ 0
      // z · x^y = 2^n ∧ y ≥ 0
   }
   // z · x^y = 2^n ∧ y ≥ 0
}
// z · x^y = 2^n ∧ y ≥ 0 ∧ y ≤ 0
// z · x^y = 2^n ∧ y = 0 ⇒ z = 2^n
IO.println (z);
// Ausgabe: 2^n
```

Terminierung

In jedem Schleifendurchlauf wird y kleiner $\Rightarrow$ irgendwann einmal Null $\Rightarrow$ Abbruch.

Laufzeit

Die Dualzahldarstellung von y schrumpft spätestens nach 2 Schleifendurchläufen um eine Stelle

$\Rightarrow$ $O(\log n)$ Durchläufe, wobei n der Wert der Eingabezahl ist, d.h. $O(n)$, wenn n die Länge der Dualdarstellung der Eingabe ist.

Hinweis: Der naive Ansatz

```
n = IO.readInt("n = "); z = 1;
for (i = 0; i < n; i++) z = 2*z;
```

hat Laufzeit $O(n)$, wenn n der Wert der Eingabezahl ist, d.h. $O(2^k)$, wenn k die Länge der Dualdarstellung von n ist.

6.3 Halteproblem

Beh.: Es gibt kein Programm, welches entscheidet, ob ein gegebenes Programm, angesetzt auf einen gegebenen Input, anhält.

Beweis durch Widerspruch

Annahme: Es gibt eine Methode `haltetest` in der Klasse `Fee`:

```
public class Fee {
  public static boolean haltetest (char[]s, char[]t) {
  // liefert true, falls das durch die Zeichenkette s dargestellte
  // Java-Programm bei den durch die Zeichenkette t dargestellten
  // Eingabedaten anhaelt;
  // liefert false, sonst
  }
}
```

Dann lässt sich folgendes Java-Programm in der Datei `Quer.java` konstruieren:

```
import AlgoTools.IO;
public class Quer {
    public static void main(String[] argv) {
        char[] s = IO.readChars();
        if (Fee.haltetest(s,s)) while (true);
    }
}
```

Sei q der String, der in der Datei `Quer.java` steht.

Was passiert, wenn das Programm `Quer.class` auf den String q angesetzt wird ? D.h.

```
java Quer < Quer.java
```

1. Fall:	Hält an	$\Rightarrow$	`haltetest(`q`,`q`) == false`
		$\Rightarrow$	`Quer` angesetzt auf q hält nicht!
2. Fall:	Hält nicht	$\Rightarrow$	`haltetest(`q`,`q`) == true`
		$\Rightarrow$	`Quer` angesetzt auf q hält an!

$\Rightarrow$ Also kann es die Methode `haltetest` nicht geben!

Kapitel 7

Sortieren

In diesem Kapitel werden zahlreiche Algorithmen zum Sortieren vorgestellt. Die Verfahren eignen sich gut, um grundsätzliche Programmierstrategien wie *Greedy*, *Divide & Conquer* und Rekursion zu behandeln. Eine *Greedy*-Strategie versucht durch *gieriges* Vorgehen das jeweils kurzfristig bestmögliche zu erreichen. Bei *Divide & Conquer* wird zunächst das gegebene Problem in Teilprobleme zerlegt, dann deren Lösungen errechnet und diese dann anschließend zur Gesamtlösung zusammengeführt. Rekursive Verfahren lösen die ursprüngliche Aufgabenstellung auf einer reduzierten Problemgröße mit demselben Lösungsansatz und konstruieren aus dieser Teillösung die Gesamtlösung.

Motivation für Sortieren:

1. Häufiges Suchen
   Einmal sortieren, dann jeweils $\log n$ Aufwand.
2. Tritt ein Element in zwei Listen L_1, L_2 auf?
   Sortiere $L_1 \cdot L_2$, dann nach Doppelten suchen!

7.1 SelectionSort

"Hole jeweils das kleinste Element nach vorne"

```
public class SelectionSort {                    // Klasse SelectionSort

  public static void sort(int[] a) {            // statische Methode sort

    int i, j, pos, min;                         // 2 Indizes, Position, Minimum

    for (i=0; i<a.length-1; i++) {              // durchlaufe Array
        pos = i;                                // Index des bisher kleinsten
        min = a[i];                             // Wert des bisher kleinsten
        for (j=i+1; j<a.length; j++)            // durchlaufe Rest des Array
            if (a[j] < min) {                   // falls kleineres gefunden,
                pos = j;                        // merke Position des kleinsten
                min = a[j];                     // merke Wert des kleinsten
            }
        a[pos] = a[i];                          // speichere bisher kleinstes um
        a[i]   = min;                           // neues kleinstes nach vorne
    }
  }
}
```

Beispiel:

```
4 9 3 2 5
2 9 3 4 5
2 3 9 4 5
2 3 4 9 5
2 3 4 5 9
```

Analyse für *SelectionSort*

Worst case und *best case*:
Zwei ineinander geschachtelte `for`-Schleifen

$$n-1+n-2+n-3+\ldots+1$$

$$=\sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} = O(n^2)$$

Platzbedarf: $O(n)$
zusätzlich zu den Daten: $O(1)$

Der Algorithmus wird nicht schneller, wenn die Zahlen bereits sortiert sind!

7.2 Bubblesort

Sortieren mit *BubbleSort* = Blasen steigen auf

"Vertausche jeweils unsortierte Nachbarn"

```
4 9 3 2 5
  3 9
    2 9
4 3 2 5 9
3 4
  2 4
3 2 4 5 9
```

⋮

```
public class BubbleSort {                       // Klasse BubbleSort

  public static void sort(int[] a) {            // statische Methode sort
    int tmp;                                    // Hilfsvariable zum Tauschen
    boolean getauscht;                          // merkt sich, ob getauscht
    do {
        getauscht = false;                      // nimm an, dass nicht getauscht
        for (int i=0; i<a.length-1; i++){       // durchlaufe Array
            if (a[i] > a[i+1]) {                // falls Nachbarn falsch herum
                tmp = a[i];                     // bringe
                a[i] = a[i+1];                  // beide Elemente
                a[i+1] = tmp;                   // in die richtige Ordnung
                getauscht = true;               // vermerke, dass getauscht
            }
        }
    } while (getauscht);                        // solange getauscht wurde
  }
}
```

Analyse von *BubbleSort*

Best case: $O(n)$
Worst case: $O(n^2)$

> Die kleinste Zahl wandert in der `for`-Schleife jeweils um eine Position nach links.
> Wenn sie zu Beginn ganz rechts steht, so sind $n-1$ Phasen nötig.

Average case: $O(n^2)$

Weitere Verbesserungen möglich (*ShakerSort*), aber es bleibt bei $O(n^2)$
Grund: Austauschpositionen liegen zu nahe beieinander.

7.3 MergeSort

Idee (rekursiv formuliert):

- Sortiere die vordere Hälfte der Folge
- Sortiere die hintere Hälfte der Folge
- Mische die beiden sortierten Folgen zu einer sortierten Folge

Bemerkung: Diese Vorgehensweise wird *Divide & Conquer* (Teile und Beherrsche) genannt, da das ursprüngliche Problem zunächst in unabhängige Teilprobleme zerlegt wird und danach die Teillösungen wieder zusammengeführt werden.
Die Hilfsroutine zum Mischen lautet:

```
public class Merge {                                // Klasse Merge

  public static int[] merge (int[]a, int[]b) {    // mischt a und b
                                                    // liefert Ergebnis zurueck

    int i=0, j=0, k=0;                              // Laufindizes
    int[] c = new int[a.length + b.length];         // Platz fuer Folge c besorgen

    while ((i<a.length) && (j<b.length)) {          // mischen, bis ein Array leer
      if (a[i] < b[j])                              // jeweils das kleinere Element
          c[k++] = a[i++];                          // wird nach c uebernommen
      else
          c[k++] = b[j++];
    }

    while (i<a.length) c[k++] = a[i++];             // ggf.: Rest von Folge a
    while (j<b.length) c[k++] = b[j++];             // ggf.: Rest von Folge b

    return c;                                       // Ergebnis abliefern
  }
}
```

Analyse von *MergeSort* (und ähnlich gelagerten Rekursionen)

$$f(n) \leq \begin{cases} c_1 & \text{für } n = 1 \\ 2 \cdot f(\frac{n}{2}) + c_2 \cdot n & \text{sonst} \end{cases}$$

Beh.: $f \in O(n \cdot \log n)$
Zeige: $f(n) \leq (c_1 + c_2) \cdot n \cdot \log n + c_1$

Verankerung:

$n = 1 \Rightarrow \quad f(1) \leq c_1$ nach Rekursion
$f(1) \leq (c_1 + c_2) \cdot 1 \cdot \log 1 + c_1$

Induktionsschluss

Sei bis $n - 1$ bewiesen

$$\begin{aligned} f(n) &\leq 2 \cdot f(\tfrac{n}{2}) + c_2 \cdot n \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \text{Rek.} \\ &\leq 2 \cdot [(c_1 + c_2) \cdot \tfrac{n}{2} \cdot \log \tfrac{n}{2} + c_1] + c_2 \cdot n \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \text{Induktionsannahme} \\ &= 2 \cdot [(c_1 + c_2) \cdot \tfrac{n}{2} \cdot (\log n - 1) + c_1] + c_2 \cdot n \\ &= (c_1 + c_2)n \cdot \log n - (c_1 + c_2) \cdot n + 2c_1 + c_2 \cdot n \\ &= [(c_1 + c_2)n \cdot \log n + c_1] + [c_1 - c_1 \cdot n] \\ &\leq (c_1 + c_2)n \cdot \log n + c_1 \end{aligned}$$

Aber: *MergeSort* benötigt $O(n)$ zusätzlichen Platz!

Iterative Version von *MergeSort* (für $n = 2^k$)

```
l = 1; /* Länge der sortierten Teilfolgen */
k = n; /* Anzahl der sortierten Teilfolgen */
while (k > 1) {
   /* alle Teilfolgen der Länge l sind sortiert */
   /* Sie beginnen bei l · i für i = 0, 1, ..., k − 1 */
   Mische je zwei benachbarte Teilfolgen der Länge l
   zu einer Teilfolge der Länge 2 * l;
   l = l*2; k = k/2;
   /* Alle Teilfolgen der Länge l sind sortiert */
   /* Sie beginnen bei l · i für i = 0, 1, ..., k − 1 */
}
```

Es ergeben sich $\log n$ Phasen mit jeweils linearem Aufwand.

$\Rightarrow O(n \cdot \log n)$

```
/*************************  SortTest.java  ********************************/

import AlgoTools.IO;

/** testet Sortierverfahren
 */

public class SortTest {

  public static void main (String [] argv) {

    int[] a, b, c;                                        // Folgen a, b und c

    a = IO.readInts("Bitte eine Zahlenfolge:      ");   // Folge einlesen
    SelectionSort.sort(a);                                // SelectionSort aufr.
    IO.print("sortiert mit SelectionSort: ");
    for (int i=0; i<a.length; i++) IO.print(" "+a[i]);  // Ergebnis ausgeben
    IO.println();
    IO.println();

    b = IO.readInts("Bitte eine Zahlenfolge:      ");   // Folge einlesen
    BubbleSort.sort(b);                                   // BubbleSort aufrufen
    IO.print("sortiert mit BubbleSort:    ");
    for (int i=0; i<b.length; i++) IO.print(" "+b[i]);  // Ergebnis ausgeben
    IO.println();
    IO.println();

    c = Merge.merge(a,b);                                 // mische beide Folgen
    IO.print("sortierte Folgen gemischt:  ");
    for (int i=0; i<c.length; i++) IO.print(" "+c[i]);  // Ergebnis ausgeben
    IO.println();
  }
}
```

7.4 QuickSort

```
import AlgoTools.IO;

/*************************  QuickSort.java  *********************************/

/** rekursives Sortieren mit Quicksort
 *  Idee: partitioniere die Folge
 *  in eine elementweise kleinere und eine elementweise groessere Haelfte
 *  und sortiere diese nach demselben Verfahren
 */

public class QuickSort {

  public static void sort (int[] a) {             // oeffentliche Methode
    quicksort(a, 0, a.length-1);                  // startet private Methode
  }

  private static void quicksort (int[] a, int unten, int oben) {
    int tmp ;                                     // Hilfsvariable
    int i = unten;                                // untere Intervallgrenze
    int j = oben;                                 // obere Intervallgrenze
    int mitte = (unten + oben) / 2;               // mittlere Position
    int x = a[mitte];                             // Pivotelement

    do {
        while (a[i] < x) i++;                     // x fungiert als Bremse
        while (a[j] > x) j--;                     // x fungiert als Bremse
            if (i <= j)  {
            tmp  = a[i];                          // Hilfsspeicher
            a[i] = a[j];                          // a[i] und
            a[j] = tmp;                           // a[j] werden getauscht
            i++;
            j--;
        }
    } while (i <= j);
                         // alle Elemente der linken Array-Haelfte sind kleiner
                         // als alle Elemente der rechten Array-Haelfte

    if (unten < j)  quicksort(a, unten, j);       // sortiere linke Haelfte
    if (i < oben )  quicksort(a, i, oben);        // sortiere rechte Haelfte
  }
}
```

Die Analyse der Laufzeit von Quicksort stützt sich auf folgende Rekursionsungleichung für die Anzahl der Schritte $f(n)$ bei n zu sortierenden Daten im günstigsten Fall (Partitionen immer gleich groß):

$$f(n) \leq \begin{cases} c_1 & \text{für } n = 1 \\ c_2 \cdot n + 2 \cdot f(\frac{n}{2}) & \text{sonst} \end{cases}$$

Daraus ergibt sich $f \in O(n \cdot \log n)$. Diese Komplexität gilt auch für den durchschnittlichen Fall; es lässt sich zeigen, dass die Zahl der Schritte nur um den konstanten Faktor 1.4 wächst.

Im ungünstigsten Fall (bei entarteten Partitionen) gilt $f \in O(n^2)$.

```
/************************  QuickSortTest.java  ***************************/

import AlgoTools.IO;

/** testet Quicksort
 */

public class QuickSortTest {

  public static void main (String [] argv) {

    int[] a;                                              // Folge a

    a = IO.readInts("Bitte eine Zahlenfolge: ");          // Folge einlesen
    QuickSort.sort(a);                                    // QuickSort aufrufen
    IO.print("sortiert mit QuickSort:");
    for (int i=0; i<a.length; i++) IO.print(" "+a[i]);    // Ergebnis ausgeben
    IO.println();
  }
}
```

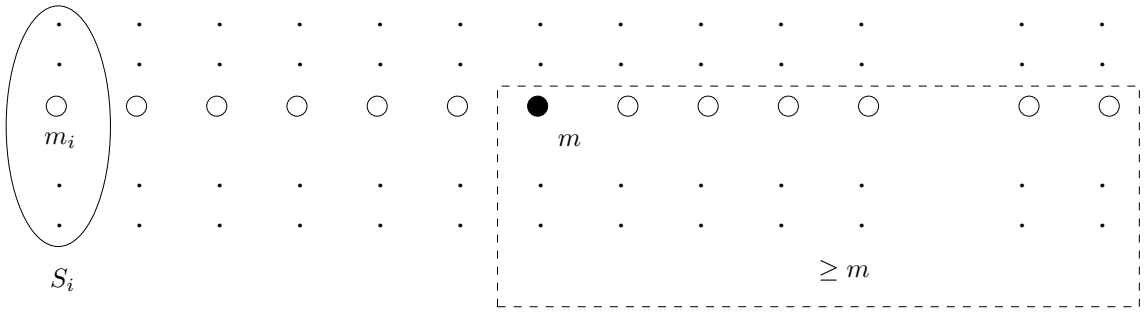
7.5 Bestimmung des Medians

```
public static int select (int[] S, int k) {
```
/⋆ Liefert aus dem Feld S das k-t kleinste Element. ⋆/

```
   int[] A, B, C;


   int n = |S|;
   if (n < 50) return k-t kleinstes Element per Hand;
   else {
      zerlege S in Gruppen zu je 5 Elementen S_1, S_2, ..., S_{n/5};
      Bestimme in jeder Gruppe S_i den Median m_i;
      Bestimme den Median der Mediane:
         m = select (⋃_i m_i, n/10);
      A = {x ∈ S | x < m};
      B = {x ∈ S | x == m};
      C = {x ∈ S | x > m};
      if (|A| >= k) return select (A, k);
      if (|A|+|B| >= k) return m;
      if (|A|+|B|+|C| >= k) return select(C, k-|A|-|B|);
   }
}
```

Beh.: $|A| \leq \frac{3}{4}n$



d.h. mind. $\frac{1}{4}$ der Elemente von S ist $\geq m$

$\Rightarrow$ höchstens $\frac{3}{4}$ der Elemente von S ist $< m$

$\Rightarrow |A| \leq \frac{3}{4}n$, analog $|C| \leq \frac{3}{4}n$.

Sei $f(n)$ die Anzahl der Schritte, die die Methode `select` benötigt für eine Menge S der Kardinalität n.

Also:

$$f(n) \leq \begin{cases} c & \text{, für } n < 50 \\ \underbrace{c \cdot n}_{\substack{\text{Mediane} \\ \text{der 5er Gruppen}}} + \underbrace{f(\frac{n}{5})}_{\substack{\text{Median} \\ \text{der Mediane}}} + \underbrace{f(\frac{3}{4}n)}_{\substack{\text{Aufruf mit} \\ \text{A oder C}}} & \text{, sonst} \end{cases}$$

Beh.: $f \in O(n)$

Zeige: $f(n) \leq 20 \cdot c \cdot n$

Beweis durch Induktion:

$f(n) \leq c \leq 20 \cdot c \cdot n$ für $n < 50$

Sei bis $n-1$ bewiesen

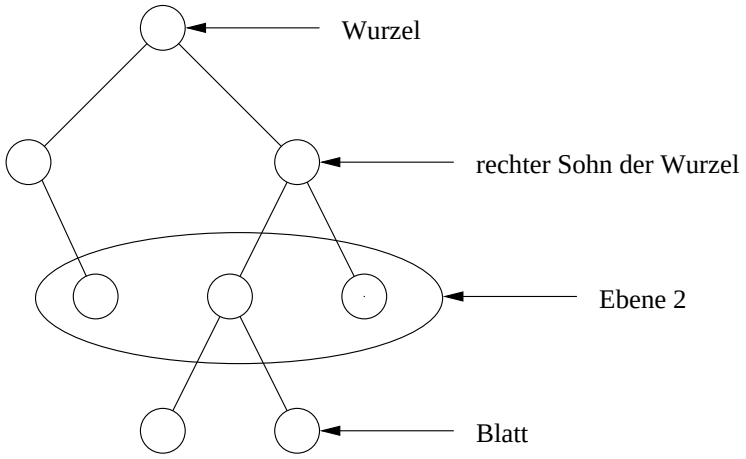
$$\begin{array}{lcccccl} f(n) & \leq & c \cdot n & + & f(\frac{n}{5}) & + & f(\frac{3}{4}n) \\ & \uparrow & & & & & \\ & \text{Rekursionsgl.} & & & & & \\ & \leq & c \cdot n & + & 20 \cdot c \cdot \frac{n}{5} & + & 20 \cdot c \cdot \frac{3}{4} \cdot n \\ & \uparrow & & & & & \\ & \text{Ind.-Annahme} & & & & & \\ & = & 1 \cdot c \cdot n & + & 4 \cdot c \cdot n & + & 15 \cdot c \cdot n \\ & = & 20 \cdot c \cdot n & & & & \text{q.e.d.} \end{array}$$

7.6 HeapSort

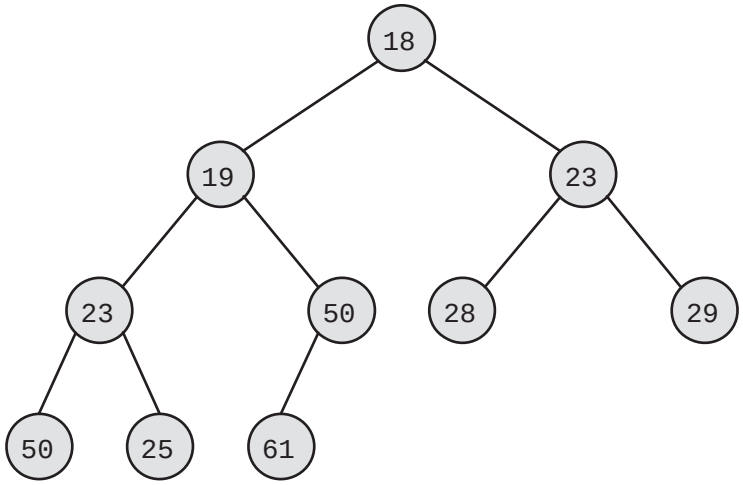
Baum und Heap

Def.: Ein *binärer Baum* ist entweder leer oder besteht aus einem Knoten, dem zwei binäre Bäume zugeordnet sind. Dieser heißt dann *Vater* des linken bzw. rechten Teilbaums. Ein Knoten ohne Vater heißt *Wurzel*. Die Knoten, die x zum Vater haben, sind seine *Söhne*. Knoten ohne Söhne heißen *Blätter*.

Ebene $0 =$ Wurzel. Ebene $i + 1 =$ Söhne von Ebene i.



Def.: Ein *Heap* ist ein binärer Baum mit h Ebenen, in dem die Ebenen $0, 1, \ldots, h-2$ vollständig besetzt sind; die letzte Ebene $h-1$ ist von links beginnend bis zum so genannten letzten Knoten vollständig besetzt. Die Knoten enthalten Schlüssel. Der Schlüssel eines Knotens ist kleiner oder gleich den Schlüsseln seiner Söhne.



Offenbar steht der kleinste Schlüssel eines Heaps in der Wurzel.

Idee für *HeapSort*:

Verwendet wird ein Heap als Datenstruktur, die das Entfernen des Minimums unterstützt.

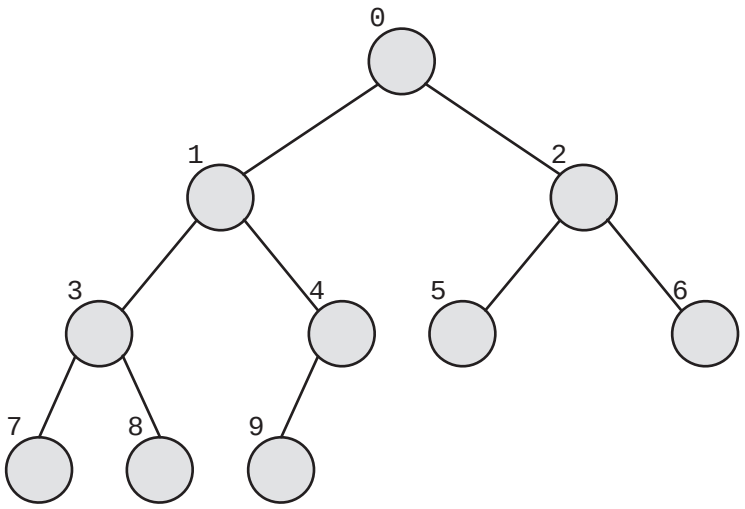
Gegeben seien die Schlüssel $a_0, \ldots, a_{n-1}$ im Array a.

```
Baue einen Heap mit den Werten aus a;
for (i=0; i<n; i++) {
  liefere Minimum aus der Wurzel;
  entferne Wurzel;
  reorganisiere Heap;
}
```

Idee für Wurzelentfernen:

Entferne "letzten" Knoten im Heap und schreibe seinen Schlüssel in die Wurzel.
Vertausche so lange Knoten mit "kleinerem" Sohn, bis Heapbeziehung eintritt.

Idee für Implementation: Die Knoten werden wie folgt nummeriert:
Wurzel erhält Nr. 0,
linker Sohn von Knoten i erhält die Nr. $(2 \cdot i + 1)$
rechter Sohn von Knoten i erhält die Nr. $(2 \cdot i + 2)$



Im Array

```
int[] a = new int [n];
```

steht in `a[i]` der Schlüssel von Knoten i.

Vorteil: Die Vater/Sohn-Beziehung ist allein aus dem Knotenindex zu berechnen.
$2i + 1$ bzw. $2i + 2$ heißen die Söhne von i
$(i - 1)/2$ heißt der Vater von i.

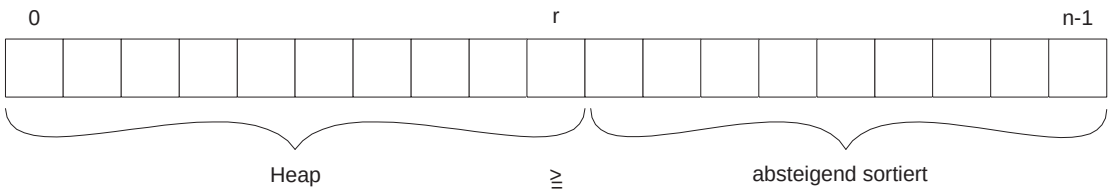
```
/*************************  HeapSort.java  *********************************/
import AlgoTools.IO;

/** Iteratives Sortieren mit Heapsort
 *  Entnimm einem Heap so lange das kleinste Element, bis er leer ist.
 *  Die entnommenen Elemente werden im selben Array gespeichert.
 */

public class HeapSort {

  private static void sift (int[] a, int l, int r) { // repariere Array a
                                                     // in den Grenzen von l bis r
    int i, j;                                        // Indizes
    int x;                                           // Array-Element
    i = l; x = a[l];                                 // i und x initialisieren
    j = 2 * i + 1;                                   // linker Sohn
    if ((j < r) && (a[j + 1] < a[j])) j++;           // jetzt ist j der kleinere Sohn
    while ((j <= r) && (a[j] < x)) {                 // falls kleinerer Sohn existiert
        a[i] = a[j];
        i    = j;
        j    = 2 * i + 1;
        if ((j < r) && (a[j + 1] < a[j])) j++; // jetzt ist j der kleinere Sohn
    }
    a[i] = x;
  }

  public static void sort (int[] a) {          // statische Methode sort
    int l, r, n, tmp;                          // links, rechts, Anzahl, tmp
    n = a.length;                              // Zahl der Heap-Eintraege
    for (l = (n - 2) / 2; l >= 0; l--)         // beginnend beim letzten Vater
        sift(a, l, n - 1);                     // jeweils Heap reparieren
    for (r = n - 1; r > 0; r--) {              // rechte Grenze fallen lassen
        tmp  = a[0];                           // kleinstes Element holen
        a[0] = a[r];                           // letztes nach vorne
        a[r] = tmp;                            // kleinstes nach hinten
        sift(a, 0, r-1);                       // Heap korrigieren
    }
  }
}
```



Aufwand für die Konstruktion eines Heaps

Sei h die Höhe eines Heaps. Sei $n \leq 2^h - 1$ die Anzahl seiner Elemente. Z.B. Ein Heap mit $h = 4$ Ebenen kann maximal $n = 2^4 - 1 = 15$ Knoten haben.

Ebene	Sickertiefe	Anzahl der Knoten dieser Ebene
0	h	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$h-3$	3	$\frac{n}{8}$
$h-2$	2	$\frac{n}{4}$
$h-1$	1	$\frac{n}{2}$

Anzahl der Schritte, beginnend bei vorletzter Ebene ($h-2$), endend bei Ebene 0:

$$\sum_{i=2}^{h} c \cdot i \cdot \frac{n}{2^i} = c \cdot n \cdot \sum_{i=2}^{h} \frac{i}{2^i}$$

$\Rightarrow$ Aufwand $O(n)$, denn: $\frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \ldots \quad < 1.5$

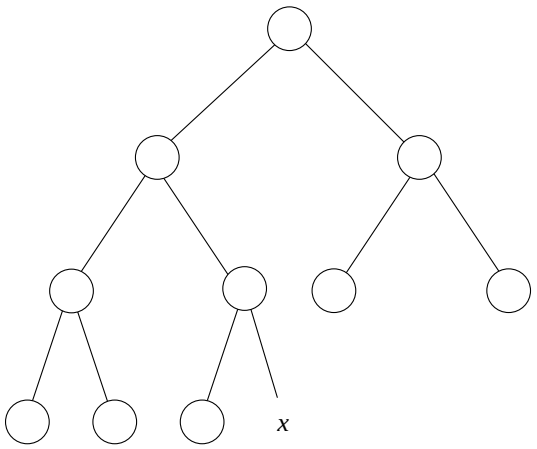
Aufwand für einmaliges Minimumentfernen: $O(\log n)$
Gesamtaufwand: $O(n) + O(n \cdot \log n) = O(n \cdot \log n)$ für best, average und worst case.

Weitere Einsatzmöglichkeit des Heaps

Verwende eine dynamisch sich ändernde Menge von Schlüsseln mit den Operationen

- `initheap` legt leeren Heap an
- `get_min` liefert das momentan Kleinste
- `del_min` entfernt das momentan Kleinste
- `insert(x)` fügt x hinzu
- `heapempty` testet, ob Heap leer ist

Idee für Einfügen: Füge neues Blatt mit Schlüssel x an, und lasse x hochsickern.



Aufwand: $O(\log n)$

7.7 Zusammenfassung von Laufzeit und Platzbedarf

	Best	Average	Worst	zusätzlicher Platz
SelectionSort	$O(n^2)$	$O(n^2)$	$O(n^2)$	$O(1)$
BubbleSort	$O(n)$	$O(n^2)$	$O(n^2)$	$O(1)$
MergeSort	$O(n \cdot log\ n)$	$O(n \cdot log\ n)$	$O(n \cdot log\ n)$	$O(n)$
QuickSort	$O(n \cdot log\ n)$	$O(n \cdot log\ n)$	$O(n^2)$	$O(log\ n)$
HeapSort	$O(n \cdot log\ n)$	$O(n \cdot log\ n)$	$O(n \cdot log\ n)$	$O(1)$

Der lineare zusätzliche Platzbedarf beim Mergesort-Algorithmus wird verursacht durch die Methode `merge`, welche für das Mischen zweier sortierter Folgen ein Hilfs-Array derselben Größe benötigt.

Der logarithmische zusätzliche Platzbedarf beim Quicksort-Algorithmus wird verursacht durch das Zwischenspeichern der Intervallgrenzen für die noch zu sortierenden Array-Abschnitte, die jeweils nach dem Aufteilen anhand des Pivot-Elements entstehen.

Beispiel:

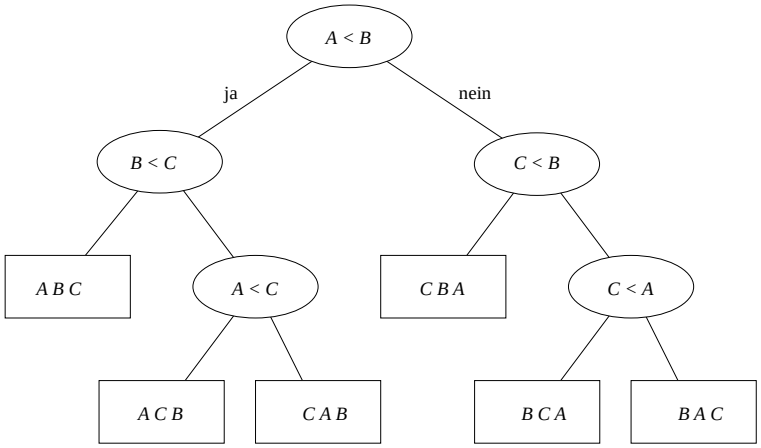
Sei ein Array gegeben mit insgesamt 16 Daten. Der initiale Aufruf von Quicksort wird versorgt mit den Arraygrenzen `[0,15]`. Folgende Sequenz von gespeicherten Intervallgrenzen entsteht:

```
[0,15]
[0,7][8,15]
[0,7][8,11][12,15]
[0,7][8,11][12,13][14,15]
[0,7][8,11][12,13]
[0,7][8,11]
[0,7][8,9][10,11]
[0,7][8,9]
[0,7]
[0,3][4,7]
[0,3][4,5][6,7]
[0,3][4,5]
[0,1][2,3]
[0,1]
```

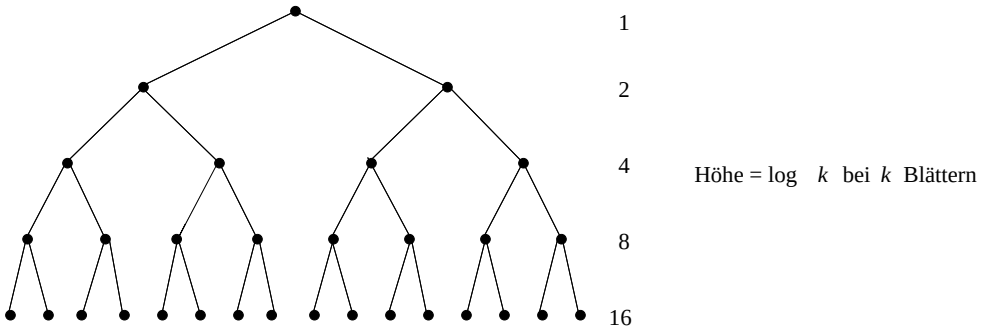
Die maximale Ausdehung liegt bei einer Folge von jeweils halbierten Intervallgrenzen; davon gibt es logarithmisch viele.

7.8 Untere Schranke für Sortieren durch Vergleichen

Entscheidungsbaum zur Sortierung von 3 Elementen:
gegeben A, B, C



Der Entscheidungsbaum zur Sortierung von n Elementen hat $n!$ Blätter.



$$n! \geq n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot \frac{n}{2} \geq \left(\left(\frac{n}{2} \right)^{\frac{n}{2}} \right)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \log n! &\geq \log \left(\left(\frac{n}{2} \right)^{\frac{n}{2}} \right) = \frac{n}{2} \cdot \log \left(\frac{n}{2} \right) = \frac{n}{2} (\log n - 1) \\ &= \frac{n}{2} \cdot \log n - \frac{n}{2} = \frac{n}{4} \cdot \log n + \frac{n}{4} \cdot \log n - \frac{n}{2} \\ &\geq \frac{n}{4} \cdot \log n \text{ für } n \geq 4 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Ein binärer Baum mit $n!$ Blättern hat mindestens die Höhe $\frac{n}{4} \cdot \log n$.

$\Rightarrow$ Jeder Sortieralgorithmus, der auf Vergleichen beruht, hat als Laufzeit mindestens $O(n \cdot \log n)$. Dies ist eine untere Schranke.

7.9 BucketSort

Es folgt ein Sortierverfahren, welches ohne Vergleichen arbeitet und daher die Voraussetzungen für die Ableitung der untere Schranke $O(n \cdot logn)$ nicht erfüllt und sie daher unterbieten kann. *BucketSort* sortiert einen endlichen, zuvor bekannten Schlüsselbereich durch Verteilen auf Buckets. Eine Erweiterung dieser Idee für das Sortieren von Strings führt zum Sortierverfahren *RadixSort*, welches hier nicht behandelt wird.

```
/*************************  BucketSort.java  *******************************/

import AlgoTools.IO;

/** Sortieren durch Verteilen auf Buckets (Faecher).
 *  Idee: 1.) Zaehlen der Haeufigkeiten b[i] einzelner Schluessel i;
 *        2.) Buckets durchlaufen und i-ten Schluessel b[i]-mal ausgeben.
 */

public class BucketSort {

  private static final int N = 256;             // Alphabetgroesse N

  public static void sort (char[] a) {          // sortiere Character-Array a

    int[] b = new int[N];                       // N Buckets
    int i, j, k;                                // Laufvariablen

    for (i=0; i < N; i++) b[i] = 0;             // setze alle Buckets auf 0

    for (i=0; i < a.length; i++)                // fuer jedes Eingabezeichen
        b[a[i]]++;                              // zustaendiges Bucket erhoehen

    k = 0;
    for (i=0; i < N; i++)                       // fuer jedes Bucket
        for (j=0; j < b[i]; j++)                // gemaess Zaehlerstand
            a[k++] = (char) i;                  // sein Zeichen uebernehmen

  }

  public static void main (String [] argv) {

    char[] zeile;                                // Zeichenfolgen

    zeile = IO.readChars("Bitte Zeichenkette:       "); // Zeichenkette einlesen
    sort(zeile);                                     // Bucket-Sort aufrufen
    IO.print("sortiert mit Bucket-Sort: ");          // Ergebnis ausgeben
    IO.println(zeile);
  }
}
// Aufwand: O(n) + O(N)   bei n(=a.length) zu sortierenden Zeichen
//                        aus einem N-elementigen Alphabet
```

Kapitel 8

Objektorientierte Programmierung

Die Modellierung eines Ausschnittes der realen Welt geschieht durch eine Klassenhierarchie, d.h., gleichartige Objekte werden zu Klassen zusammengefasst, von denen durch Vererbung Spezialisierungen abgeleitet werden. Gleichartigkeit bedeutet die Übereinstimmung von objektbezogenen Datenfeldern und objektbezogenen Methoden. Eine abgeleitete Klasse erbt von der Oberklasse die dort definierten Datenfelder und Methoden, fügt ggf. eigene hinzu und kann ihnen ggf. durch Überschreiben eine neue Bedeutung geben.

Objekte werden durch Konstruktoren erzeugt. Jede Klasse besitzt einen oder mehrere Konstruktoren, die für das Instanziieren ihrer Objekte zuständig sind. Wird kein eigener Konstruktor definiert, existiert automatisch der vom System bereitgestellte Default-Konstruktor (ohne Parameter).

8.1 Sichtbarkeit von Datenfeldern

Datenfelder, die mit dem Schlüsselwort `static` deklariert werden, heißen *Klassenvariable*. Sie existieren pro Klasse genau einmal (unabhängig von der Zahl der kreierten Instanzen) und alle Objekte dieser Klasse können auf sie zugreifen.

Ein Datenfeld, welches ohne das Schlüsselwort `static` deklariert wird, ist eine sogenannte Instanzvariable. Eine Instanzvariable existiert je Instanz (also je Objekt) genau einmal und kann entsprechend für jede Instanz einen anderen Wert annehmen. Eine Instanzvariable stellt sozusagen eine Eigenschaft eines Objektes dar.

Hinweis: Variablen, die innerhalb einer Methode deklariert werden, bezeichnet man als *lokale Variablen*.

Die Sichtbarkeit von (Instanz- und Klassen-) Variablen und Methoden wird mit Hilfe von Modifiern geregelt. Ist ein Element einer Klasse mit keinem der Schlüsselworte `public`, `private` oder `protected` deklariert, dann ist es nur innerhalb von Klassen desselben Pakets sichtbar.

Unter einem Paket versteht man alle Klassen, die in einem bestimmten Verzeichnis liegen. Sinnvollerweise werden logisch zueinander gehörige Klassen in ein Verzeichnis gepackt. Diese Verzeichnisse werden wiederum logisch zusammengehörig in weitere Verzeichnisse geschachtelt, so dass eine ganze Verzeichnisstruktur entsteht. Nach Java-Konvention sollten die Paketnamen (und damit die Verzeichnisse) immer klein geschrieben sein.

Das Standardpaket besteht aus allen Klassen im aktuellen Arbeitsverzeichnis. Eigene Pakete können beispielsweise angelegt werden, indem man

```
package a.b.c;
```

am Anfang einer Klasse schreibt und diese Klasse auch in dem angegebenen Pfad `a/b/c` ablegt. Eine so definierte Klasse kann nach dem Übersetzen durch

```
java a.b.c.MeineKlasse
```

aufgerufen werden, wobei der Aufrufer sich in dem Verzeichnis befindet, welches das Verzeichnis `a` enthält.

Die Klasse `MeineKlasse` kann von anderen Klassen durch

```
import a.b.c.MeineKlasse;
```

importiert werden.

Die folgende Tabelle zeigt die Umstände, unter denen Klassenelemente der vier Sichtbarkeitstypen für verschiedene Klassen erreichbar sind.

Erreichbar für:	`public`	`protected`	paketsichtbar	`private`
Dieselbe Klasse	ja	ja	ja	ja
andere Klasse im selben Paket	ja	ja	ja	nein
Subklasse in anderem Paket	ja	ja	nein	nein
Keine Subklasse, anderes Paket	ja	nein	nein	nein

- Elemente des Typs `public` sind in der Klasse selbst, in Methoden abgeleiteter Klassen und für den Aufrufer von Instanzen der Klasse sichtbar.
- Elemente des Typs `protected` sind in der Klasse selbst und in Methoden abgeleiteter Klassen sichtbar. Der Aufrufer einer Instanz der Klasse hat nur Zugriff, wenn er in demselben Paket definiert wurde.
- Elemente vom Typ `private` sind nur in der Klasse selbst sichtbar.
- Elemente ohne Modifier gelten als *friendly* und werden als `protected` eingestuft mit der Einschränkung, dass sie in Unterklassen anderer Pakete unsichtbar sind.

8.2 Erste Beispiele

Im Folgenden werden beispielhaft einige Klassen gezeigt, in denen die obigen Konzepte veranschaulicht werden.

```
/*************************  Datum.java  ***********************************/

/** Klasse Datum
 *  bestehend aus drei Integers (Tag, Monat, Jahr)
 *  und zwei Konstruktoren zum Anlegen eines Datums
 *  und einer Methode zur Umwandlung eines Datums in einen String
 */

public class Datum {

  int tag;                                    // Datenfeld tag
  int monat;                                  // Datenfeld monat
  int jahr;                                   // Datenfeld jahr

  public Datum (int t, int m, int j){         // Konstruktor mit 3 Parametern
    tag   = t;                                // initialisiere Tag
    monat = m;                                // initialisiere Monat
    jahr  = j;                                // initialisiere Jahr
  }

  public Datum (int jahr){                    // Konstruktor mit 1 Parameter
    this(1, 1, jahr);                         // initialisiere 1.1. Jahr
  }

  public String toString(){                   // Methode ohne Parameter
    return tag + "." + monat + "." + jahr;    // liefert Datum als String
  }

}


/*************************  DatumTest.java *********************************/

import AlgoTools.IO;

/** Klasse DatumTest, testet die Klasse Datum                              */

public class DatumTest {

  public static void main(String[] argv) {
    Datum d;                                  // deklariere ein Datum
    d = new Datum (15,8,1972);                // kreiere Datum 15.08.1972
    d = new Datum (1972);                     // kreiere Datum 01.01.1972
    d.jahr++;                                 // erhoehe Datum um ein Jahr
    IO.println(d.toString());                 // drucke Datum
    IO.println(d);                            // hier: implizites toString()
  }
}
```

```
/*************************  Person.java  ***********************************/

/** Klasse Person
 *  bestehend aus Vorname, Nachname, Geburtsdatum
 *  mit einem Konstruktor zum Anlegen einer Person
 *  und zwei Methoden zum Ermitteln des Jahrgangs und des Alters
 */

import java.util.GregorianCalendar;

public class Person {

  String vorname;                                  // Datenfeld Vorname
  String nachname;                                 // Datenfeld Nachname
  Datum  geb_datum;                                // Datenfeld Geburtsdatum

  public Person (String vn,                        // Konstruktor mit Vorname
                 String nn,                        // Nachname
                 int t,                            // Geburtstag
                 int m,                            // Geburtsmonat
                 int j)                            // Geburtsjahr
  {
    vorname   = vn;                               // initialisiere Vorname
    nachname  = nn;                               // initialisiere Nachname
    geb_datum = new Datum(t,m,j);                 // initialisiere Geburtsdatum
  }

  public int jahrgang () {                        // Methode
    return geb_datum.jahr;                        // liefert Geburtsjahrgang
  }

  public int alter(){                             // Methode
    int jetzt = new GregorianCalendar().get(GregorianCalendar.YEAR);
    return jetzt - geb_datum.jahr;                // liefert das Lebensalter
  }

  public String toString() {                      // Methode, ueberschreibt toString
    return vorname + " " + nachname;              // liefert Vor- und Nachname
  }

}


/*************************  PersonTest.java ********************************/
import AlgoTools.IO;

/** Klasse PersonTest, testet Klasse Person                                  */

public class PersonTest {

  public static void main (String [] argv) {
    Person p;                                     // deklariere eine Person
    p = new Person("Willi","Wacker",22,8,1972);   // kreiere Person
    p.geb_datum.jahr++;                           // mache sie 1 Jahr juenger
    IO.print(p);                                  // gib Vor- und Nachname aus
    IO.println(" ist "+p.alter()+" Jahre alt.");  // gib Alter aus
  }
}
```

```
/**************************  Student.java  ********************************/

/** Klasse Student, spezialisiert die Klasse Person
 *  durch statische Klassenvariable next_mat_nr;
 *  durch weitere Datenfelder mat_nr, fach, jsb
 *  durch eigenen Konstruktor und durch eigene Methode jahrgang
 *  welche die Methode jahrgang der Klasse Person ueberschreibt
 */

public class Student extends Person {            // Student erbt von Person

  static int next_mat_nr = 100000;               // statische Klassenvariable
  int mat_nr;                                    // Matrikel-Nummer
  String fach;                                   // Studienfach
  int jsb;                                       // Jahr des Studienbeginns

  public Student                                 // Konstruktor mit
                (String vn,                      // Vorname
                 String nn,                      // Nachname
                 int t,                          // Geburtstag
                 int m,                          // Geburtsmonat
                 int j,                          // Geburtsjahr
                 String f,                       // Studienfach
                 int jsb)                        // Studienbeginn
  {
    super(vn, nn, t, m, j);                      // Konstruktor des Vorfahren
    fach        = f;                             // initialisiere Fach
    this.jsb    = jsb;                           // initialisiere Studienbeginn
    mat_nr      = next_mat_nr++;                 // vergib naechste Mat-Nr.
  }

  public int jahrgang() {                        // Methode liefert als Jahrgang
    return jsb;                                  // das Jahr des Studienbeginns
  }

}


/**************************  StudentTest.java ******************************/

import AlgoTools.IO;

/** Klasse StudentTest,  testet die Klasse Student                          */

public class StudentTest {

  public static void main (String [] argv) {
    Student s;                                                 // deklariere Student
    s = new Student("Willi","Wacker",22,8,1972,"BWL",1995);// kreiere Student
    IO.print(s);                                               // gib Name aus und
    IO.println(" hat die Matrikelnummer " + s.mat_nr);     // Matrikelnummer
  }
}
```

```
/************************** PersonStudentTest.java ************************/

import AlgoTools.IO;

/** Klasse PersonStudentTest
 *  verwendet Instanzen der Klasse Person und der Klasse Student
 */

public class PersonStudentTest {

  public static void main (String [] argv) {

    Student s;                                          // Student
    Person p;                                           // Person

    p = new Person("Uwe","Meier",24,12,1971);           // kreiere Person
    s = new Student("Eva","Kahn",15,9,1972,"BWL",1998); // kreiere Student

    IO.println(p + "'s Jahrgang: " + p.jahrgang());     // gib Jahrgang aus
                                                        // da p eine Person ist
                                                        // wird Geburtsjahrgang
                                                        // ausgegeben

    IO.println(s + "'s Jahrgang: " + s.jahrgang());     // gib Jahrgang aus
                                                        // da s ein Student ist
                                                        // wird
                                                        // Immatrikulationsjahr
                                                        // ausgegebn


    p = s;                                              // p zeigt auf s

    IO.println(p + "'s Jahrgang: " + p.jahrgang());     // gib Jahrgang aus
                                                        // da p auf Student
                                                        // zeigt, wird
                                                        // Immatrikulationsjahr
                                                        // ausgegeben



    if (p instanceof Student)                           // falls p Student ist
       IO.println(((Student)p).fach);                   // gib p's Fach aus

    s = (Student) p;                                    // s zeigt auf p
    IO.println(s.fach);                                 // gib s's Fach aus
  }
}
```

Innerhalb einer Vererbungshierarchie können Instanzmethoden überschrieben werden. So wird in der Klasse `Person` die Methode `jahrgang()` definiert. In der Klasse `Student` soll sich diese Methode aber anders verhalten, daher wird sie in der Klasse `Student` überschrieben.

8.3 Binden

Wenn mehrere Methoden mit gleichem Namen und unterschiedlicher Parameterliste existieren, ist die Methode *überladen*.

Statisches Binden bezeichnet den Vorgang, einem Objekt zur Übersetzungszeit den Programmcode fest zuzuordnen; **dynamisches Binden** bezeichnet den Vorgang, einem Objekt zur Laufzeit den Programmcode zuzuordnen.

Bei der Programmiersprache Java werden alle Instanzmethoden dynamisch gebunden. Der Compiler prüft lediglich, ob die entsprechende Methode vorhanden ist, aber erst zur Laufzeit wird festgestellt, von welchem Typ das Objekt ist und die entsprechende Methode wird ausgewählt. So kann eine Referenz vom Typ `Person` sowohl auf ein `Person` Objekt verweisen, als auch auf ein `Student` Objekt. Erst zur Laufzeit wird festgestellt, um welches Objekt es sich handelt und die entsprechende Methode wird ausgewählt.

Alles andere (Klassenmethoden, Klassenvariablen, Instanzvariablen) wird statisch gebunden, also bereits zur Compilezeit ausgewählt und *fest verdrahtet*. Der Compiler wählt also die Klassenmethode oder Variable aus, die dem Typ der Referenz entspricht.

Folgende Fälle können z.B. auftreten:

- ```
  Person  p = new Person ("Uwe","Meier",24,12,1971);
  Student s = new Student("Eva","Kahn",15,9,1972,"BWL",1998);
  ```
  Wird übersetzt und zwei Instanzen werden angelegt.

- `IO.println(p.fach);`
  Der Compiler versucht das Datenfeld `fach` statisch an das Objekt zu binden. Dies führt zu einem Übersetzungsfehler, da Instanzen vom Typ `Person` nicht über das Datenfeld `fach` verfügen.

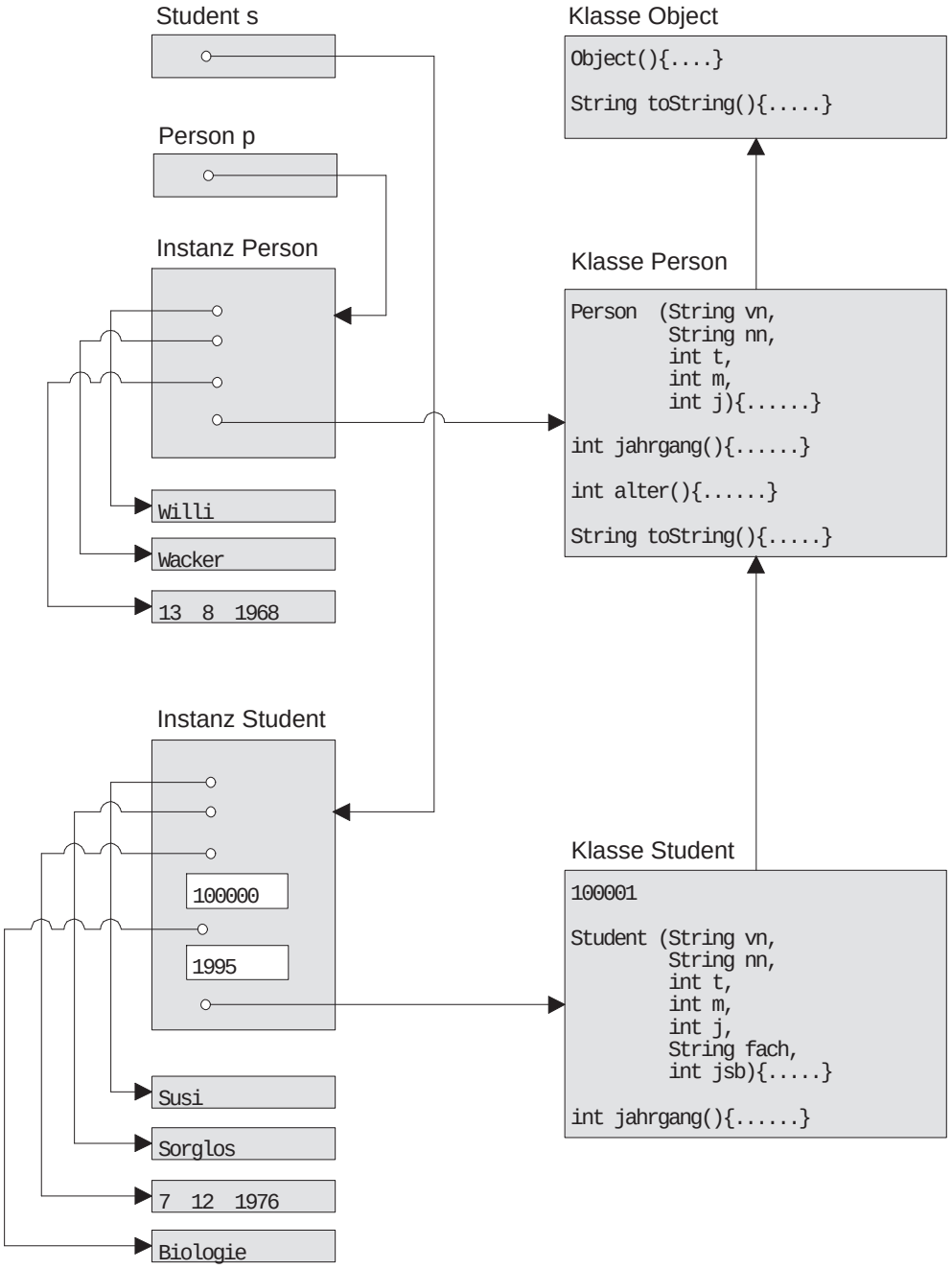
- `IO.println(((Student)p).fach);`
  Der Compiler versucht das Datenfeld `fach` statisch an das Objekt zu binden. Der Code wird übersetzt, da dem Compiler mit dem Cast vom Programmierer eine Instanz vom Typ `Student` garantiert wird, welche über das Datenfeld `fach` verfügt. Das Beispiel führt aber zu einem Laufzeitfehler, wenn `p` zur Laufzeit nicht auf einen Studenten verweist.

- `p = s;`
  Wird übersetzt und ausgeführt. `p` verweist nun auf einen Studenten.

- `IO.println(((Student)p).fach);`
  Wird übersetzt und ausgeführt, da `p` nun auf eine Instanz vom Typ Student verweist, welche über das Datenfeld `fach` verfügt.

- `IO.println(p.jahrgang());`
  Die Methode `jahrgang()` wird dynamisch zur Laufzeit gebunden. Der Quellcode wird übersetzt und ausgeführt. Es kommt die Methode `jahrgang()` aus der Klasse `Student` zum Einsatz. Hinweis: Beim *Statischen Binden* wäre bereits zur Übersetzungszeit dem Objekt `p` die Methode `jahrgang` der Klasse Person zugeordnet worden.
  ```

Die folgende Grafik verdeutlicht das Zusammenspiel zwischen den Klassen `Person` und `Student` und ihren Instanzen. Auf dem Laufzeitkeller führt von der Variable `s` ein Verweis auf die Speicherfläche, welche eine Instanz vom Typ `Student` aufnimmt. Da einige Bestandteile von `Student` (nämlich `vorname`, `nachname`, `geb_datum` und `fach`) selbst wieder Objekte sind, führen dorthin weitere Verweise; die Instanzvariablen `matr_nr` und `jsb` werden hingegen explizit gespeichert. Ein weiterer Verweis (gezeichnet von links nach rechts) führt zu den Klassenvariablen und Klassenmethoden; von dort sind die Oberklassen erreichbar, von denen geerbt wurde.



8.4 Referenzen

Referenzen auf Objekte modellieren die in konventionellen Programmiersprachen vorhandenen Zeiger. Um dieses Konzept zu demonstrieren, implementieren wir den in Kapitel 3 vorgestellten Abzählreim nun mit objektorientierter Programmierung. Der an Array-Position i notierte Index des Nachfolgerkind j wird realisiert durch ein Kind-Objekt mit Nr. i, welches eine Referenz enthält auf ein Kind-Objekt mit Nr. j.

```
/*************************  Kind.java  ************************************/
/** Klasse Kind
 *  bestehend aus Nummer und Verweis auf Nachbarkind
 *  mit Konstruktor zum Anlegen eines Kindes                              */

public class Kind {
  int  nr;                                  // Nummer
  Kind next;                                // Verweis auf naechstes Kind
  public Kind (int nr) {                    // Konstruktor fuer Kind
    this.nr   = nr;                         // initialisiere Nummer
  }
}


/*********************** VerweisAbzaehlreim.java ****************************/
import AlgoTools.IO;

/** Klasse VerweisAbzaehlreim
 *  implementiert einen Abzaehlreim mit k Silben fuer n Kinder mit Verweisen
 *  verwendet dabei Objekte vom Typ Kind                                  */

public class VerweisAbzaehlreim {

  public static void main (String [] argv) {

    int i;                                  // Laufvariable
    int n=IO.readInt("Wie viele Kinder ? ");  // erfrage Kinderzahl
    int k=IO.readInt("Wie viele Silben ? ");  // erfrage Silbenzahl
    Kind erster, letzter, index;            // deklariere drei Kinder
    erster = letzter =  new Kind(0);        // kreiere erstes Kind

    for (i=1; i < n; i++){                  // erzeuge n-1 mal
      index = new Kind(i);                  // ein Kind mit Nummer i
      letzter.next = index;                 // erreichbar vom Vorgaenger
      letzter = index;
    }

    letzter.next = erster;                  // schliesse Kreis
    index = letzter;                        // beginne bei letztem Kind
    while (index.next != index) {           // solange ungleich Nachfolger
      for (i=1; i<k; i++) index=index.next; // gehe k-1 mal weiter
      IO.print("Ausgeschieden: ");          // Gib die Nummer des Kindes aus,
      IO.println(index.next.nr, 5);         // welches jetzt ausscheidet
      index.next = index.next.next;         // bestimme neuen Nachfolger
    }
    IO.println("Es bleibt uebrig: " + index.nr);
  }
}
```

8.5 Wrapperklassen

In der Programmiersprache Java existieren einige *primitive* Datentypen, wie z.B.: `int`, `double`, `boolean`, `char`, usw. Für jeden dieser primitiven Datentypen existiert eine entsprechende Klasse, die einem primitiven Datentyp entspricht. So existiert in Java die Klasse `Integer`, `Double`, `Boolean`, `Character`, usw.

Hinweis: Zeichenketten sind auch Objekte. Diese sind Instanzen der Klasse `String`. Wenn also im Programmcode eine Zeichenkette mit `"Meine Zeichenkette"` definiert wird, erzeugt man indirekt ein neues Objekt, an das auch Methodenaufrufe geschickt werden können.

Zu einem primitiven Datentyp kann man sehr leicht das entsprechende Objekt erhalten. Im folgenden Beispiel werden zwei `Integer` Objekte angelegt, ein Wert inkrementiert und danach beide Werte ausgegeben.

```
int i = 23;
Integer j = new Integer(i);
Integer k = new Integer(42);
j = new Integer(j.intValue()+1);

IO.println(j.intValue());
IO.println(k.intValue());
```

Da hierbei eine Objektstruktur um einen primitiven Datentyp *gewickelt* wird, nennt man diese Klassen auch *Wrapperklassen*.

Will man den Wert eines `Integer` Objektes erhöhen, ist dies, wie im obigen Beispiel deutlich wird, recht umständlich. Dies liegt daran, dass einem Wrapperobjekt kein neuer Wert zugewiesen werden kann. Diese Objekte nennt man auch *immutable*, also unveränderbar.

In Java 5.0 wurde der Umgang mit diesen Wrapperklassen etwas vereinfacht. So ist es nun möglich einer Objektreferenz vom Typ einer Wrapperklasse direkt einen entsprechenden primitiven Datentyp zuzuweisen:

```
int i = 23;
Integer j = i;
Integer k = 42;
j++;

IO.println(j);
IO.println(k);
```

Diese direkte Zuweisung nennt man *Boxing*. Der Wert wird also in die Schachtel des Wrappers gepackt. Umgekehrt kann auch der Wert eines Wrapperobjektes direkt als primitiver Datentyp zurückgeliefert werden. Diesen Vorgang nennt man *Unboxing* und beides zusammen wird als *Autoboxing* bezeichnet.

Diese vereinfachte Schreibweise ist durchaus bequem, man sollte allerdings auch auf die *Nebenwirkungen* achten. Schreibt man in seinem Quellcode z.B.: `Integer j = 23;` wird durch das Compilieren daraus folgender Code: `Integer j = new Integer(23);`.

Implementiert man z.B. eine `for`-Schleife, so könnte man folgendes programmieren:

```
for (Integer i=0;i<1000;i++) {
  IO.println(i.intValue());
}
```

Dieser Quellcode sieht auf den ersten Blick gut aus, allerdings werden hier ständig neue Objekte erzeugt, wodurch das Programm langsamer wird. In Wirklichkeit sieht obige Schleife nämlich wie folgt aus:

```
for(Integer i=new Integer(0);
            i.intValue()<1000;
            i=new Integer(i.intValue()+1)) {
  IO.println(i.intValue());
}
```

Es ist also immer darauf zu achten, wo man Boxing verwendet und ob man sich durch eine vereinfachte Schreibweise ggf. Nachteile einhandelt.

Eine weitere Neuerung in Java 5.0 ist die *for-each*-Schleife. Wird zum Beispiel ein Array von `Integer`-Objekten erzeugt, kann dieses wie gewohnt mit einer `for`-Schleife durchlaufen werden, oder aber mit einer *for-each*-Schleife:

```
Integer [] a = new Integer[10];

for (int i=0; i<10;i++) {      // Array mit Objekten/Werten fuellen
  a[i] = i;                    // Obacht: Boxing
}

for (int i=0; i<10;i++) {
  IO.println(a[i]);
}

for(Integer i: a) {            // fuer jedes Integer-Objekt aus a
  IO.println(i);               //
}
```

In der dritten Schleife verweist die Referenz `i` nach und nach einmal auf jedes Objekt im Array.

Kapitel 9

Abstrakte Datentypen

Ein *abstrakter Datentyp* (ADT) ist eine Datenstruktur zusammen mit darauf definierten Operationen.

Java unterstützt den Umgang mit ADTs durch die Bereitstellung von Klassen und Interfaces.

Interfaces enthalten nur Methodenköpfe und Konstanten. Ein Interface stellt eine Schnittstelle dar und legt damit die Funktionalität seiner Methoden fest, ohne diese zu implementieren. Dies geschieht in einer beliebigen Klasse, die dies zuerst in einer `implements`-Klausel deklariert und die dann eine Implementation aller Methoden des Interface bereitstellen muss. Verwendet werden kann ein Interface als Typdeklaration auch ohne Kenntnis der konkreten Implementation.

9.1 Liste

Def.: Eine *Liste* ist eine (ggf. leere) Folge von Elementen zusammen mit einem so genannten (ggf. undefinierten) *aktuellen* Element.

Schnittstelle des ADT `Liste`:

`empty`	:	Liste	$\rightarrow$	boolean	liefert true, falls Liste leer
`endpos`	:	Liste	$\rightarrow$	boolean	liefert true, wenn Liste abgearbeitet
`reset`	:	Liste	$\rightarrow$	Liste	das erste Listenelement wird zum aktuellen
`advance`	:	Liste	$\rightarrow$	Liste	der Nachfolger des akt. wird zum aktuellen
`elem`	:	Liste	$\rightarrow$	Objekt	liefert das aktuelle Element
`insert`	:	Liste $\times$ Objekt	$\rightarrow$	Liste	fügt vor das aktuelle Element ein Element ein; das neu eingefügte wird zum aktuellen
`delete`	:	Liste	$\rightarrow$	Liste	löscht das aktuelle Element; der Nachfolger wird zum aktuellen

```
/*****************************  Liste.java  *********************************/

/** Interface fuer den ADT Liste
 */

public interface Liste {

    public boolean empty();        // true, wenn Liste leer, false sonst

    public boolean endpos();       // true, wenn Liste am Ende, false sonst

    public void reset();           // rueckt an den Anfang der Liste

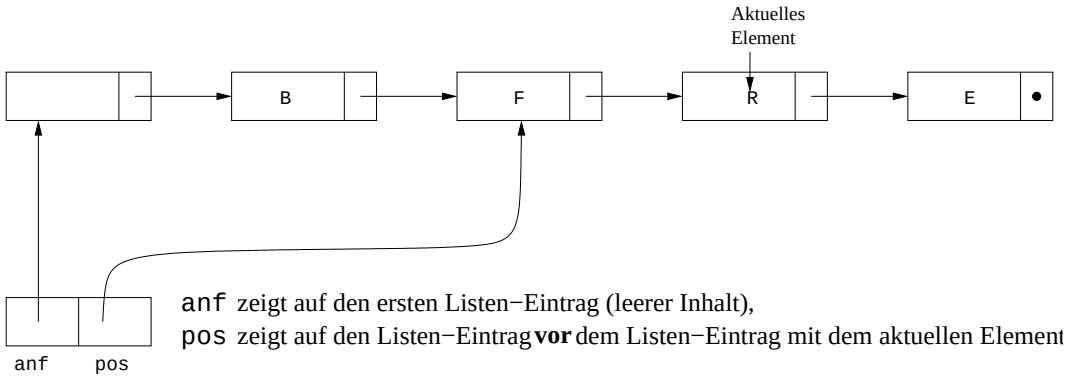
    public void advance();         // rueckt in Liste eine Position weiter

    public Object elem();          // liefert Inhalt des aktuellen Elements

    public void insert(Object x);  // fuegt x vor das aktuelle Element ein
                                   // und macht x zum aktuellen Element

    public void delete();          // entfernt aktuelles Element und macht
                                   // seinen Nachfolger zum aktuellen Element
}
```

Konzept zur Implementation einer Liste:



Hinweis zur Fehlerbehandlung:
In den folgenden Implementationen wird nach Eintreten einer fehlerhaften Situation eine `RuntimeException` geworfen. Auf das in Java mögliche eigene Exceptionhandling wurde hier zur besseren Lesbarkeit der Quellcodes verzichtet.

```
/****************************** Eintrag.java  ******************************/

/** Implementation eines Eintrags fuer die VerweisListe und den VerweisKeller
 */

public class Eintrag {

  Object  inhalt;              // Inhalt des Eintrags
  Eintrag next;                // Verweis auf naechsten Eintrag
}
```

```
/************************  VerweisListe.java ******************************/

/** Implementation des Interface Liste mithilfe von Verweisen
 */

public class VerweisListe implements Liste {

  private Eintrag anf;                    // zeigt auf nullten ListenEintrag
  private Eintrag pos;                    // zeigt vor aktuellen Listeneintrag

  public VerweisListe() {                 // kreiert eine leere Liste
    pos = anf = new Eintrag();
    anf.next  = null;
  }

  public boolean empty() {                // true, wenn Liste leer
   return anf.next == null;
  }

  public boolean endpos() {               // true, wenn am Ende
    return pos.next == null;
  }

  public void reset() {                   // rueckt an Anfang
    pos = anf;
  }

  public void advance() {                 // rueckt in Liste vor
    if (endpos()) throw new
      RuntimeException(" am Ende der Liste ");
    pos = pos.next;
  }

  public Object elem() {                  // liefert aktuelles Element
    if (endpos()) throw new
      RuntimeException(" am Ende der Liste ");
    return pos.next.inhalt;
  }

  public void insert(Object x) {          // fuegt ListenEintrag ein
    Eintrag hilf = new Eintrag();         // Das neue Listenelement
    hilf.inhalt  = x;                     // kommt vor das aktuelle
    hilf.next    = pos.next;
    pos.next     = hilf;
  }

  public void delete() {                  // entfernt aktuelles Element
    if (endpos()) throw new
      RuntimeException(" am Ende der Liste ");
    pos.next = pos.next.next;
  }
}
```

```
/*********************** VerweisListeTest.java  *****************************/

import AlgoTools.IO;

/** Testet die Implementation der VerweisListe
 */

public class VerweisListeTest {

  public static void main (String [] argv) {

    Liste l = new VerweisListe();                          // kreiere Liste
    Student s;                                             // deklariere Student

    s = new Student("Willi","Wacker",22,8,1972,"BWL",1995);// kreiere Student
    l.insert(s);                                           // fuege in Liste ein
    l.advance();                                           // eins weiter in l

    s = new Student("Erika","Muster",28,2,1970,"VWL",1994);// kreiere Student
    l.insert(s);                                           // fuege in Liste ein
    l.advance();                                           // eins weiter in l

    s = new Student("Hein","Bloed",18,5,1973,"CLK",1996);  // kreiere Student
    l.insert(s);                                           // fuege in Liste ein
    l.advance();                                           // eins weiter in l

    s = new Student("Susi","Sorglos",10,7,1973,"JUR",1996);// kreiere Student
    l.insert(s);                                           // fuege in Liste ein

    l.reset();                                             // an den Anfang

    while (!l.endpos()) {                                  // 1.,3.,5.. loeschen
      l.delete();
      if (!l.endpos())
        l.advance();
    }

    l.reset();                                             // an den Anfang
    while (!l.endpos()) {                                  // Liste abarbeiten
      IO.println(l.elem());                                // Student drucken
      l.advance();                                         // einmal vorruecken
    }

    l.reset();                                             // an den Anfang
    while (!l.empty()) l.delete();                         // Liste loeschen
  }
}
```

9.2 Keller

Def.: Ein *Keller* ist eine (ggf. leere) Folge von Elementen zusammen mit einem so genannten (ggf. undefinierten) *Top*-Element.

Schnittstelle des ADT `Keller` (Prinzip LIFO: Last in, first out):

`empty`	:	Keller	$\rightarrow$	boolean	liefert `true`, falls Keller leer ist, `false` sonst
`push`	:	Keller $\times$ Objekt	$\rightarrow$	Keller	legt Element auf Keller
`top`	:	Keller	$\rightarrow$	Objekt	liefert oberstes Element
`pop`	:	Keller	$\rightarrow$	Keller	entfernt oberstes Element

Semantik der Kelleroperationen:

A1) Ein neu konstruierter Keller ist leer.

A2) Nach einer `Push`-Operation ist ein Keller nicht leer.

A3) Nach einer `Push-Pop`-Operation ist der Keller unverändert.

A4) Nach der `Push`-Operation mit dem Element x liefert die `Top`-Operation das Element x.

```
/*****************************  Keller.java  *********************************/

/** Interface fuer den ADT Keller
 */

public interface Keller {

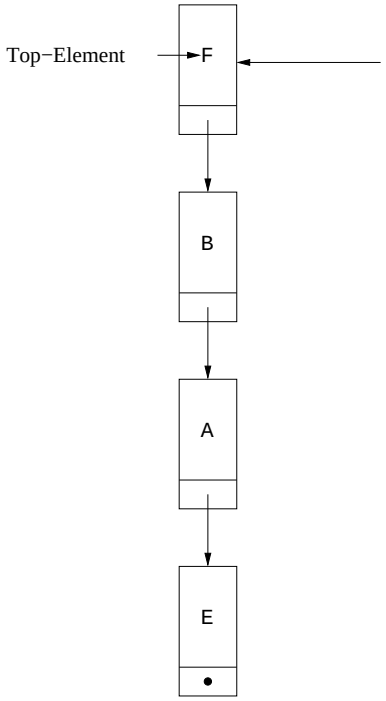
    public boolean empty();     // liefert true, falls Keller leer, false sonst

    public void push(Object x); // legt Objekt x auf den Keller

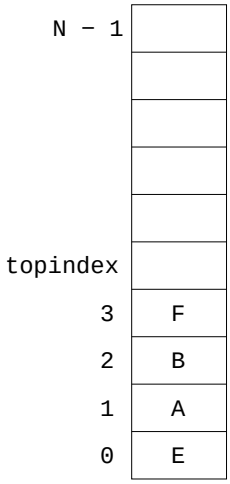
    public Object top();        // liefert oberstes Kellerelement

    public void pop();          // entfernt oberstes Kellerelement
}
```

Implementation eines Kellers mit Verweisen



Implementation eines Kellers mit einem Array (LIFO: Last in, first out)



```
/*************************  VerweisKeller.java ****************************/

/** Implementation eines Kellers mithilfe von Verweisen
 */

public class VerweisKeller implements Keller {

  private Eintrag top;                              // verweist auf obersten
                                                    // KellerEintrag

  public VerweisKeller() {                          // legt leeren Keller an
    top = null;
  }

  public boolean empty() {                          // liefert true,
    return top == null;                             // falls Keller leer
  }

  public void push(Object x) {                      // legt Objekt x
    Eintrag hilf = new Eintrag();                   // auf den Keller
    hilf.inhalt = x;
    hilf.next   = top;
    top         = hilf;
  }

  public Object top() {                             // liefert Top-Element
    if (empty()) throw new
      RuntimeException(" Keller ist leer ");
    return top.inhalt;
  }

  public void pop() {                               // entfernt Top-Element
    if (empty()) throw new
      RuntimeException(" Keller ist leer ");
    top = top.next;
  }
}
```

Die folgenden beiden Beispiele zeigen, dass zum Speichern von Werten aus primitiven Datentypen zunächst das Verpacken der Werte mithilfe der bereits erwähnten *Wrapperklassen* erforderlich ist. So wird durch den Konstruktor `new Integer(i)` ein Integer-Objekt erzeugt mit dem (nicht mehr veränderbaren) Wert i. Der Wert dieses Objekts kann über die Methode `intValue()` ermittelt werden.

```
/*****************************  Reverse.java  ********************************/

import AlgoTools.IO;

/** Liest eine Folge von ganzen Zahlen ein
 *  und gibt sie in umgekehrter Reihenfolge wieder aus.
 *  Verwendet wird die Wrapper-Klasse Integer,
 *  welche Objekte vom einfachen Typ int enthaelt.
 *  Vor dem Einfuegen in den Keller werden mit new Integer diese Objekte
 *  erzeugt, nach dem Auslesen aus dem Keller werden sie nach int gecastet.
 */

public class Reverse {

  public static void main (String [] argv) {

    Keller k = new VerweisKeller();                 // lege leeren Keller an

    int[] a = IO.readInts("Bitte Zahlenfolge:   "); // lies Integer-Folge ein

    for (int i=0; i<a.length; i++)                  // pushe jede Zahl als
        k.push(new Integer(a[i]));                  // Integer-Objekt

    IO.print("Umgekehrte Reihenfolge:");
    while (!k.empty()) {                            // solange Keller nicht leer
        IO.print(" "+((Integer)k.top()).intValue());// gib Top-Element aus
        k.pop();                                    // entferne Top-Element
    }
    IO.println();
  }
}
```

```
/*****************************  Klammer.java  *******************************/

import AlgoTools.IO;

/** Ueberprueft Klammerung mit Hilfe eines Kellers
 *  und markiert die erste fehlerhafte Position
 */

public class Klammer {

  public static void main(String[] argv) {

    char[] zeile;                         // Eingabezeichenkette
    int i = 0;                            // Laufindex in char[] c
    boolean fehler = false;               // Abbruchkriterium
    Keller k = new VerweisKeller();       // Keller fuer Zeichen

    zeile = IO.readChars("Bitte Klammerausdruck eingeben: ");
    IO.print("                               ");

    for (i=0; i < zeile.length && !fehler; i++){

      switch (zeile[i]) {

        case '(':                                          // oeffnende Klammer
        case '[': k.push(new Character(zeile[i])); break;// auf den Keller

        case ')': if (!k.empty() &&                        // runde Klammer zu
                  ((Character)k.top()).charValue()=='(') // ueberpruefen
                       k.pop();                          // und vom Keller
                  else fehler = true; break;             // sonst Fehler

        case ']': if (!k.empty() &&                        // eckige Klammer zu
                  ((Character)k.top()).charValue()=='[') // ueberpruefen
                       k.pop();                          // und vom Keller
                  else fehler = true; break;             // sonst Fehler

        default:                                           // beliebiges Zeichen
      }
      IO.print(" ");                                       // weiterruecken in
    }                                                      // der Ausgabe

    if (!fehler && k.empty())
         IO.println("korrekt geklammert");
    else IO.println("^ nicht korrekt geklammert");
  }
}
```

Um die Lesbarkeit der Programme zu erhöhen, soll nun das Einpacken und Auspacken der Wrapper-Klassen-Objekte gekapselt werden. Hierzu leiten wir vom Interface `Keller` das Interface `CharKeller` ab und von der Klasse `VerweisKeller` leiten wir die Klasse `VerweisCharKeller` ab. Erforderlich wird eine neue Methode `ctop()`, da Java nicht zwei identische Signaturen mit unterschiedlichem Rückgabewert erlaubt. Getestet wird die Implementation in der Klasse `Postfix`, welche einen eingelesenen Infix-Ausdruck in die entsprechende Postfix-Notierung überführt.

```
/*************************  CharKeller.java  *******************************/
/** Interface fuer den ADT CharKeller                                       */

public interface CharKeller extends Keller {
  public void push(char c);     // legt char auf den Keller
  public char ctop();           // liefert oberstes Kellerelement als char
}



/***********************  VerweisCharKeller.java  ***************************/
/** Abstrakter Datentyp Character-Keller mit Elementen vom Typ char         */

public class VerweisCharKeller extends VerweisKeller implements CharKeller {

  public void push(char c) {                  // legt char c auf den Keller
    push(new Character(c));
  }

  public char ctop() {                        // liefert oberstes Kellerelement
    return ((Character)top()).charValue();
  }
}



/*************************  Postfix.java  *******************************/

import AlgoTools.IO;

/** Wandelt Infix-Ausdruck in Postfix-Ausdruck um.
 *  Vorausgesetzt wird eine syntaktisch korrekte Eingabe,
 *  bestehend aus den Operatoren +,-,*,/ sowie den Operanden a,b,...,z
 *  und den oeffnenden und schliessenden Klammern. Beispiel: a*(b+c)-d/e
 *  Ausgabe ist der aequivalente Postfixausdruck.  Beispiel: abc+*de/-
 *  Verwendet wird ein Character-Keller, der die bereits gelesenen
 *  oeffnenden Klammern sowie die Operatoren speichert.
 */

public class Postfix {

  public static void main(String[] argv) {

    CharKeller k = new VerweisCharKeller();           // Character-Keller
    char[] infix;                                     // Eingabezeile
    char c;                                           // aktuelles Zeichen

    infix = IO.readChars("Bitte Infix-Ausdruck (+,-,*,/,a,...,z): ");
    IO.print("umgewandelt in Postfix:                 ");
```

```
    for (int i=0; i<infix.length; i++) {              // durchlaufe Infixstring

        c = infix[i];                                 // aktuelles Zeichen
        switch (c) {

            case '('  :  k.push(c);                   // '(' auf den Stack
                         break;


            case ')'  :  while ( k.ctop() != '(' ) {  // Keller bis vor '('
                             IO.print(k.ctop());      // ausgeben
                             k.pop();                 // und leeren
                         }
                         k.pop();                     // und '(' entfernen
                         break;


            case '+'  :
            case '-'  :  while (!k.empty()            // Keller bis vor erste
                                && k.ctop() != '(') { // oeffnende Klammer
                             IO.print(k.ctop());      // ausgeben
                             k.pop();                 // und leeren
                         }
                         k.push(c);                   // lege letztes Zeichen ab
                         break;


            case '*'  :
            case '/'  :  if (!k.empty()               // solange Keller
                             && (k.ctop()=='*'        // * enthaelt
                             || k.ctop()=='/')) {     // oder / enthaelt
                                 IO.print(k.ctop());  // gib Operator aus
                                 k.pop();             // und entferne ihn
                         }
                         k.push(c);                   // lege letztes Zeichen ab
                         break;


            default   :  if (c>='a' && c<='z')        // falls Operand vorliegt
                             IO.print(c);             // direkt ausgeben
        }
    }

    while (!k.empty()) {                              // beim Eingabeende
        IO.print(k.ctop());                           // Keller ausgeben
        k.pop();                                      // und leeren
    }
    IO.println();
  }
}
```

9.3 Schlange

Def.: Eine *Schlange* ist eine (ggf. leere) Folge von Elementen zusammen mit einem so genannten (ggf. undefinierten) *Front*-Element.

Schnittstelle des ADT `Schlange` (Prinzip FIFO: First in, First out):

`empty`	:	Schlange	$\rightarrow$	boolean	liefert `true`, falls Schlange leer ist, `false` sonst
`enq`	:	Schlange $\times$ Objekt	$\rightarrow$	Schlange	fügt Element hinten ein
`front`	:	Schlange	$\rightarrow$	Objekt	liefert vorderstes Element
`deq`	:	Schlange	$\rightarrow$	Schlange	entfernt vorderstes Element

```
/****************************  Schlange.java  ******************************/

/** Interface zum ADT Schlange
 */

public interface Schlange {

  public boolean empty();                 // Testet, ob Schlange leer ist

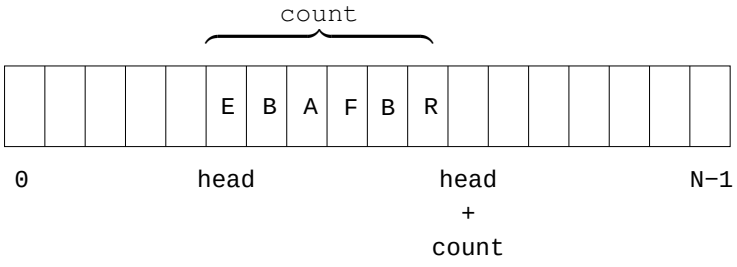
  public void enq(Object x);              // Fuegt x hinten ein

  public Object front();                  // Liefert vorderstes Element

  public void deq();                      // Entfernt vorderstes Element

}
```

Konzept zur Implementation einer Schlange mit einem Array:



```
/************************** ArraySchlange.java ******************************/

/** Implementation des Interface Schlange mit Hilfe eines Arrays
 */

public class ArraySchlange implements Schlange {

  private Object[] inhalt;                    // Array fuer Schlangenelemente
  private int head;                           // Index fuer Schlangenanfang
  private int count;                          // Anzahl Schlangenelemente

  public ArraySchlange(int N) {               // Konstruktor fuer leere Schlange
    inhalt = new Object[N];                   // besorge Platz fuer N Objekte
    head   = 0;                               // initialisiere Index fuer Anfang
    count  = 0;                               // initialisiere Anzahl
  }

  private boolean full() {                    // Testet, ob Schlange voll ist
    return count == inhalt.length;            // Anzahl gleich Arraylaenge?
  }

  public boolean empty() {                    // Testet, ob Schlange leer ist
    return count == 0;                        // Anzahl gleich 0?
  }

  public void enq( Object x ) {               // Fuegt x hinten ein
    if (full()) throw new RuntimeException(" Schlange ist voll ");
    inhalt[(head+count)%inhalt.length] = x;   // Element einfuegen
    count++;                                  // Anzahl inkrementieren
  }

  public void deq() {                         // Entfernt vorderstes Element
    if (empty()) throw new RuntimeException(" Schlange ist leer ");
    inhalt[head] = null;                      // Verweis auf null setzen
    head = (head + 1) % inhalt.length;        // Anfang-Index weiterruecken
    count--;                                  // Anzahl dekrementieren
  }

  public Object front() {                     // Liefert Element,
    if (empty()) throw new RuntimeException(" Schlange ist leer ");
    return inhalt[head];                      // welches am Anfang-Index steht
  }
}
```

```
/*************************** ArraySchlangeTest.java ************************/

import AlgoTools.IO;

/** Programm zum Testen der Methoden des ADT Schlange.
 *  Liest Zeichenketten und reiht sie in eine Schlange ein.
 *  Bei Eingabe einer leeren Zeichenkette wird die jeweils vorderste
 *  aus der Schlange ausgegeben und entfernt.
 */

public class ArraySchlangeTest {

  public static void main(String [] argv) {

    Schlange s = new ArraySchlange(100);          // konstruiere Schlange mit
                                                  // Platz fuer 100 Objekte
    String eingabe;

    IO.println("Bitte Schlange fuellen durch Eingabe eines Wortes.");
    IO.println("Bitte Schlangen-Kopf entfernen durch Eingabe von RETURN.");

    do {

      eingabe = IO.readString("Input: ");         // fordere Eingabe an

      if ( eingabe.length()>0 ) {                 // falls Eingabe != RETURN

          s.enq(eingabe);                         // fuege in Schlange ein
          IO.println(" wird eingefuegt.");

      } else {                                    // falls EINGABE == RETURN

        if (!s.empty()) {
          IO.println(s.front()+" wird entfernt"); // gib Frontelement aus
          s.deq();                                // entferne Frontelement
        }
      }

    } while (!s.empty());                         // solange Schlange nicht leer

    IO.println("Schlange ist jetzt leer.");
  }
}
```

9.4 Baum

Def.: Ein *binärer Baum* ist entweder leer oder besteht aus einem Knoten, dem ein Element und zwei binäre Bäume zugeordnet sind.

Schnittstelle des ADT `Baum`:

`empty`	:	Baum	→	boolean	liefert `true`, falls Baum leer ist
`value`	:	Baum	→	Objekt	liefert Wurzelelement
`left`	:	Baum	→	Baum	liefert linken Teilbaum
`right`	:	Baum	→	Baum	liefert rechten Teilbaum

```
/******************************  Baum.java  ******************************/

/** Interface Baum mit 4 Methoden.
 */

public interface Baum {

  public boolean empty();                  // liefert true, falls Baum leer ist

  public Baum left();                      // liefert linken Teilbaum

  public Baum right();                     // liefert rechten Teilbaum

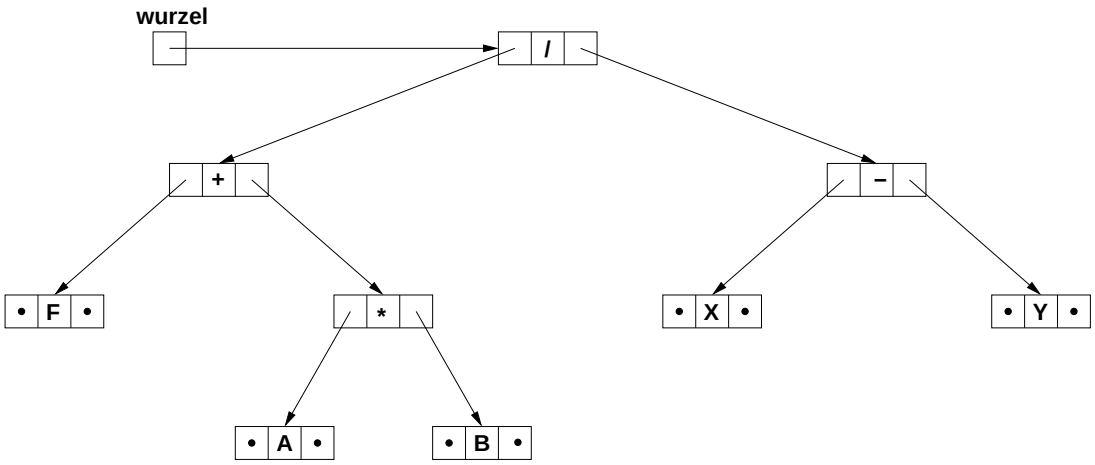
  public Object value();                   // liefert Objekt in der Wurzel

}
```

Hinweis: Um Bäume nicht nur auszulesen, sondern auch verändern zu können, müssen die (noch zu definierenden) Konstruktoren der Implementation verwendet werden.

Konzept zur Implementation eines Baumes mit Verweisen

Ein Baum besteht aus einer Menge von Knoten. Der `VerweisBaum` enthält daher einen Verweis auf den Wurzelknoten oder einen `null`-Verweis, wenn der Baum leer ist. Ein Knoten enthält neben einem Verweis auf den Inhalt jeweils einen Verweis auf den linken und rechten Sohn, sofern sie vorhanden sind.



Traversierungen

Eine Traversierung eines binären Baumes besteht aus dem systematischen Besuchen aller Knoten in einer bestimmten Reihenfolge.

Traversierungen dieses Baumes

Preorder:	`/ + F * A B - X Y`
Inorder:	`F + A * B / X - Y`
Postorder:	`F A B * + X Y - /`
Klammerinorder:	`( ( F + ( A * B) ) / ( X - Y ) )`

```
/*****************************  Knoten.java  ********************************/

/** Klasse Knoten mit einem Konstruktor
 */

public class Knoten {

  Object inhalt;                              // Knoteninhalt
  Knoten links, rechts;                       // linker, rechter Teilbaum

  public Knoten(Object x) {                   // konstruiere Knoten
    inhalt = x;                               // mit Inhalt x
    links = rechts = null;                    // Nullverweis fuer die Soehne
  }
}
```

```
/*************************** VerweisBaum.java ****************************/

/** Klasse VerweisBaum mit vier Konstruktoren und vier Methoden.
 *
 *  Ein VerweisBaum enthaelt einen Verweis auf den Wurzelknoten, der auf weitere
 *  Knoten verweisen kann, die den linken und rechten Teilbaum repraesentieren.
 */

public class VerweisBaum implements Baum {

  Knoten wurzel;                                // Wurzel des Baums

  public VerweisBaum() {                        // konstruiert einen leeren Baum
    wurzel = null;                              // Wurzel verweist auf nichts
  }

  public VerweisBaum(Object x) {                // konstruiert ein Blatt
    wurzel = new Knoten(x);                     // lege Knoten mit Inhalt x an
  }

  public VerweisBaum(VerweisBaum l, Object x, VerweisBaum r) { // konstr. Baum
    wurzel = new Knoten(x);                     // lege Knoten mit Inhalt x an
    if (l != null)                              // wenn l nicht null, setze
      wurzel.links = l.wurzel;                  // wurzel von l als linken Sohn
    if (r != null)                              // wenn r nicht null, setze
      wurzel.rechts = r.wurzel;                 // wurzel von r als rechten Sohn
  }

  private VerweisBaum(Knoten k) {               // konstruiert einen Baum
    wurzel = k;                                 // aus ubergebenem Knoten
  }                                             // (nur fuer internen Gebrauch)

  public boolean empty() {                      // liefert true,
    return wurzel == null;                      // falls Baum leer ist
  }

  public Object value() {                       // liefert Element in der Wurzel
    if (empty())
     throw new RuntimeException(" Baum ist leer ");
    return wurzel.inhalt;
  }

  public Baum left() {                          // liefert linken Teilbaum
    if (empty())
     throw new RuntimeException(" Baum ist leer ");
    return new VerweisBaum(wurzel.links);       // Erzeuge Baum, der linken Sohn
  }                                             // als Wurzelknoten enthaelt

  public Baum right() {                         // liefert rechten Teilbaum
    if (empty())
     throw new RuntimeException(" Baum ist leer ");
    return new VerweisBaum(wurzel.rechts);      // Erzeuge Baum, der rechten Sohn
  }                                             // als Wurzelknoten enthaelt
}
```

```
/*************************  Traverse.java  *********************************/

import AlgoTools.IO;

/** Klasse Traverse
 *  bestehend aus vier statischen Methoden
 *  zum Traversieren von Baeumen
 */

public class Traverse {

  public static void inorder(Baum b) {        // Inorder-Traversierung
    if (!b.empty()) {                         // falls Baum nicht leer,
        inorder (b.left());                   // steige links ab
        IO.print(b.value());                  // gib Knoteninhalt aus
        inorder (b.right());                  // steige rechts ab
    }
  }

  public static void preorder(Baum b) {       // Preorder-Traversierung
    if (!b.empty()) {                         // falls Baum nicht leer,
        IO.print(b.value());                  // gib Knoteninhalt aus
        preorder(b.left());                   // steige links ab
        preorder(b.right());                  // steige rechts ab
    }
  }

  public static void postorder(Baum b) {      // Postorder-Traversierung
    if (!b.empty()) {                         // falls Baum nicht leer,
        postorder(b.left());                  // steige links ab
        postorder(b.right());                 // steige rechts ab
        IO.print (b.value());                 // gib Knoteninhalt aus
    }
  }

  public static void klammerinorder(Baum b) { // Klammerinorder-Traversierung
    if (!b.empty()) {                         // falls Baum nicht leer
      if (!b.left().empty()) IO.print("(");   // "("
      klammerinorder(b.left());               // linker Sohn
      IO.print(b.value());                    // Wurzel von b
      klammerinorder(b.right());              // rechter Sohn
      if (!b.right().empty()) IO.print(")");  // ")"
    }
  }
}
```

```
/*****************************  TiefenSuche.java  ***************************/

import AlgoTools.IO;

/** Klasse Tiefensuche enthaelt statische Methode tiefenSuche,
 *  die mit Hilfe eines Kellers eine iterativ organisierte Tiefensuche
 *  auf einem Baum durchfuehrt (= preorder)
 */

public class TiefenSuche {

  public static void tiefenSuche (Baum wurzel) { // starte bei wurzel

    Baum b;                                 // Hilfsbaum

    Keller k = new VerweisKeller();         // konstruiere einen Keller

    if (!wurzel.empty())                    // lege uebergebenen
      k.push(wurzel);                       // Baum in Keller

    while (!k.empty()) {                    // solange Keller noch Baeume enthaelt

      b = (Baum)k.top();                    // besorge Baum aus Keller
      k.pop();                              // und entferne obersten Eintrag

      do {
        IO.print(b.value());                // gib Wert der Baumwurzel aus

        if (!b.right().empty())             // falls es rechten Sohn gibt,
          k.push(b.right());                // lege rechten Sohn auf den Keller

        b = b.left();                       // gehe zum linken Sohn

      } while (!b.empty());                 // solange es linken Sohn gibt
    }
  }
}
```

```
/*****************************  BreitenSuche.java  *************************/

import AlgoTools.IO;

/** Klasse BreitenSuche enthaelt statische Methode breitenSuche,
 *  die mit Hilfe einer Schlange eine iterativ organisierte Breitensuche
 *  auf einem Baum durchfuehrt
 */

public class BreitenSuche {

  public static void breitenSuche(Baum wurzel) {// starte bei wurzel

    Baum b;                                 // Hilfsbaum

    Schlange s = new ArraySchlange(100);  // konstruiere eine Schlange

    if (!wurzel.empty())                    // lege uebergebenen
      s.enq(wurzel);                        // Baum in Schlange

    while (!s.empty()) {                    // solange Schlange nicht leer

      b = (Baum)s.front();                  // besorge Baum aus Schlange
      s.deq();                              // und entferne vordersten Eintrag

      IO.print(b.value());                  // gib Wert der Baumwurzel aus

      if (!b.left().empty())                // falls es linken Sohn gibt,
        s.enq(b.left());                    // haenge linken Sohn an Schlange
      if (!b.right().empty())               // falls es rechten Sohn gibt,
        s.enq(b.right());                   // haenge rechten Sohn an Schlange
    }
  }
}
```

```
/*****************************  TraverseTest.java  ****************************/
                                                                  //         ''
import AlgoTools.IO;                                              //      /       \
                                                                  //      +       -
/** Traversierungen des binaeren Baums mit Operanden in           //    /   \   /   \
 *  den Blaettern und Operatoren in den inneren Knoten:           //    F   *   X   Y
 */                                                               //       / \
                                                                  //       A B
public class TraverseTest {

  public static void main(String[] argv) {

    VerweisBaum a = new VerweisBaum(new Character('A'));
    VerweisBaum b = new VerweisBaum(new Character('B'));
    VerweisBaum m = new VerweisBaum(a, new Character('*'), b);
    VerweisBaum f = new VerweisBaum(new Character('F'));
    VerweisBaum p = new VerweisBaum(f, new Character('+'), m);
    VerweisBaum x = new VerweisBaum(new Character('X'));
    VerweisBaum y = new VerweisBaum(new Character('Y'));
    VerweisBaum n = new VerweisBaum(x, new Character('-'), y);
    VerweisBaum d = new VerweisBaum(p, new Character('/'), n);

    IO.print("Preorder:        ");
    Traverse.preorder(d);          IO.println(); // Ausgabe: /+F*AB-XY

    IO.print("Inorder:         ");
    Traverse.inorder(d);           IO.println(); // Ausgabe: F+A*B/X-Y

    IO.print("Postorder:       ");
    Traverse.postorder(d);         IO.println(); // Ausgabe: FAB*+XY-/

    IO.print("Klammer-Inorder: ");
    Traverse.klammerinorder(d);    IO.println(); // Ausgabe: ((F+(A*B))/(X-Y))

    IO.print("Tiefensuche:     ");
    TiefenSuche.tiefenSuche(d);    IO.println(); // Ausgabe: /+F*AB-XY

    IO.print("Breitensuche:    ");
    BreitenSuche.breitenSuche(d);  IO.println(); // Ausgabe: /+-F*XYAB

  }
}
```

```
/*****************************  PostfixBaumBau.java  ************************/

import AlgoTools.IO;

/** Klasse PostfixBaumBau enthaelt statische Methode postfixBaumBau,
 *  die einen Postfix-Ausdruck uebergeben bekommt
 *  und den zugehoerigen Baum zurueckliefert.
 *  Verwendet wird ein Keller ueber Baeumen.
 */

public class PostfixBaumBau {

  public static Baum postfixBaumBau (char[]ausdruck) { // konstruiert Baum

    VerweisBaum b, l, r;                          // Baeume
    Object x;                                     // Objekt
    char c;                                       // Zeichen

    Keller k = new VerweisKeller();               // Keller

    for (int i=0; i < ausdruck.length; i++) {     // durchlaufe Postfix-Ausdruck

      c = ausdruck[i];                            // besorge naechstes Zeichen
      x = new Character(c);                       // erzeuge Objekt

      if (c!='+' && c!='-' && c!='*' && c!='/')   // falls c ein Operand ist
        b = new VerweisBaum(x);                   // erzeuge Blatt
      else {                                      // ansonsten ist c Operator
        r = (VerweisBaum) k.top(); k.pop();       // besorge rechten Sohn
        l = (VerweisBaum) k.top(); k.pop();       // besorge linken Sohn
        b = new VerweisBaum(l,x,r);               // erzeuge VerweisBaum
      }
      k.push(b);                                  // lege Verweisbaum auf Keller
    }
    return (Baum) k.top();                        // gib Ergebnisbaum zurueck
  }

  public static void main (String [] argv) {
    char [] zeile = IO.readChars("Bitte Postfix-Ausdruck: ");  // lies Postfix
    Baum wurzel = postfixBaumBau(zeile);          // konstruiere daraus Baum
    IO.print("Inorder lautet:         ");         // kuendige Traversierung an
    Traverse.klammerinorder(wurzel);              // gib in Klammer-Inorder aus
    IO.println();
  }
}
```

```
/************************ PreorderTraverse.java ****************************/

import java.util.Enumeration;

/** Schrittweise Preordertraversierung eines Baumes mit Interface Enumeration
 */

public class PreorderTraverse implements Enumeration {

  private Keller k;                              // Keller zum Zwischenspeichern

  public PreorderTraverse(Baum w){               // Konstruktor,
    k = new VerweisKeller();                     // besorge Verweiskeller
    if (!w.empty()) k.push(w);                   // initialisiert Keller
  }

  public boolean hasMoreElements() {             // liefert true
    return !k.empty();                           // falls noch Elemente
  }                                              // im Keller sind

  public Object nextElement() {
    if (k.empty()) throw new RuntimeException("in nextElement: Keller leer");
    Baum b = (Baum)k.top();                      // hole Baum vom Keller
    k.pop();                                     // entferne Top-Element
    if (!b.right().empty()) k.push(b.right());   // lege rechten Sohn auf Keller
    if (!b.left().empty())  k.push(b.left());    // lege linken Sohn auf Keller
    return b.value();                            // liefere Element ab
  }
}


/***************************  PostfixPreorderTest.java  *********************/

import AlgoTools.IO;
import java.util.Enumeration;

/** Klasse PostfixPreorderTest konstruiert unter Verwendung von PostfixBaumBau
 *  einen Baum aus dem eingelesenen String und gibt ihn in Preorder-Notation
 *  aus unter Verwendung von PreorderTraverse
 */

public class PostfixPreorderTest {

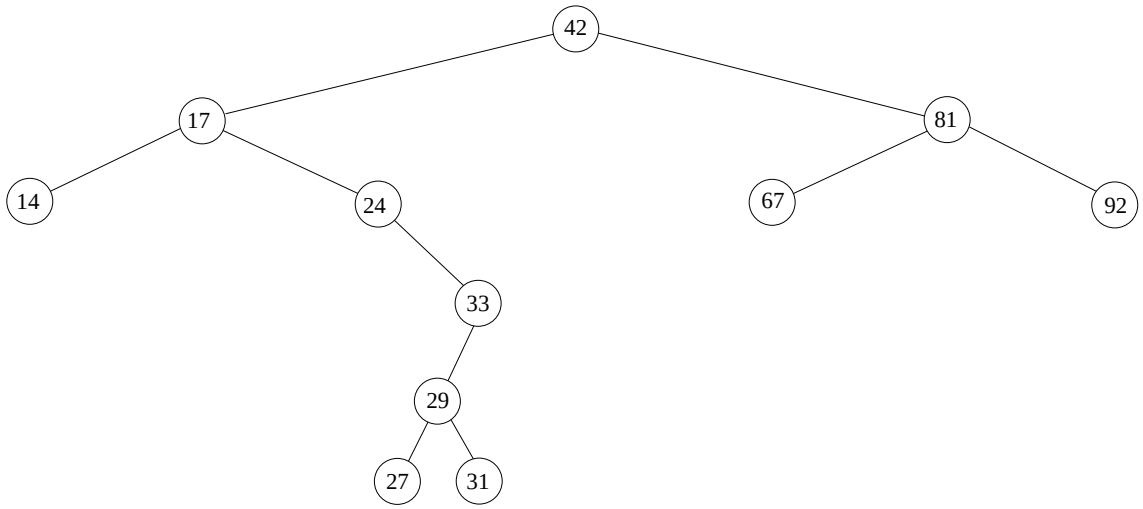
 public static void main (String [] argv) {

    char[]zeile=IO.readChars("Bitte Postfix-Ausdruck:");// lies Postfixausdruck
    Baum w =PostfixBaumBau.postfixBaumBau(zeile);       // konstruiere daraus
                                                        // einen Baum
    IO.println("Umwandlung in Prefix-Notation:");
    Enumeration e = new PreorderTraverse(w);            // erzeuge Enumeration
    while (e.hasMoreElements()) {                       // solange Elemente da
      Object x = e.nextElement();                       // besorge Element
      IO.println(x);                                    // gib Element aus
    }                                                   // Obacht: nicht alle
    IO.println();                                       // Objekte eignen sich
  }                                                     // zur Darstellung !
}
```

9.5 Suchbaum

Def.: Ein binärer *Suchbaum* ist ein binärer Baum, bei dem alle Einträge im linken Teilbaum eines Knotens x kleiner sind als der Eintrag im Knoten x und bei dem alle Einträge im rechten Teilbaum eines Knotens x größer sind als der Eintrag im Knoten x.

Beispiel für einen binären Suchbaum



Suchbaumoperationen

Die oben genannte Suchbaumeigenschaft erlaubt eine effiziente Umsetzung der Suchbaumoperationen **lookup, insert** und **delete**. *lookup* sucht nach einem gegebenen Objekt durch systematisches Absteigen in den jeweils zuständigen Teilbaum. *insert* sucht zunächst die Stelle im Baum, bei der das einzufügende Objekt platziert sein müsste und hängt es dann dort ein. *delete* sucht zunächst die Stelle, an der das zu löschende Objekt vermutet wird und klinkt es dann aus dem Baum aus. Je nach Zahl der Söhne ist dieser Vorgang unterschiedlich kompliziert (siehe nächste Seite).

Komplexität

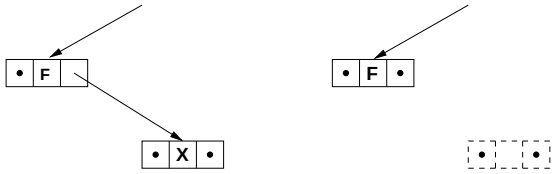
Der Aufwand der Suchbaumoperationen ist jeweils proportional zur Anzahl der Knoten auf dem Wege von der Wurzel bis zu dem betroffenen Knoten.

Best case:	Hat jeder Knoten 2 Söhne, so hat der Baum bei Höhe h $n = 2^h - 1$ Knoten. Die Anzahl der Weg-Knoten ist $h = \log(n)$.
Worst case:	Werden die Elemente sortiert eingegeben, so entartet der Baum zur Liste, der Aufwand beträgt dann $O(n)$.
Average case:	Für n zufällige Schlüssel beträgt der Aufwand $O(\log(n))$, genauer: Die Wege sind um 39 % länger als im best case.

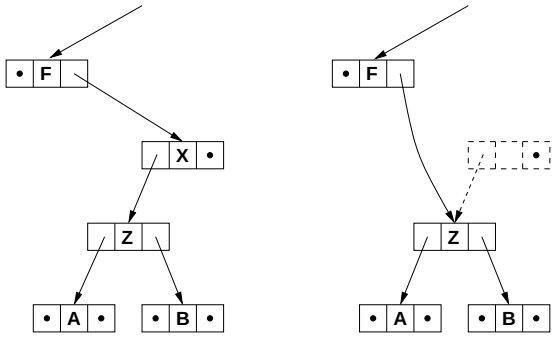
In den folgenden drei Grafiken wird mit einem schwarzen Punkt der `null`-Verweis visualisiert.

Sei x das Element in dem zu löschenden Knoten des Suchbaums.

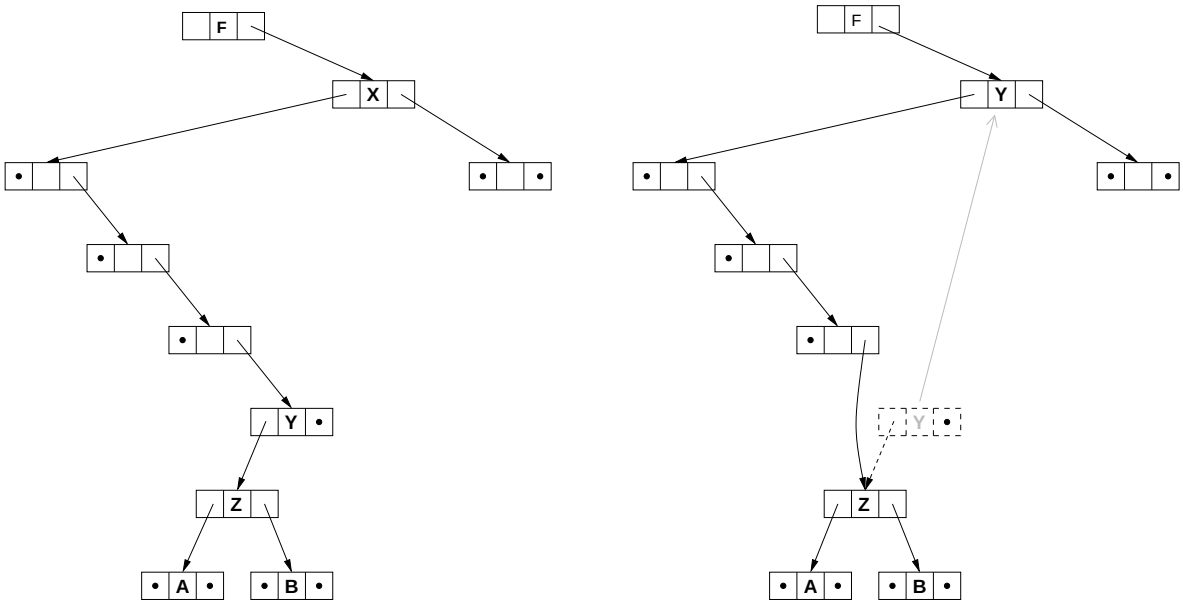
Löschen eines Knotens ohne Söhne



Löschen eines Knotens mit einem Sohn



Löschen eines Knotens mit zwei Söhnen



Um die Formulierung des Suchbaumalgorithmus unabhängig von den dort gespeicherten Objekten zu ermöglichen, wird das von Java bereitgestellte Interface `Comparable` verwendet, welches folgende Methode ankündigt:

```
int compareTo(Object x)
// liefert  0, wenn this ist inhaltlich gleich x
// liefert <0, wenn this ist inhaltlich kleiner als x
// liefert >0; wenn this ist inhaltlich groesser als  x
```

Alle Objekte einer Klasse, die miteinander verglichen werden sollen, müssen dieses Interface implementieren. Dies ist zum Beispiel bei der Klasse Character der Fall, so dass zwei Characterobjekte `a` und `b` über den Aufruf `a.compareTo(b)` zueinander in Beziehung gesetzt werden können.

```
/************************ StudentComparable.java ****************************/
/* Erweiterung der Klasse Student, damit er sich vergleichen kann            */

public class StudentComparable extends Student implements Comparable {

  public StudentComparable(String vn, String nn, int t, int m, int j, String f, int jsb) {
    super(vn,nn,t,m,j,f,jsb);
  }

  public int compareTo(Object x) {
      if (!(x instanceof StudentComparable)) throw new RuntimeException("...");
      return this.mat_nr - ((StudentComparable)x).mat_nr;
  }
}
```

Der Suchbaum wiederum implementiert ein Interface `Menge`, welches die grundsätzlichen Methoden zum Verwalten einer Menge von Objekten ankündigt: `lookup`, `insert` und `delete`.

```
/******************************  Menge.java *********************************/
/** Interface zum Verwalten einer Menge von Comparable-Objekten.             */

public interface Menge {

    public boolean empty();                 // testet, ob Menge leer ist

    public Comparable lookup(Comparable x); // Sucht x in Menge
                                            // liefert Comparable-Object,
                                            // falls gefunden, null sonst

    public boolean insert(Comparable x);    // versucht x in Menge einzufuegen
                                            // liefert true, falls erfolgreich
                                            // liefert false sonst

    public boolean delete(Comparable x);    // versucht x aus Menge zu entfernen
                                            // liefert true, falls erfolgreich
                                            // liefert false sonst
}
```

```
/*****************************  SuchBaum.java  *******************************/

/** Implementation eines binaeren Suchbaums ueber Comparable-Objekten.
 *
 *  Bereitgestellt werden die im Interface Menge angekuendigten Methoden
 *  lookup, insert und delete als oeffentliche Methoden.
 *
 *  Die Methode delete verwendet zusaetzlich noch die private Methode findMax.
 */

public class SuchBaum extends VerweisBaum implements Menge {

  public Comparable lookup(Comparable x) {
                                        // sucht x im SuchBaum
    Knoten k = wurzel;                  // beginne bei wurzel
    while (k != null){                  // solange ein Knoten vorliegt
      if (x.compareTo(k.inhalt)<0 )     // vergleiche x mit Knoteninhalt
        k = k.links;                    // steige je nach Vergleich in den
      else if (x.compareTo(k.inhalt)>0) // linken oder rechten Teilbaum hinab
        k = k.rechts;
      else                              // oder (d.h. bei Gleichheit)
        return (Comparable)k.inhalt;    // liefere das Objekt zurueck
    }
                                        // Wenn kein Knoten mehr vorhanden
    return null;                        // (letztes k ist Blatt) liefere null
  }



  public boolean insert(Comparable x) {  // versucht x einzufuegen

    if (wurzel == null) {               // Wenn Baum leer
      wurzel = new Knoten(x);           // fuege neuen Knoten ein
      return true;                      // melde Erfolg
    }
    else {                              // andernfalls
      Knoten vater = null;
      Knoten k = wurzel;                // Hilfsknoten
      while (k != null) {               // solange ein Knoten vorliegt
        vater = k;                      // merke aktuellen Knoten als Vater
        if (x.compareTo(k.inhalt)<0)    // falls x < k.inhalt
          k = k.links;                  // steige nach links ab
        else
        if (x.compareTo(k.inhalt) > 0)  // falls x > k.inhalt
          k  = k.rechts;                // steige nach rechts ab
        else                            // falls x und k.inhalt gleich,
          return false;                 // melde Misserfolg
      }

      if (x.compareTo(vater.inhalt) < 0) // falls x kleiner als vater
        vater.links = new Knoten(x);    // haenge neuen Knoten links an
      else                              // falls x groesser als vater
        vater.rechts = new Knoten(x);   // haenge neuen Knoten rechts an
      return true;                      // melde Erfolg
    }
  }
```

```
  public boolean delete(Comparable x){   // loescht x aus SuchBaum

    Knoten vater = null,                 // Hilfsknoten vater und sohn
           sohn  = wurzel;               // sohn wird mit wurzel initialisiert

                                         // suche zu loeschendes Element:
    while (sohn != null &&               // solange sohn noch vorhanden und
          x.compareTo(sohn.inhalt) !=0){ // x nicht gefunden
      vater = sohn;                      // gehe eine Ebene tiefer:
      if (x.compareTo(sohn.inhalt)<0)    // sohn wird zum neuen vater,
        sohn = sohn.links;               // linker oder rechter sohn des alten
      else                               // sohns wird neuer sohn, je nachdem in
        sohn = sohn.rechts;              // welchem Teilbaum x sein muesste
    }
                                         // finde Ersatzknoten fuer Element:
    if (sohn != null) {                  // wenn sohn != null, wurde x gefunden
      Knoten ersatzKnoten;               // Ersatzknoten, ersetzt sohn im Baum

      if (sohn.links == null)            // wenn linker Sohn von sohn leer,
        ersatzKnoten = sohn.rechts;      // Ersatzknoten ist re. Sohn von sohn
      else if (sohn.rechts == null)      // wenn rechter Sohn von sohn leer,
        ersatzKnoten = sohn.links;       // Ersatzknoten ist li. Sohn von sohn
      else {                             // wenn beide Soehne vorhanden,
        ersatzKnoten = sohn;             // Ersatzknoten ist sohn selbst
                                         // hole groesstes Elem. im li. Teilbaum
        Comparable tmp = (Comparable)(findMax(ersatzKnoten.links).inhalt);
        delete(tmp);                     // loesche dieses Element aus dem Baum
        ersatzKnoten.inhalt = tmp;       // setze dieses Element in ersatzKnoten
      }
                                         // Setze ersatzKnoten in Baum ein:
      if (vater == null)                 // Sonderfall: Element war in wurzel
        wurzel = ersatzKnoten;           // ersatzKnoten ist neuer Wurzelknoten
      else if (x.compareTo(vater.inhalt) < 0) // andernfalls untersuche, ob
        vater.links = ersatzKnoten;      // ersatzKnoten neuer linker oder
      else                               // rechter Sohn des Vaters wird
        vater.rechts = ersatzKnoten;
      return true;                       // melde Erfolg
    }
    else                                 // Element wurde nicht gefunden,
      return false;                      // melde Misserfolg
  }

  private Knoten findMax(Knoten t) {     // liefert Knoten mit maximalen Element

    while (t.rechts != null)             // solange rechter Sohn vorhanden,
      t = t.rechts;                      // steige mit t in den re. Teilbaum ab
    return t;                            // liefere t
  }
}
```

```
/*****************************  SuchBaumTest.java  ***************************/
import AlgoTools.IO;

/** Testet den SuchBaum mit Character-Objekten.  */

public class SuchBaumTest {

  public static void main(String[] argv) {

    SuchBaum s = new SuchBaum();

                                        // Elemente in SuchBaum einfuegen
    char[] eingabe = IO.readChars("Bitte Zeichen fuer insert: ");

    Comparable x = new Character('?');
    s.insert(x);

    for (int i = 0; i < eingabe.length; i++) {

      if (s.insert(new Character(eingabe[i])))
        IO.println(eingabe[i] + " eingefuegt");
      else
        IO.println(eingabe[i] + " konnte nicht eingefuegt werden");
    }

    IO.print("Inorder: ");               // Ausgabe: Inorder-Traversierung
    Traverse.inorder(s);
    IO.println();
                                        // Elemente im SuchBaum suchen
    eingabe = IO.readChars("Bitte Zeichen fuer lookup: ");

    for (int i = 0; i < eingabe.length; i++) {

      Character c = (Character) s.lookup(new Character(eingabe[i]));

      if (c == null)
        IO.println(eingabe[i] + " konnte nicht gefunden werden");
      else
        IO.println(c + " gefunden");
    }

                                        // Elemente aus dem SuchBaum loeschen
    eingabe = IO.readChars("Bitte Zeichen fuer delete: ");

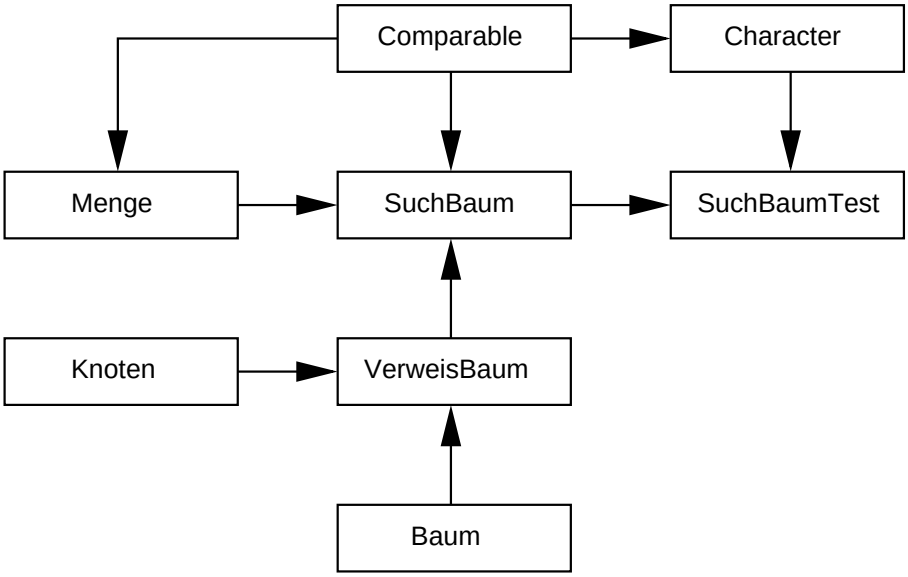
    for (int i = 0; i < eingabe.length; i++) {

      if (s.delete(new Character(eingabe[i])))
        IO.println(eingabe[i] + " geloescht");
      else
        IO.println(eingabe[i] + " konnte nicht geloescht werden");

      IO.print("Inorder: ");               // Ausgabe: Inorder-Traversierung
      Traverse.inorder(s);
      IO.println();
    }
  }
}
```

Abhängigkeiten

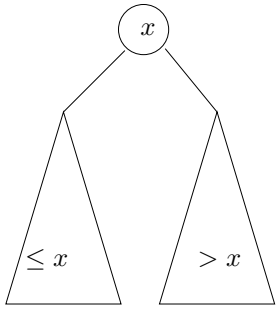
Folgende Grafik verdeutlicht die Abhängigkeiten der zum Suchen von `Character` verwendeten Klassen und Interfaces:



Multimenge

Zur Verwaltung einer Multimenge (Elemente sind ggf. mehrfach vorhanden) kann ein Suchbaum wie folgt verwendet werden:

1. Möglichkeit: Elemente doppelt halten



2. Möglichkeit: Zähler im Knoten mitführen

Beim Einfügen: Zähler hochzählen, sofern Element schon vorhanden, sonst einfügen.

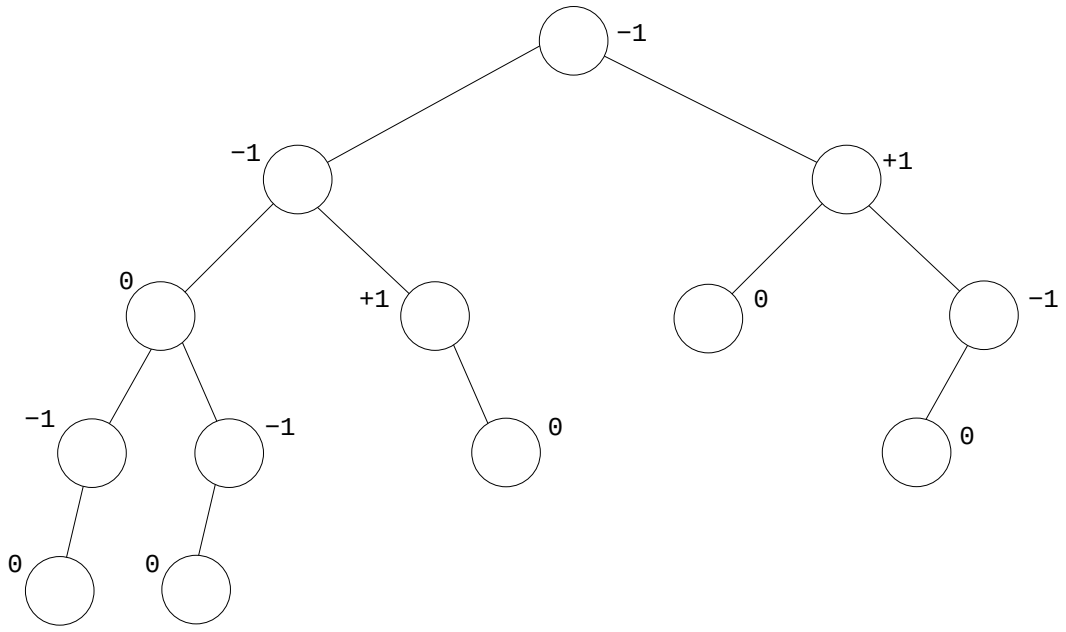
Beim Löschen: Zähler herunterzählen, sofern mehrfach da, sonst entfernen.

9.6 AVL-Baum

(benannt nach Adelson-Velskii und Landis, 1962)

Def.: Ein Knoten eines binären Baumes heißt *ausgeglichen* oder *balanciert*, wenn sich die Höhen seiner beiden Söhne um höchstens 1 unterscheiden.

Def.: Ein binärer Suchbaum, in dem jeder Knoten ausgeglichen ist, heißt *AVL-Baum*.



Sei $bal(b) =$ Höhe des rechten Teilbaums von b minus Höhe des linken Teilbaums von b.

Aufgrund der Ausgeglichenheit ist die Suche in einem AVL-Baum auch im ungünstigsten Fall von der Ordnung $O(\log n)$. Um das zu gewährleisten, muss nach jedem Einfügen oder Löschen die Ausgeglichenheit überprüft und ggf. wiederhergestellt werden. Hierzu werden längs des Weges vom eingefügten bzw. gelöschten Element bis zur Wurzel die Balance-Werte abgefragt und durch so genannte *Rotationen* repariert.

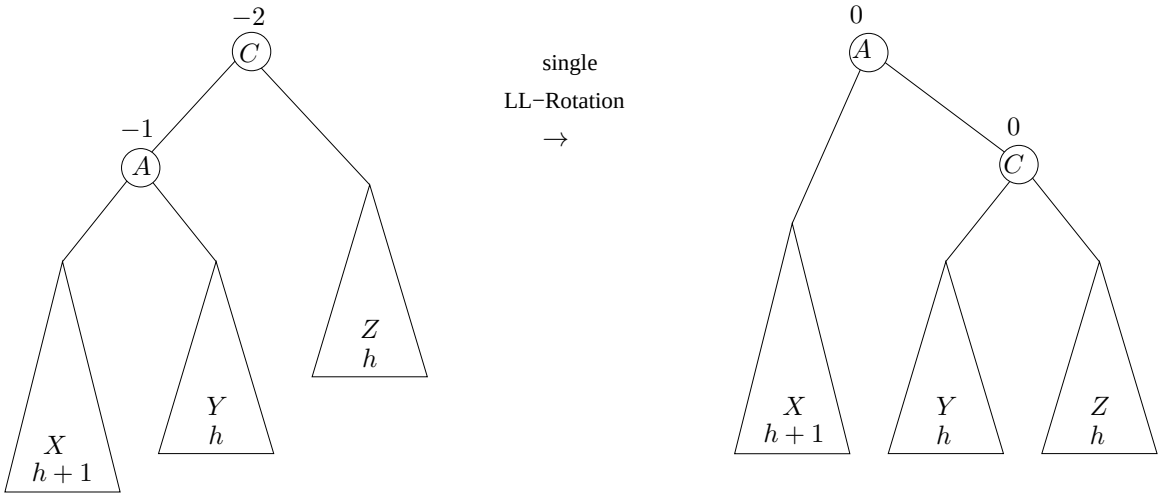
Während das Einfügen eines einzelnen Schlüssels *höchstens eine* Rotation erfordert, kann das Löschen eine Rotation für *jeden* Knoten entlang des Weges zur Wurzel verursachen.

Rotationen für AVL-Baum bei linksseitigem Übergewicht

Single LL-Rotation

Bei Einfügen in Teilbaum X: Höhe des gesamten Baums vorher und nachher gleich.

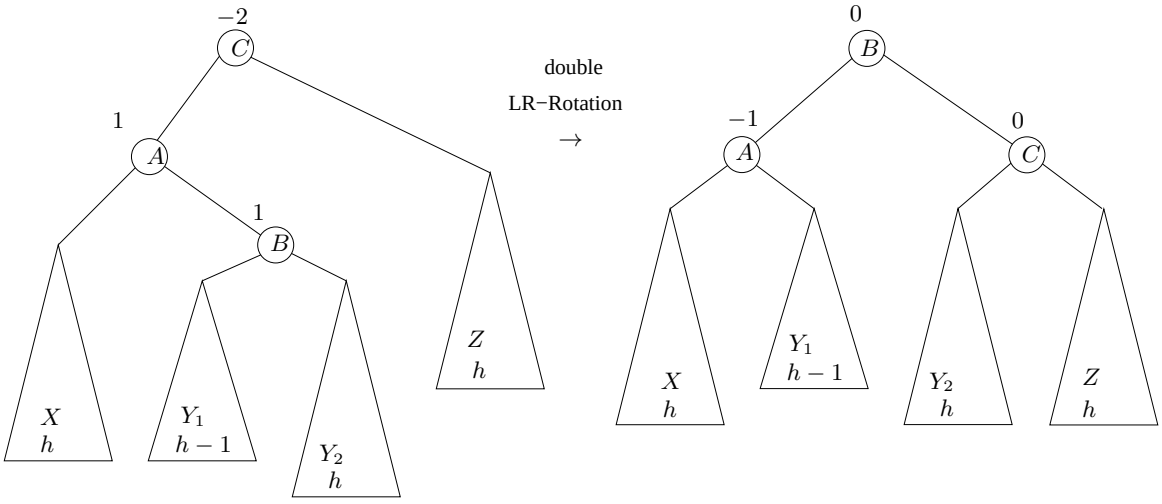
Bei Löschen im Teilbaum Z: Höhe des gesamten Baums vorher und nachher gleich oder nachher um eins kleiner.



Double LR-Rotation

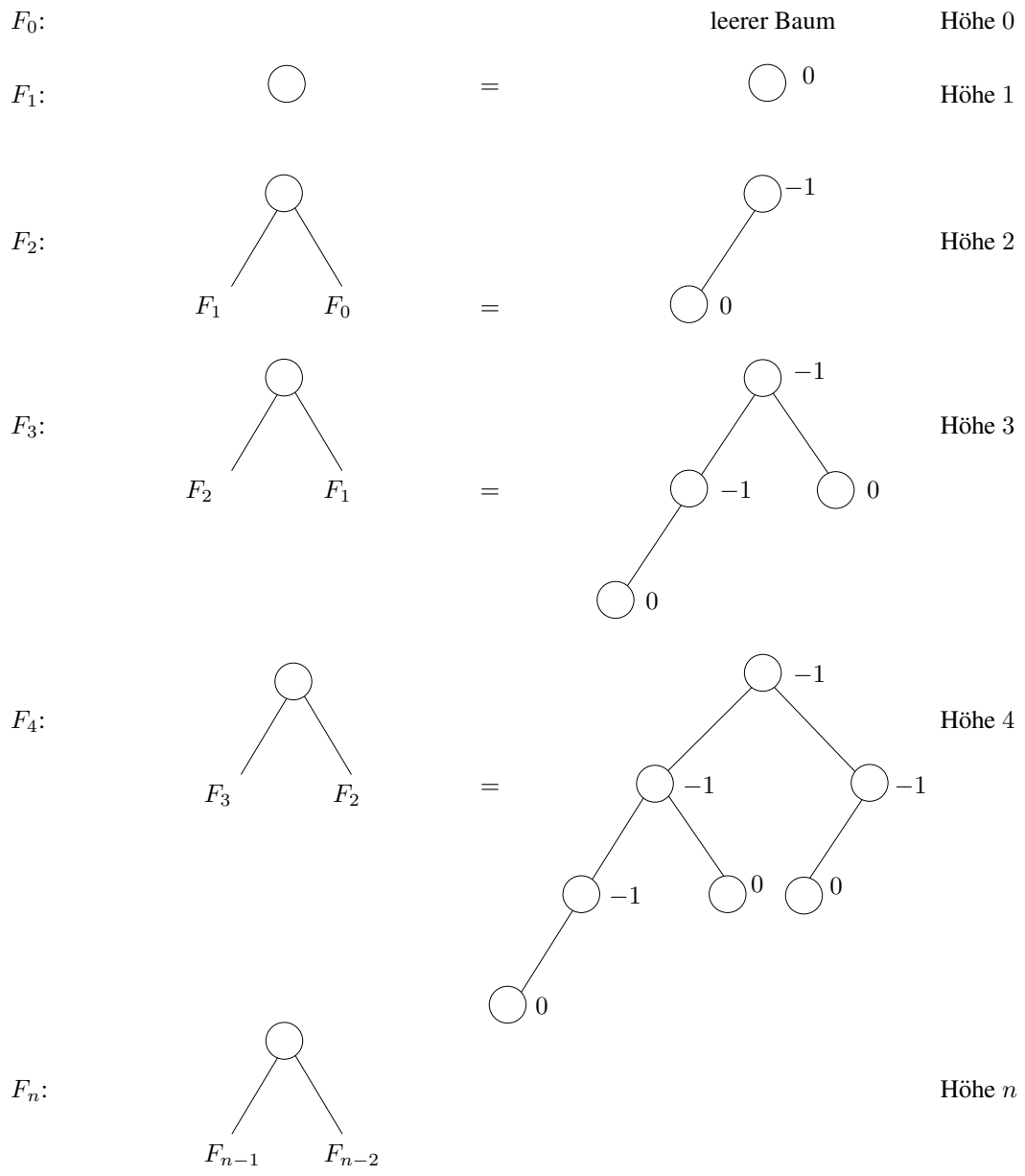
Bei Einfügen in Teilbaum Y_1 oder Y_2: Höhe des gesamten Baums vorher und nachher gleich.

Bei Löschen im Teilbaum Z: Höhe des gesamten Baums nachher um eins kleiner.



Bei rechtsseitigem Übergewicht werden die symmetrischen Rotationen “single RR” und “double RL” angewendet.

Minimal ausgeglichene AVL-Bäume sind *Fibonacci*-Bäume



Satz: Die Höhe eines AVL-Baumes mit n Knoten ist $\leq 1.45 \cdot \log n$, d.h. höchstens 45 % größer als erforderlich.

Bem.: Das Löschen eines Knotens in einem Fibonacci-AVL-Baum führt zu einer Reduktion der Höhe des Baumes. Das Löschen des Knotens mit dem größten Eintrag erfordert die größtmögliche Zahl von Rotationen: Im Fibonacci-Baum F_n werden dabei $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ LL-Rotationen durchgeführt.

```
/****************************  AVLKnoten.java  ****************************/

/** Klasse AVLKnoten mit einem Konstruktor.
 *
 *  Die Klasse AVLKnoten erweitert die vorhandene Klasse Knoten um das Datenfeld
 *  balance, die im AVLBaum fuer jeden Knoten abgespeichert wird.
 */

public class AVLKnoten extends Knoten {

  public int balance;                      // Balance

  public AVLKnoten(Object x) {             // erzeugt einen Knoten mit Inhalt x
    super(x);                              // Konstruktoraufruf von Knoten
  }

  public String toString() {               // fuer Ausgabe: Inhalt(Balance)
    return inhalt + "(" + balance + ")";
  }
}



/****************************  AVLBaum.java  ******************************/

import AlgoTools.IO;

/** Ein AVLBaum ist ein SuchBaum, bei dem alle Knoten ausgeglichen
 *  sind. Das heisst fuer jeden seiner Knoten unterscheiden sich
 *  die Hoehen seiner beiden Teilbaeume maximal um eins.
 */

public class AVLBaum extends SuchBaum {

  private class Status {                 // Innere Klasse zur Uebergabe eines
                                         // Status in der Rekursion
    private boolean unbalanciert;        // unbalanciert ist true, wenn beim
  }                                      // Einfuegen ein Sohn groesser geworden
                                         // ist.
                                         // simuliertes Call-by-Reference

  public static void printAVLBaum(Baum b, int tiefe) {

    if (!b.empty()) {                    // Wenn Baum nicht leer:
      printAVLBaum(b.right(), tiefe+1);  // rechten Teilbaum ausgeben
      for (int i=0; i<tiefe; i++)        // entsprechend der Rekursions-
        IO.print("    ");               // tiefe einruecken
      IO.println(((VerweisBaum)b).wurzel);// Wurzel und Balance ausgeben
      printAVLBaum(b.left(), tiefe+1);   // linken Teilbaum ausgeben
    }
  }
```

```
public boolean insert(Comparable x) {  // fuegt x in den AVLBaum ein: true,
                                       // wenn erfolgreich, sonst false.
                                       // Kapselt die Methode insertAVL
  return insertAVL(x, (AVLKnoten)wurzel, null, new Status());
}

                                       // tatsaechliche rekursive Methode zum
                                       // Einfuegen
private boolean insertAVL(Comparable x, AVLKnoten k, AVLKnoten v, Status s) {

  boolean eingefuegt;

  if (k == null) {                     // Unter einem Blatt:
                                       // Hier kann eingefuegt werden.
    if (v == null)                     // kein Vater:
      wurzel = new AVLKnoten(x);       // Einfuegen in der Wurzel
    else {                             // Vater vorhanden:
      if (x.compareTo(v.inhalt) < 0)   // Element mit Inhalt von Vater vergl.
        v.links = new AVLKnoten(x);    // und als entsprechend als linken oder
      else                             // rechten Sohn einfuegen
        v.rechts = new AVLKnoten(x);
      s.unbalanciert = true;           // Teilbaum wurde groesser
    }
    return true;                       // Einfuegen erfolgreich
  }

  else if (x.compareTo(k.inhalt) == 0) {
                                       // Element schon im AVLBaum vorhanden
    return false;                      // Einfuegen nicht erfolgreich
  }

  else {
    if (x.compareTo(k.inhalt) < 0) {   // Element ist kleiner als Knoteninhalt

      eingefuegt = insertAVL(x, (AVLKnoten)k.links, k, s);
                                       // Setze Suche im linken Teilbaum fort

      if (s.unbalanciert) {            // Falls linker Teilbaum hoeher wurde

        if (k.balance == 1) {          // alte Unausgeglichenheit ausgeglichen
          k.balance = 0;               // => neue Balance = 0
          s.unbalanciert = false;      // Teilbaum ist jetzt ausgeglichen
        }

        else if (k.balance == 0)       // Noch keineRotation noetig
          k.balance = -1;              // Balance wird angeglichen

        else {                         // Balance wird angeglichen
          if (((AVLKnoten)k.links).balance == -1)
            rotateLL(k);
          else
            rotateLR(k);
          s.unbalanciert = false;      // Teilbaum ist danach ausgeglichen
        }
      }
    }
```

```
    else {                              // Element groesser als Knoteninhalt

      eingefuegt = insertAVL(x, (AVLKnoten)k.rechts, k, s);
                                        // Setze Suche im rechten Teilbaum fort

      if (s.unbalanciert) {             // Falls recht. Teilbaum groesser wurde
        if (k.balance == -1) {          // alte Unausgeglichenheit ausgeglichen
          k.balance = 0;                // => neue Balance = 0
          s.unbalanciert = false;       // Teilbaum ist jetzt ausgeglichen
        }
        else if (k.balance == 0)        // Noch keineRotation noetig
          k.balance = 1;                // Balance wird angeglichen

        else {                          // Balance wird angeglichen
          if (((AVLKnoten)k.rechts).balance == 1)
            rotateRR(k);
          else
            rotateRL(k);
          s.unbalanciert = false;       // Teilbaum ist danach ausgeglichen
        }
      }
    }
    return eingefuegt;                  // true, falls im linken oder rechten
  }                                     // Teilbaum eingefuegt, sonst false
}
```

```
private void rotateLL(AVLKnoten k) {

  IO.println("LL-Rotation im Teilbaum mit Wurzel " + k.inhalt);

  AVLKnoten a1 = (AVLKnoten)k.links;   // Merke linken
  AVLKnoten a2 = (AVLKnoten)k.rechts;  // und rechten Teilbaum

                                       // Idee: Inhalt von a1 in die Wurzel k
  k.links = a1.links;                  // Setze neuen linken Sohn
  k.rechts = a1;                       // Setze neuen rechten Sohn
  a1.links = a1.rechts;                // Setze dessen linken und
  a1.rechts = a2;                      // rechten Sohn

  Object tmp = a1.inhalt;              // Ihnalt von k.rechts (==a1)
  a1.inhalt = k.inhalt;                // wird mit Wurzel k
  k.inhalt = tmp;                      // getauscht

  ((AVLKnoten)k.rechts).balance = 0;   // rechter teilbaum balanciert
  k.balance = 0;                       // Wurzel k balanciert
}


private void rotateLR(AVLKnoten k) {

  IO.println("LR-Rotation im Teilbaum mit Wurzel " + k.inhalt);

  AVLKnoten a1 = (AVLKnoten)k.links;   // Merke linken
  AVLKnoten a2 = (AVLKnoten)a1.rechts; // und dessen rechten Teilbaum

                                       // Idee: Inhalt von a2 in die Wurzel k
  a1.rechts = a2.links;                // Setze Soehne von a2
  a2.links = a2.rechts;
  a2.rechts = k.rechts;
  k.rechts = a2;                       // a2 wird neuer rechter Sohn

  Object tmp = k.inhalt;               // Inhalt von k.rechts (==a2)
  k.inhalt = a2.inhalt;                // wird mit Wurzel k
  a2.inhalt = tmp;                     // getauscht

  ((AVLKnoten)k.links).balance = (a2.balance == 1) ? -1 : 0;
                                       // neue Balance fuer linken Sohn

  ((AVLKnoten)k.rechts).balance = (a2.balance == -1) ? 1 : 0;
                                       // neue Blance fuer rechten Sohn

  k.balance = 0;                       // Wurzel k ist ausgeglichen
}
```

```
private void rotateRR(AVLKnoten k) {

  IO.println("RR-Rotation im Teilbaum mit Wurzel " + k.inhalt);

  AVLKnoten a1 = (AVLKnoten)k.rechts;  // Merke rechten
  AVLKnoten a2 = (AVLKnoten)k.links;   // und linken Teilbaum

                                       // Idee: Inhalt von a1 in die Wurzel k
  k.rechts = a1.rechts;                // Setze neuen rechten Sohn
  k.links = a1;                        // Setze neuen linken Sohn
  a1.rechts = a1.links;                // Setze dessen rechten und
  a1.links = a2;                       // linken Sohn

  Object tmp = a1.inhalt;              // Ihnalt von k.links (==a1)
  a1.inhalt = k.inhalt;                // wird mit Wurzel k
  k.inhalt = tmp;                      // getauscht

  ((AVLKnoten)k.links).balance = 0;    // linker teilbaum balanciert
  k.balance = 0;                       // Wurzel k balanciert
}


private void rotateRL(AVLKnoten k) {

  IO.println("RL-Rotation im Teilbaum mit Wurzel " + k.inhalt);

  AVLKnoten a1 = (AVLKnoten)k.rechts;  // Merke rechten
  AVLKnoten a2 = (AVLKnoten)a1.links;  // und dessen linken Teilbaum

                                       // Idee: Inhalt von a1 in die Wurzel k
  a1.links = a2.rechts;                // Setze Soehne von a2
  a2.rechts = a2.links;
  a2.links = k.links;
  k.links = a2;                        // a2 wird neuer linker Sohn

  Object tmp = k.inhalt;               // Inhalt von k.links (==a2)
  k.inhalt = a2.inhalt;                // wird mit Wurzel k
  a2.inhalt = tmp;                     // getauscht

  ((AVLKnoten)k.rechts).balance = (a2.balance == -1) ? 1 : 0;
                                       // neue Blance fuer rechten Sohn

  ((AVLKnoten)k.links).balance = (a2.balance == 1) ? -1 : 0;
                                       // neue Blance fuer rechten Sohn

  k.balance = 0;                       // Wurzel k ist ausgeglichen
}
```

```
public boolean delete(Comparable x) {  // loescht x im AVLBaum: true, wenn
                                       // erfolgreich, sonst false
                                       // Kapselt die Methode deleteAVL
  return deleteAVL(x, (AVLKnoten)wurzel, null, new Status());
}

                                       // tatsaechliche rekursive Methode zum
                                       // Loeschen
private boolean deleteAVL(Comparable x, AVLKnoten k, AVLKnoten v, Status s) {

  boolean geloescht;                   // true, wenn geloescht wurde

  if (k == null)                       // Unterhalb eines Blattes:
    return false;                      // Element nicht gefunden, es wurde
                                       // nicht geloescht

  else if (x.compareTo(k.inhalt) < 0) {// Element x kleiner als Knoteninhalt

    geloescht = deleteAVL(x, (AVLKnoten)k.links, k, s);
                                       // Setze Suche im linken Teilbaum fort

    if (s.unbalanciert)                // Falls linker Teilbaum kleiner
      balance1(k, s);                  // geworden ist, gleiche Hoehe an

    return geloescht;                  // true, falls im linken Teilbaum
  }                                    // geloescht wurde

  else if (x.compareTo(k.inhalt) > 0) {// Element x groesser als Knoteninhalt

    geloescht = deleteAVL(x, (AVLKnoten)k.rechts, k, s);
                                       // Setze Suche im rechten Teilbaum fort

    if (s.unbalanciert)                // Falls rechter Teilbaum kleiner
      balance2(k, s);                  // geworden ist, gleiche Hoehe an

    return geloescht;                  // true, falls im rechten Teilbaum
  }                                    // geloescht wurde

  else {                               // Knoten k enthaelt Element x
                                       // Wenn k keine Soehne hat
    if (k.rechts == null && k.links == null) {

      if (v == null)                   // Hat k keinen Vater, ist k die Wurzel
        wurzel = null;                 // Setze Wurzel auf null
      else {                           // k hat Vater

        if (x.compareTo(v.inhalt) < 0) // Ist k linker Sohn,
          v.links = null;              // loesche linken Sohn von Vater v
        else                           // Ist k rechter Sohn,
          v.rechts = null;             // loesche rechten Sohn von v
        s.unbalanciert = true;         // Hoehe hat sich geaendert
      }
    }
```

```
    else if (k.rechts == null) {       // Wenn k nur linken Sohn
      if (v != null) {                 // und einen Vater hat
        if (x.compareTo(v.inhalt) < 0) // setze ihn als neuen linken oder
          v.links = k.links;           // rechten Sohn des Vaters
        else
          v.rechts = k.links;

        s.unbalanciert = true;         // Hoehe hat sich geaendert
       }
        else                           // Wenn k keinen Vater hat war k Wurzel
          wurzel = k.links;            // Dann wird linker Sohn neue Wurzel
    }
    else if (k.links == null) {        // Wenn k nur rechten Sohn
      if (v != null) {                 // und einen Vater hat,
        if (x.compareTo(v.inhalt) < 0) // setze ihn als neuen linken oder
          v.links = k.rechts;          // rechten Sohn des Vaters
        else
          v.rechts = k.rechts;

        s.unbalanciert = true;         // Hoehe hat sich geaendert
       }
        else                           // Wenn k keinen Vater hat war k Wurzel
          wurzel = k.rechts;           // Dann wird rechter Sohn neue Wurzel
    }
    else {                             // k hat zwei Soehne
                                       // rufe im li. Sohn del() auf
      k.inhalt = del((AVLKnoten)k.links, k, s);
      if (s.unbalanciert)              // Falls linker Teilbaum kleiner
        balance1(k, s);                // geworden ist, gleiche Hoehe an
    }
    return true;                       // es wurde geloescht
  }
}


private Comparable del(AVLKnoten k, AVLKnoten v, Status s) {
                                       // Suche Ersatz fuer gel. Element
  Comparable ersatz;                   // Ersatz-Element

  if (k.rechts != null) {              // Wenn rechter Sohn vorhanden,
                                       //  suche dort weiter und loesche
    ersatz = del((AVLKnoten)k.rechts, k, s);
    if (s.unbalanciert)                // Falls rechter Teilbaum kleiner
      balance2(k, s);                  // geworden ist, gleiche Hoehe an
  }
  else {                               // kein rechter Sohn von k vorhanden

    ersatz = (Comparable)k.inhalt;     // Cast, da k.ihnalt vom Typ Object

    if (((Comparable)k.inhalt).compareTo(v.inhalt) > 0)
      v.rechts = k.links;              // setze linken Sohn von k an die
    else                               // Stelle von k
      v.links = k.links;
    s.unbalanciert = true;             // Hoehe hat sich geaendert
  }
  return ersatz;                       // Gib Ersatz-Element zurueck
```

```
  }
  private void balance1(AVLKnoten k, Status s) {
                                        // Unbalance, weil linker Ast kuerzer
    switch (k.balance) {
      case -1:                          // Balance geaendert, Hoehe nicht
        k.balance = 0;                  // ausgeglichen
        break;
      case 0:                           // Ausgeglichen
        k.balance = 1;
        s.unbalanciert = false;
        break;
      case 1:                           // Ausgleichen (Rotation) notwendig
        int b = ((AVLKnoten)k.rechts).balance;  // Balance des linken Sohnes
        if (b >= 0) {
          rotateRR(k);
          if (b == 0) {
            k.balance = -1;             // Gleiche Balancen an
            ((AVLKnoten)k.links).balance = 1;
            s.unbalanciert = false;
          }
        }
        else
          rotateRL(k);
    }
  }


  private void balance2(AVLKnoten k, Status s) {
                                        // Unbalance, weil rechter Ast kuerzer
    switch (k.balance) {
      case 1:                           // Balance geaendert, Hoehe nicht
        k.balance = 0;                  // ausgeglichen
        break;
      case 0:
        k.balance = -1;                 // Ausgeglichen
        s.unbalanciert = false;
        break;
      case -1:                          // Ausgleichen (Rotation) notwendig
        int b = ((AVLKnoten)k.links).balance; // Balance des rechten Sohnes
        if (b <= 0) {
          rotateLL(k);
          if (b == 0) {
            k.balance = 1;              // Gleiche Balancen an
            ((AVLKnoten)k.rechts).balance = -1;
            s.unbalanciert = false;
          }
        }
        else
          rotateLR(k);
    }
  }
}
```

```
/*****************************  AVLBaumTest.java  *****************************/

import AlgoTools.IO;

/** Klasse zum Testen des AVLBaums: Einfuegen und Loeschen von Character
 */

public class AVLBaumTest {

  public static void main(String[] argv) {

    AVLBaum b = new AVLBaum();

                                          // In den AVLBaum einfuegen
    char k = IO.readChar("Char in AVL-Baum einfuegen (Loeschen: \\n): ");

    while (k != '\n') {
      if (b.insert(new Character(k)))
        IO.println(k + " eingefuegt");
      else
        IO.println(k + " nicht eingefuegt");
      IO.println("AVL-Baum mit Balancen:");
      AVLBaum.printAVLBaum(b, 0);
      k = IO.readChar("Char in AVL-Baum einfuegen (Loeschen: \\n): ");
    }

    IO.println();

                                          // Aus dem AVLBaum loeschen
    k = IO.readChar("Char im AVL-Baum loeschen (Abbruch: \\n): ");

    while (k != '\n') {
      if (b.delete(new Character(k)))
        IO.println(k + " geloescht");
      else
        IO.println(k + " nicht geloescht");
      IO.println("AVL-Baum mit Balancen:");
      AVLBaum.printAVLBaum(b, 0);
      k = IO.readChar("Char im AVL-Baum loeschen (Abbruch: \\n): ");
    }
  }
}
```

Kapitel 10

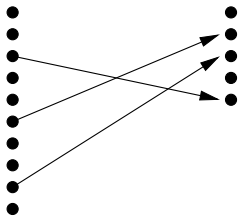
Hashing

Zum Abspeichern und Wiederfinden von Objekten wäre folgende Funktion hilfreich:

$$f : Objekte \to \mathbb{N}$$

Dann könnte Objekt x bei Adresse $f(x)$ gespeichert werden.

Problem: Anzahl der möglichen Elemente $\gg$ Anzahl der Adressen



mögliche Elemente N Adressen

Gegeben Adressen von 0 bis $N - 1$.

Sei `x` ein beliebiges Objekt. Dann ist

```
String s = x.toString();
```

seine Stringrepräsentation.

Sei $x = x_{n-1}x_{n-2} \ldots x_1x_0$ ein String, dann ist

$$f(x) = \left(\sum_{i=0}^{n-1} x_i \right) \text{ MOD } N$$

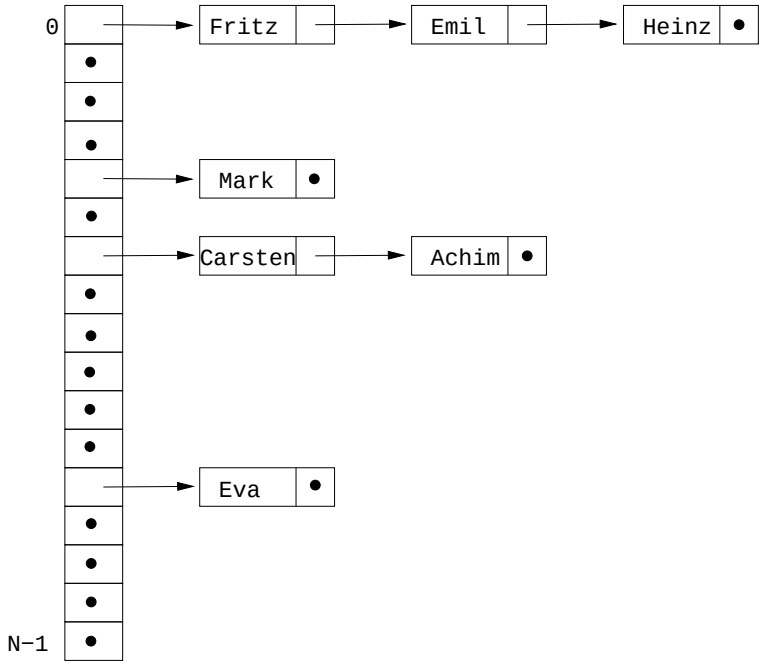
ein Beispiel für eine (sehr einfache) *Hashfunktion*.
Gilt: $f(x) = f(y)$, so liegt eine *Kollision* vor, die bei *offenem* und *geschlossenem* Hashing unterschiedlich behandelt wird.

10.1 Offenes Hashing

```
private Liste[] b; // Array von Buckets
                   // Jedes Bucket enthaelt Liste von Comparables
```

Alle Elemente x mit $f(x) = i$ befinden sich in der Liste $\mathtt{b}[i]$. Bei N Buckets und n Elementen enthält jede Liste im Mittel $\frac{n}{N}$ Elemente.

Implementation des offenen Hashings



10.2 Geschlossenes Hashing

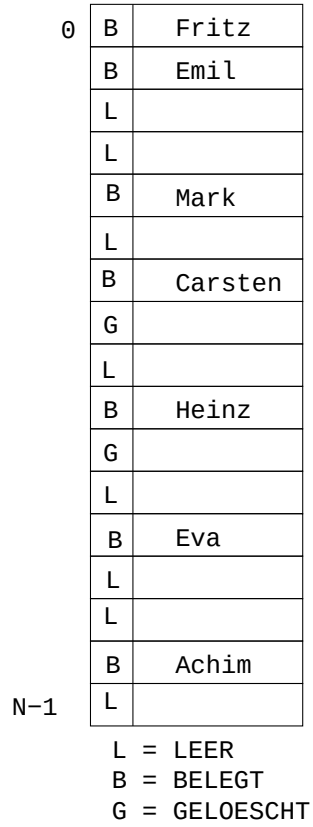
```
private Comparable[] inhalt;          // Array von Comparables
private byte[] zustand;               // Array von Zustaenden
                                      // LEER, BELEGT und GELOESCHT
```

Falls $y = f(x)$ schon belegt ist, so suche für x einen Alternativplatz.

$y+1, y+2, y+3, y+4, \ldots$	*lineares Sondieren*
$y+1, y+4, y+9, y+16, \ldots$	*quadratisches Sondieren*
$y + f_2(x), y + 2 \cdot f_2(x), ...$	*Double Hashing* (Schrittweite wird durch 2. Hashfunktion bestimmt)

Alle Berechnungen werden jeweils $mod(N)$ durchgeführt. Insgesamt werden höchstens $N-1$ Sondierschritte verursacht. Beim quadratischen Sondieren werden ggf. nicht alle Buckets besucht, aber mindestens $\sqrt{N}$ und höchstens $N/2$.

Implementation des geschlossenen Hashings



Beispiel:

Die beiden Abbildungen ergeben sich durch sukzessives Einfügen der Worte

`Fritz`, `Mark`, `Emil`, `Carsten`, `Ulf`, `Heinz`, `Lutz`, `Eva`, `Achim`

und anschließendes Löschen von

`Ulf`, `Lutz`

für $N = 17$ (Beim geschlossenen Hashing wurde quadratisches Sondieren angewendet).

Perfekte Hashfunktion

Gesucht wird eine Hashfunktion f, die auf den Elementen keine Kollision verursacht, z.B.:

$$\text{gesucht: } f \quad : \quad \{\text{braun}, \quad \text{rot}, \quad \text{blau}, \quad \text{violett}, \quad \text{türkis}\} \quad \rightarrow \quad \mathbb{N}$$

Länge(w)	=	5	3	4	7	6
Länge$(w) - 3$	=	2	0	1	4	3

$\Rightarrow f(w) = \text{Länge}(w) - 3 \in [0..4]$ ist perfekte Hashfunktion.

```
/***************************  OfHashing.java  ****************************/
/** Implementation des Interface Menge durch Array von Listen             */

public class OfHashing implements Menge {
  private Liste[] b ;                       // Array fuer Listen
  public OfHashing(int N) {                 // Konstruktor fuer Hashtabelle
    b  = new Liste[N];                      // besorge Platz fuer N Listen
    for (int i=0; i<N; i++)                 // konstruiere pro Index
        b[i]=new VerweisListe();            // eine leere Liste
  }
  ...
  public boolean empty() {                  // testet, ob Tabelle leer
    ...
  }
  public Comparable lookup(Comparable x) {  // versucht x nachzuschlagen
    ...
  }
  public boolean insert(Comparable x) {     // versucht x einzufuegen
    ...
  }
  public boolean delete(Comparable x) {     // versucht x zu loeschen
    ...
  }
}

/***************************  GeHashing.java  ****************************/
/** Implementation des Interface Menge mit einem Array von Objekten       */

public class GeHashing implements Menge {

  private final static byte LEER      = 0;  // noch nie belegt, jetzt frei
  private final static byte BELEGT    = 1;  // zur Zeit belegt
  private final static byte GELOESCHT = 2;  // war schon mal belegt, jetzt frei
  private Comparable[] inhalt;              // Array fuer Elemente
  private byte[]       zustand;             // Array fuer Zustaende

  public GeHashing(int N) {                 // Konstruktor fuer Hashtabelle
    inhalt  = new Comparable[N];            // besorge Platz fuer N Objekte
    zustand = new byte[N];                  // besorge Platz fuer N Zustaende
    for (int i=0; i<N; i++)                 // setze alle Zustaende
        zustand[i]=LEER;                    // auf LEER
  }
  ...
  public boolean empty() {                  // testet, Ob Tabelle leer
   ...
  }
  public Comparable lookup(Comparable x) {  // versucht, x nachzuschlagen
    ...
  }
  public boolean insert(Comparable x) {     // versucht, x einzufuegen
    ...
  }
  public boolean delete(Comparable x) {     // versucht, x zu loeschen
    ...
  }
}
```

Laufzeit bei geschlossenem Hashing

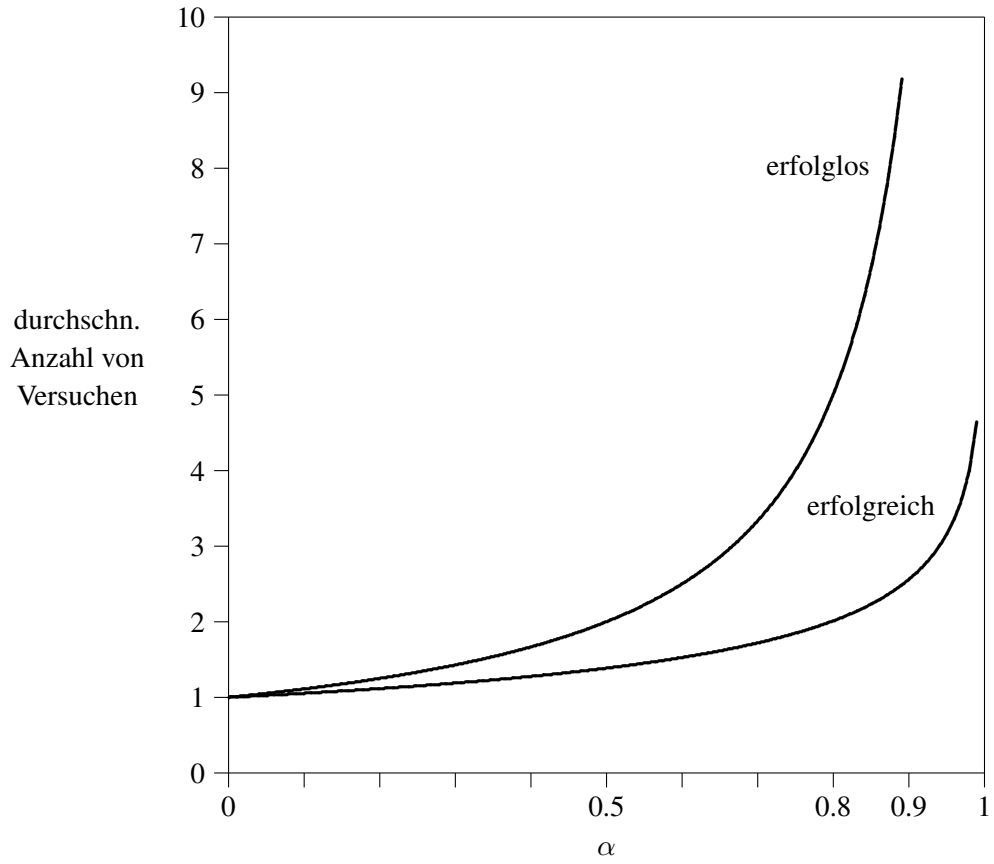
Sei n die Anzahl der in der Hashtabelle zur Zeit gespeicherten Objekte, sei N die Anzahl der möglichen Speicherpositionen.

Sei $\alpha = \frac{n}{N} \leq 1$ der Auslastungsfaktor.

Dann ergibt sich für die Anzahl der Schritte mit Double-Hashing als Kollisionsstrategie bei

- erfolgloser Suche: $\approx \frac{1}{1-\alpha} = 5.0$, für $\alpha = 0.8$
- erfolgreicher Suche: $\approx -\frac{ln(1-\alpha)}{\alpha} = 2.01$, für $\alpha = 0.8$

d.h., in 2 Schritten wird von 1.000.000 Elementen aus einer 1.250.000 großen Tabelle das richtige gefunden. (Zum Vergleich: der AVL-Baum benötigt dafür etwa 20 Vergleiche.)



Vergleich mit AVL-Baum

	AVL-Baum	Geschlossenes Hashing
Laufzeit	logarithmisch	konstant
Speicherbedarf	dynamisch wachsend	in Sprüngen wachsend
Sortierung	möglich durch Traversierung	nicht möglich

Kapitel 11

Java Collection Framework

Viele der in den vorigen Kapiteln vorgestellten Abstrakten Datentypen werden von der Sprache Java in ähnlicher Form angeboten. Es handelt sich dabei um Interfaces und dazu passende Implementationen, die im *Java Collection Framework* zusammengefasst sind.

11.1 Collection

Das Interface `Collection` verwaltet eine Sammlung von (nicht notwendigerweise verschiedenen) Objekten. Zum Testen auf inhaltliche Gleichheit muss die Object-Methode `equals` vom Anwender geeignet überschrieben werden. Folgende Methoden existieren (unter anderem):

```
boolean  add(Object o);      // fuegt Objekt o hinzu
boolean  contains(Object o); // testet, ob es Objekt x gibt
                             // mit x.equals(o)
boolean  remove(Object o);   // entfernt ein Objekt x
                             // mit x.equals(o)
boolean  isEmpty();          // testet, ob Collection leer
Iterator iterator();         // liefert einen Iterator
```

Ein Iterator ist ein Objekt, welches das Durchlaufen aller Objekte einer Collection erlaubt mithilfe seiner Methoden

```
boolean hasNext();           // liefert true, falls noch Objekte da
Object next();               // liefert naechstes Objekt
void remove();               // entfernt zuletzt geliefertes Objekt
```

Vom Interface `Collection` wird das Interface `Set` abgeleitet, welches eine Menge ohne Duplikate verwaltet. `Set` verfügt nur über die geerbten, aber über keine zusätzlichen Methoden.

Vom Interface `Collection` wird außerdem abgeleitet das Interface `List`, welches eine sequentiell angeordnetete Sammlung von Objekten verwaltet. Zu den geerbten Methoden kommen (unter anderem) hinzu

```
boolean add(int i, Object o); // fuegt Objekt o bei Position i ein
Object  get(int i );          // liefert Objekt an Position i
int indexOf(Object o);        // liefert Position von Objekt o
```

Vom Interface `Set` wird das Interface `SortedSet` abgeleitet, welches auf der zu verwaltenden Menge eine Ordnung verlangt, d.h. die Objekte sollten entweder das Interface `Comparable` implementieren oder über die `compare`-Methode eines `Comparator-Objektes` verglichen werden können.

Für das Interface `Set` gibt es die Implementation `HashSet()`, welche die bereits bekannten Methoden `add`, `contains` und `remove` über eine Hashorganisation löst. Der Konstruktor erlaubt die (optionale) Angabe einer initialen Kapazität. Hashing in Java basiert auf der Methode `hashCode()`, mit der beliebige Objekte eine ganze Zahl zugeordnet bekommen mit der Eigenschaft, dass diese innerhalb eines Programmlaufs bei mehrmaligem Aufrufen für dasselbe Objekt identisch sein muss und dass die hashCodes für zwei Objekte, die bzgl der `equals`-Methode gleich sind, übereinstimmen müssen.

Die Klasse `TreeSet` implementiert das Interface `SortedSet`. Hier werden die Objekte in einer Baumstruktur verwaltet.

Die Klasse `LinkedList` implementiert das Interface `List`. Hier werden die Objekte in einer doppelt verzeigerten Liste verwaltet.

Die Klasse `Stack` (entspricht dem Keller) verwaltet eine Menge von Objekten und erweitert das Interface `Collection` unter anderem mit den Methoden

```
Object push(Object x);  // legt ein Objekt oben auf den Stack
Object pop();           // entfernt das oberste Objekt vom Stack
Object peek();          // liefert das oberste Objekt vom Stack
boolean empty();        // testet, ob der Stack leer ist
```

Die Klasse `PriorityQueue` (entspricht dem Heap) verwaltet eine Menge von vergleichbaren Objekten und erweitert mit ihrer Implementation das Interface `Collection` unter anderem mit den Methoden

```
Object peek();          // liefert das billigste Objekt
Object poll();          // liefert und entfernt das billigste Objekt
```

Generische Klassen erlauben die Einschränkung des Wertebereichs: Beispielsweise wird durch

```
Set <Character> s = new HashSet <Character> ();
for (Character c : s) { // bearbeite c }
```

ein HashSet instantiiert, welcher ausschließlich Objekte vom Typ `Character` aufnimmt. Mit einer for-each-Schleife können alle Objekte des Sets durchlaufen werden.

11.2 Map

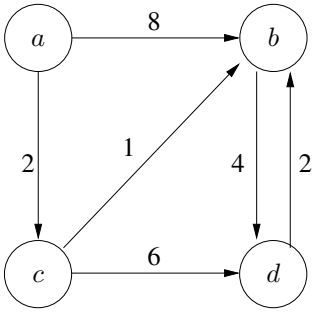
Das Interface `Map` repräsentiert eine Sammlung von sogenannten *Mappings* oder *Assoziationen* zwischen Schlüsseln und Werten. D.h. abgespeichert werden Objekt-Paare, von denen eine Komponente als Schlüssel fungiert und die andere Komponente den zu diesem Schlüssel gehörenden Wert darstellt. Implementiert wird das Interface durch die Klasse `HashMap`. Der Konstruktor erlaubt die (optionale) Angabe einer initialen Kapazität:

```
Map <Integer, String> h =              // besorge eine Map h
  new HashMap<Integer, String>(100);   // mit 100 Eintraegen
h.put(42, "Susi");                     // neuer Eintrag mit key 42
if (h.containsKey(42)) ...             // teste, ob key 42 enthalten
if (h.containsValue("Susi")) ...       // teste, ob Wert enthalten
String s = h.get(42);                  // besorge Wert zu key 42
h.remove(42);                          // entferne Eintrag zu key 42
Collection <String> c = h.values();    // besorge alle Werte
Iterator <String> iter = c.iterator(); // besorge Iterator
while (iter.hasNext()) {               // solange noch Objekte da
  s= iter.next();                      // besorge naechstes Objekt
  IO.println(s);                       // verarbeite Objekt
}
```

Kapitel 12

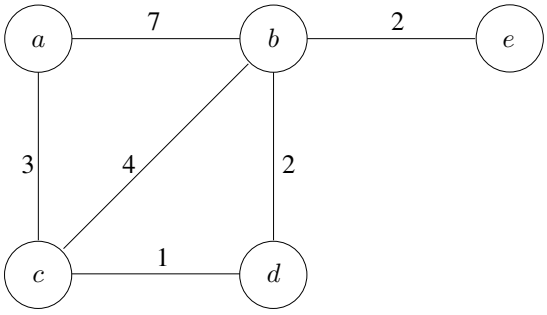
Graphen

Ein *gerichteter Graph* $G = (V, E)$ besteht aus *Knotenmenge* V und *Kantenmenge* $E \subseteq V \times V$



$V = \{a, b, c, d\}$
$E = \{(a, c), (a, b), (c, b), (c, d), (d, b), (b, d)\}$

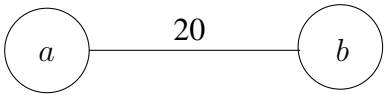
Ein *ungerichteter Graph* $G = (V, E)$ besteht aus *Knotenmenge* V und *Kantenmenge* $E \subseteq P_2(V)$
($P_2(V)$ sind alle 2-elementigen Teilmengen von V.)



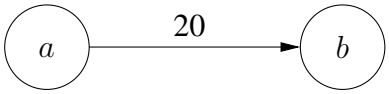
Kanten können gewichtet sein durch eine *Kostenfunktion* $c : E \to \mathbb{R}$.

Mit Graphen können binäre Beziehungen zwischen Objekten modelliert werden. Die Objekte werden durch die Knoten, die Beziehungen durch die Kanten modelliert.

1.) Orte mit Entfernungen



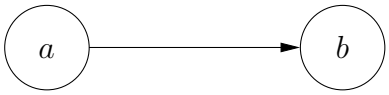
Länge
Kosten
Dauer



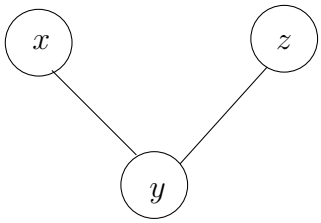
2.) Personen mit Beziehungen

verheiratet mit

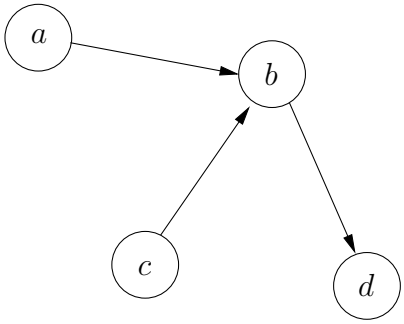
3.) Ereignisse mit Vorrang



a muss vor b geschehen



x ist zu y adjazent
x und y sind Nachbarn
x und z sind unabhängig
Der Grad von y ist 2



a ist Vorgänger von b
b ist Nachfolger von a
Eingangsgrad von b ist 2
Ausgangsgrad von b ist 1

Wir nennen eine Kante (x,y) inzident zum Knoten x und zum Knoten y. Ein *Weg* ist eine Folge von adjazenten Knoten.
Ein *Kreis* ist ein Weg, der zurück zum Startknoten führt.

12.1 Implementation von Graphen

Es sei jedem Knoten eindeutig ein Index zugeordnet. Für den gerichteten Graphen auf Seite 143 ergibt sich:

Index	Knoten
0	a
1	b
2	c
3	d

Implementation durch Adjazenzmatrizen

Unbewertete Kanten:

	0	1	2	3
0	0	1	1	0
1	0	0	0	1
2	0	1	0	1
3	0	1	0	0

$$m[i][j] := \begin{cases} 1, & \text{falls } (i,j) \in E \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Bewertete Kanten:

	0	1	2	3
0	0	8	2	∞
1	∞	0	∞	4
2	∞	1	0	6
3	∞	2	∞	0

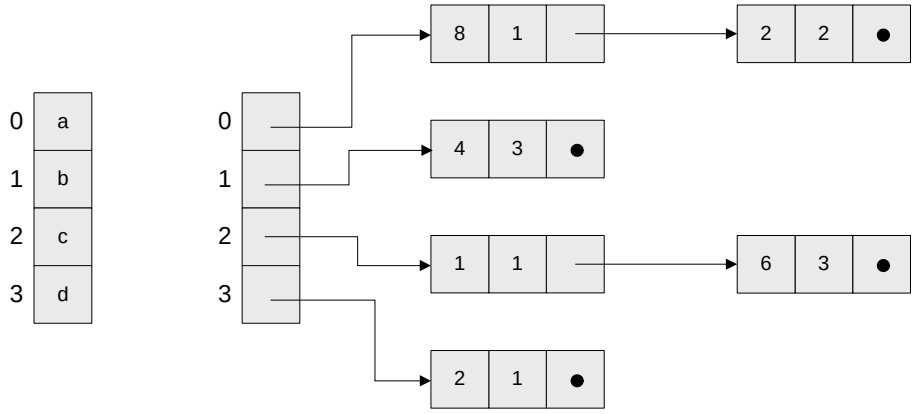
$$m[i][j] := \begin{cases} c(i,j), & \text{falls } (i,j) \in E \\ 0, & \text{falls } i = j \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

Platzbedarf $= O(|V|^2)$.
Direkter Zugriff auf Kante (i, j) in konstanter Zeit möglich.
Kein effizientes Verarbeiten der Nachbarn eines Knotens.
Sinnvoll bei dicht besetzten Graphen, d.h. Graphen mit quadrisch vielen Kanten.
Sinnvoll bei Algorithmen, die wahlfreien Zugriff auf eine Kante benötigen.

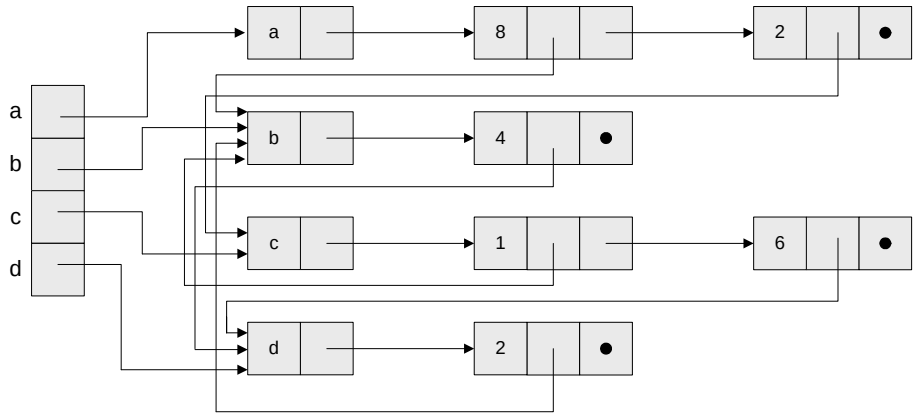
Implementation durch Adjazenzlisten

Wenn die Knoten des Graphen über ihren Index identifiziert werden, bietet sich zusätzlich zum Namens-Array ein Array von Integer-Listen an. Die an Position i beginnende Liste enthält die Nachbarn von i, genauer gesagt, sie enthält die Indizes der Nachbarn von i.

Für bewertete Graphen muss ein Listeneintrag innerhalb der i-ten Liste neben der Knoten-Nummer j auch die Kosten der Kante (i, j) enthalten. Für den gerichteten Graphen auf Seite 143 ergibt sich:



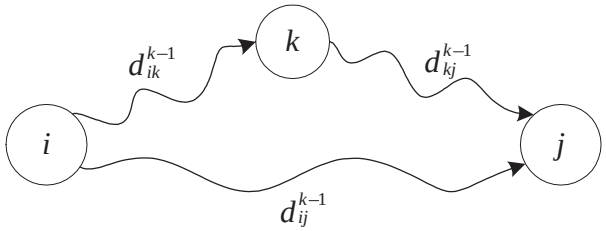
Eine objektorientierte Codierung würde die Knoten als Objekte modellieren, welche ihren Namen als String speichern und ihre Nachbarn als Kantenliste. Die Einträge der Kantenliste bestehen jeweils aus den Kosten der Kante und einem Verweis auf den Knoten. Über ein assoziatives Array (implementiert als Hash-Map) gelangt man vom Namen eines Knotens zu seinem Objekt. Für den gerichteten Graphen auf Seite 143 ergibt sich:



Platzbedarf =$O(|E|)$
Kein effizienter Zugriff auf Kante (x, y) möglich.
Sinnvoll bei dünn besetzten Graphen, d.h. Graphen mit nur linear vielen Kanten.
Sinnvoll bei Algorithmen, die, gegeben ein Knoten x, dessen Nachbarn verarbeiten müssen.

12.2 Graphalgorithmen für Adjazenzmatrizen

Die Klasse `Floyd` löst das *all-pairs-shortest-path*-Problem mit dem Algorithmus von Floyd. Für eine $(n \times n)$-Ausgangsmatrix C mit den Kantenkosten werden sukzessive die $(n \times n)$-Matrizen $D^0,\ D^1,\ D^2, ...,\ D^{n-1}$ berechnet. Die Matrix D^k enthält die Kosten der kürzesten Wege zwischen zwei Knoten i und j, die als Zwischenknoten nur die Knoten $0, 1, 2, ..., k$ verwenden. Setze $D^{-1} := C$. Dann lässt sich $D^k_{i,j}$ errechnen durch das Minimum von $D^{k-1}_{i,j}$ und $D^{k-1}_{i,k} + D^{k-1}_{k,j}$.



Um auch die zugehörige Kantenfolge rekonstruieren zu können, wird parallel dazu eine Folge von $(n \times n)$-Matrizen $P^0,\ P^1,\ P^2, ...,\ P^{n-1}$ aufgebaut, die an Position $P^k_{i,j}$ den vorletzten Knoten auf dem kürzesten Weg von i nach j notiert, der nur über die Zwischenknoten $0, 1, 2, ..., k$ läuft.

```
/***************************** Floyd.java ***********************************/

/** berechnet alle kuerzesten Wege und ihre Kosten mit Algorithmus von Floyd  */
/*  der Graph darf keine Kreise mit negativen Kosten haben                    */

public class Floyd {

  public static void floyd (int n,          // Dimension der Matrix
                            double [][] c,  // Adjazenzmatrix mit Kosten
                            double [][] d,  // errechnete Distanzmatrix
                            int    [][] p){ // errechnete Wegematrix

    int i, j, k;                            // Laufvariablen
    for (i=0; i < n; i++) {                 // fuer jede Zeile
      for (j=0; j < n; j++) {               // fuer jede Spalte
        d[i][j] = c[i][j];                  // initialisiere mit Kantenkosten
        p[i][j] = i;                        // vorletzter Knoten
      }                                     // vorhanden ist nun D hoch -1
    }

    for (k=0; k < n; k++) {                 // fuer jede Knotenobergrenze
      for (i=0; i < n; i++) {               // fuer jede Zeile
        for (j=0; j < n; j++) {             // fuer jede Spalte
          if (d[i][k] + d[k][j] < d[i][j]){ // falls Verkuerzung moeglich
            d[i][j] = d[i][k] + d[k][j];    // notiere Verkuerzung
            p[i][j] = p[k][j];              // notiere vorletzten Knoten
          }                                 // vorhanden ist nun D hoch k
        }
      }
    }
  }
}
```

```
/*************************** FloydTest.java ********************************/

import AlgoTools.IO;

/** testet den Floyd-Algorithmus                                           */

public class FloydTest {

  final static double INF = Double.MAX_VALUE;       // Konstante unendlich

  private static void printMatrix(double[][]m){     // druckt Kostenmatrix
    for (int i=0; i < m.length; i++) {              // fuer jede Zeile
      for (int j=0; j < m[i].length; j++)           // fuer jede Spalte
        if (m[i][j]==INF) IO.print("      ");       // falls unendlich: INF
                    else IO.print(m[i][j],6,1);     // sonst: Kantenkosten
      IO.println();
    } IO.println();
  }

  private static void printPath(int[][]P,int i,int j){// druckt Knotenfolge
    if (i==j) IO.print(i); else {                    // erster Knoten des Weges
      printPath(P, i, P[i][j]);                      // Anfangsfolge des Weges
      IO.print("-" + j);                             // letzter Knoten des Weges
    }
  }

  private static void printPathMatrix(int[][]P,double[][]D){// druckt Wegematrix
    for (int i=0; i < P.length; i++){
      for (int j=0; j < P[i].length; j++){
        if (D[i][j]==INF) IO.print("???     ");     // falls kein Weg existiert
        else {                                      // falls es Weg gibt
          printPath(P,i,j);                         // drucke Knotenfolge
          IO.print("    ");                         // Abstand zum naechsten Weg
        }
      } IO.println();
    } IO.println();
  }

  public static void main (String[]argv) {          // Hauptprogramm
    final int N = 4;                                // Konstante
    double[][]C = {{0.0,  8.0,  2.0,  INF },        // Kostenmatrix
                   {INF,  0.0,  INF,  4.0 },
                   {INF,  1.0,  0.0,  6.0 },
                   {INF,  2.0,  INF,  0.0 }};
    double[][]D = new double[N][N];                 // errechnete Distanzkosten
    int   [][]P = new int   [N][N];                 // vorletzter Knoten auf Weg

    IO.println("Gegebene Kostenmatrix:");
    printMatrix(C);                                 // drucke Kostenmatrix
    Floyd.floyd(N,C,D,P);                           // berechne kuerzeste Wege
    IO.println("Errechnete Distanzmatrix:");
    printMatrix(D);                                 // drucke Kostenmatrix
    IO.println("Errechnete Wegematrix:");
    printPathMatrix(P,D);                           // drucke Wegematrix
  }
}
```

12.3 Implementation für gerichtete Graphen durch Adjazenzlisten

Jeder Knoten der Klasse `Vertex` enthält eine Liste von Kanten; jede Kante der Klasse `Edge` besteht aus Kosten und Zielknoten. Die Klasse `Graph` realisiert den Graph als Assoziation von Knotennamen und Knoten. Die Klasse `GraphIO` liest einen Graph aus einer Datei ein und zeigt seine Adjazenzlisten an. Die Klasse `Result` enthält Routinen zum Anzeigen einer Lösung, welche von dem jeweiligen Algorithmus in den Arbeitsvariablen der Knoten hinterlegt wurde. Die Klasse `GraphTest.java` liest einen gerichteten Graphen ein und wendet verschiedene Graphalgorithmen darauf an.

```
/************************** Vertex.java ************************************/
/** Klasse zur Repraesentation eines Knoten                                 */
import java.util.*;

public class Vertex implements Comparable<Vertex> { // wegen Priority-Queue

  public String      name;          // Name des Knoten               (fix)
  public List<Edge>  edges ;        // Nachbarn als Kantenliste      (fix)
  public int         nr;            // Knotennummer                  (errechnet)
  public int         indegree;      // Eingangsgrad                  (errechnet)
  public double      dist;          // Kosten fuer diesen Knoten     (errechnet)
  public boolean     seen;          // Besuchs-Status                (errechnet)
  public Vertex      prev;          // Vorgaenger fuer diesen Knoten (errechnet)

  public Vertex ( String s ) {      // Konstruktor fuer Knoten
    name = s;                       // initialisiere Name des Knoten
    edges = new LinkedList<Edge>(); // initialisiere Nachbarschaftsliste
  }

  public boolean hasEdge(Vertex w) {// testet, ob Kante zu w besteht
    for (Edge e : edges)            // fuer jede ausgehende Nachbarkante pruefe
      if (e.dest == w)              // falls Zielknoten mit w uebereinstimmt
        return true;                // melde Erfolg
    return false;                   // ansonsten: melde Misserfolg
  }

  public int compareTo(Vertex other) { // vergl. Kosten mit anderem Vertex
     if (other.dist>dist) return -1;
     if (other.dist<dist) return  1;
     return 0;
  }
}


/************************** Edge.java * ************************************/
/** Klasse zur Repraesentation einer Kante                                  */
import java.util.*;
public class Edge {
  public Vertex dest;                // Zielknoten, zu dem die Kante fuehrt
  public double cost;                // Kosten dieser Kante
  public Edge (Vertex d, double c) {  // Konstruktor fuer Kante
    dest = d;                        // initialisiere Zielknoten
    cost = c;                        // initialisiere Kantenkosten
  }
}
```

```
/************************** Graph.java ************************************/

import java.util.*;

/** Klasse zur Implementation eines Graphen basierend auf Vertex und Edge     */

/*  Der Graph wird implementiert als HashMap <String, Vertex>, d.h. als eine  */
/*  Hashtabelle mit Keys vom Typ String und Values vom Typ Knoten             */


public class Graph {

  private Map <String, Vertex> graph;          // Datenstruktur fuer Graph

  public Graph() {                             // leerer Graph wird angelegt
    graph = new HashMap <String, Vertex> ();   // als HashMap von String,Vertex
  }

  public boolean isEmpty(){                    // liefert true, falls Graph leer
    return graph.isEmpty();                    // mit isEmpty() von HashMap
  }

  public int size(){                           // liefert die Anzahl der Knoten
    return graph.size();                       // mit size() von HashMap
  }

  public Collection <Vertex> vertices(){       // liefert Knoten als Collection
    return graph.values();                     // mit values() von HashMap
  }

  public Vertex getVertex(String s){  // liefere Knoten zu String
    Vertex v = graph.get(s);          // besorge Knoten zu Knotennamen
    if (v==null) {                    // falls nicht gefunden
      v = new Vertex(s);              // lege neuen Knoten an
      graph.put(s, v);                // fuege Namen und Knoten in HashMap ein
    }
    return v;                         // liefere gefundenen oder neuen Knoten
  }

  public void addEdge(String source,  // fuege Kante ein von Knotennamen source
                      String dest,    // zu Knotennamen dest
                      double cost) {  // mit Kosten cost
    Vertex v = getVertex(source);     // finde Knoten v zum Startnamen
    Vertex w = getVertex(dest);       // finde Knoten w zum Zielnamen
    v.edges.add(new Edge(w, cost));   // fuege Kante (v,w) mit Kosten cost ein
  }

}
```

```
/********************** GraphIO.java ****************************************/

import java.lang.*;
import java.util.*;
import java.io.*;
import AlgoTools.IO;

/** Routinen zum Einlesen eines gerichteten Graphen                          */
/*  Der Graph wird realisiert durch eine HashMap, welche                     */
/*  den Namen des Knoten auf den Knoten abbildet                             */

public class GraphIO {

  public static Graph readGraph() {   // liest Graph aus Datei ein
    Graph g = new Graph();
    try {
      BufferedReader f = new BufferedReader(new FileReader("graph.dat"));
      String zeile;
      while ( (zeile = f.readLine()) != null) {
        StringTokenizer st = new StringTokenizer(zeile);
        String source = st.nextToken();
        String dest   = st.nextToken();
        double cost   = Double.parseDouble(st.nextToken());
        g.addEdge(source,dest,cost);
      }
    } catch (Exception e) {IO.println(e);}
    return g;
  }

  public static void printGraph(Graph g) { // gibt Graph aus
    IO.println("Adjazenzlisten des Graphen:");
    for (Vertex v : g.vertices()) {
      for (Edge e : v.edges) {
        IO.print("(" + v.name + "," + e.dest.name + ")" + e.cost + "  ");
      }
      IO.println();
    }
    IO.println();
  }
}
```

```
/*************************** Result.java ************************************/

import java.util.*;
import AlgoTools.IO;

/** Routinen zum Anzeigen der Loesungen, kodiert in den Arbeitsvariablen      */

public class Result {

  private static void printPath(Vertex dest) {
    if (dest.prev != null) {
      printPath(dest.prev);
      IO.print(" -> ");
    } IO.print(dest.name);
  }

  public static void printPath(Graph g, Vertex w) {
    if (w.dist==Double.MAX_VALUE) IO.println(w.name + " nicht erreichbar");
    else {
      IO.println("Der kuerzeste Weg (mit Gesamtkosten "+w.dist+") lautet: ");
      printPath(w);
    }
    IO.println(); IO.println();
  }

  public static void printHamilton(Graph g, Vertex last) {
    if (last==null) IO.println("Graph hat keinen Hamiltonkreis"); else {
      IO.println("Der Hamiltonkreis lautet:");
      printPath(last);
    }
    IO.println(); IO.println();
  }

  public static void printTopo( Graph g ){
    boolean erfolgreich=true;
    for (Vertex v : g.vertices())
      if (v.nr<0) erfolgreich=false;
    if (erfolgreich) {
      IO.println("Die Sortierung lautet:");
      for (Vertex v : g.vertices())
        IO.println("Knoten " + v.name + " erhaelt Nr. " + v.nr);
    } else IO.println("Graph kann nicht topologisch sortiert werden");
    IO.println();
  }

  public static void printTraverse( Graph g ){
    IO.println("Traversierungsreihenfolge:");
    for (Vertex v : g.vertices()){
      IO.println(v.name + " erhaelt Nr. " + v.nr);
    }
    IO.println();
  }
}
```

```
/************************ GraphTest.java ************************************/

import java.util.*;

/** testet die Graph-Algorithmen                                            */

public class GraphTest {

  public static void main(String [] argv) {

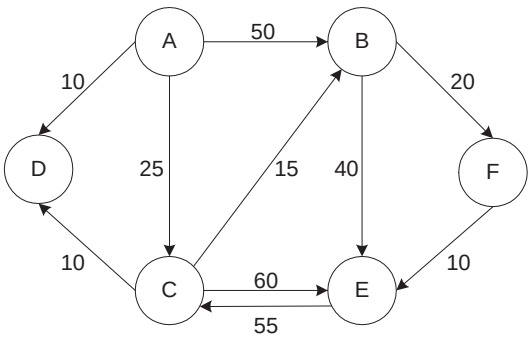
    Graph g = GraphIO.readGraph();              // Graph einlesen
    GraphIO.printGraph(g);                      // Graph ausgeben

    GraphTraverse.tiefensuche(g);               // Tiefensuche-Traversierung
    Result.printTraverse(g);                    // Traversierung ausgeben

    TopoSort.sortGraph(g);                      // topologisch sortieren
    Result.printTopo(g);                        // Sortierung ausgeben

    Dijkstra.dijkstra(g, g.getVertex("Dortmund"));    // kuerzeste Wege von A berechnen
    Result.printPath(g, g.getVertex("Bremen"));     // kuerzesten Weg zu E ausgeben

    Vertex v = Hamilton.hamilton(g,             // Hamilton-Kreis berechnen
                          g.getVertex("Osnabrueck"));  // dabei bei A beginnen
    Result.printHamilton(g,v);                  // Hamilton-Kreis ausgeben
  }
}
```



gerichteter, bewerteter Graph:
gezeigt sind Knotennamen und Kantenkosten

```
Hamburg Bremen  121
Hamburg Flensburg   157
Hamburg Hannover    152
Hamburg Berlin  289
Flensburg   Hamburg 157
Bremen  Hamburg 121
Bremen  Osnabrueck   126
Osnabrueck   Bremen  126
Osnabrueck   Muenster 61
Muenster Osnabrueck   61
Muenster Dortmund    71
Dortmund    Muenster 71
Dortmund    Hannover    213
Dortmund    Kassel  167
Dortmund    FFAM    221
Dortmund    Koeln    95
Hannover    Hamburg 152
Hannover    Berlin  286
Hannover    Kassel  165
Hannover    Dortmund    213
Koeln    Dortmund    95
Koeln    FFAM    193
Koeln    Stuttgart   368
Stuttgart   Koeln    368
Stuttgart   Muenchen 231
Muenchen Stuttgart   231
Muenchen FFAM    392
FFAM    Koeln    193
FFAM    Dortmund    221
Kassel  Dortmund    167
Kassel  Hannover    165
Berlin  Hannover    286
Berlin  Hamburg 289
```

Eingabedatei graph.dat mit Graphbeschreibung

```
Adjazenzlisten des Graphen:

(E,C)25.0
(F,E)10.0
(A,B)50.0  (A,C)25.0  (A,D)10.0
(B,E)85.0  (B,F)20.0
(C,B)15.0  (C,D)10.0  (C,E)60.0

Traversierungsreihenfolge:
D erhaelt Nr. 0
E erhaelt Nr. 1
F erhaelt Nr. 4
A erhaelt Nr. 5
B erhaelt Nr. 3
C erhaelt Nr. 2

Graph kann nicht topologisch sortiert werden

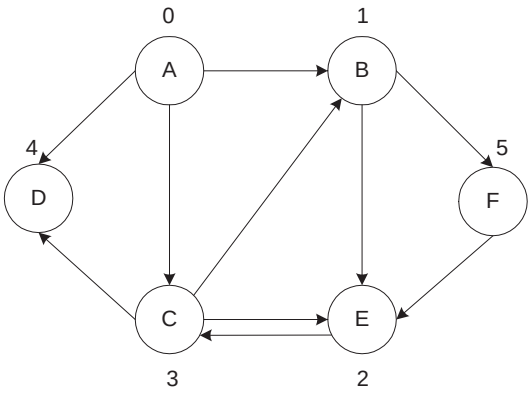
Der kuerzeste Weg (mit Gesamtkosten 70.0) lautet:
A -> C -> B -> F -> E

Graph hat keinen Hamiltonkreis
```

von GraphTest.java erzeugte Ausgabe result.dat

12.4 Traversieren von Graphen

Eine Graphentraverse auf einem gerichteten Graphen lässt sich durch eine rekursiv organisierte *Tiefensuche* implementieren, wobei die Nummern an Knoten vergeben werden in der Reihenfolge, in der sie besucht werden. Bei nicht zusammenhängenden Graphen muss dazu die Suche mehrfach gestartet werden.



Rekursive Tiefensuche: Nummerierung entstanden durch Startknoten A

```
/*****************************GraphTraverse.java*****************************/
import java.util.*;

public class GraphTraverse  {

  static int id;                              // Variable zum Numerieren

  public static void tiefensuche(Graph g){
    id = 0;                                   // Initialisiere Zaehler
    for (Vertex v : g.vertices())             // fuer jeden Knoten
      v.seen = false;                         // markiere als nicht besucht
    for (Vertex v : g.vertices())             // fuer jeden Knoten
      if (!v.seen) visit(v);                  // falls v nicht besucht: besuche v
  }

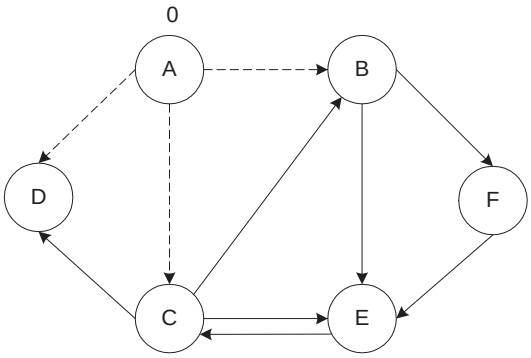
  private static void visit(Vertex v) {
    v.nr   = id++;                            // vergib naechste Nummer
    v.seen = true ;                           // markiere als besucht
    for (Edge e : v.edges){                   // fuer jede ausgehende Kante
      Vertex w = e.dest;                      // sei w der Nachbarknoten
      if (!w.seen) visit(w);                  // falls w nicht besucht: besuche w
    }
  }
}
```

12.5 Topologisches Sortieren

Das Problem des Topologischen Sortierens auf einem gerichteten Graphen besteht darin, eine Knoten-Nummerierung f : V $\rightarrow \mathbb{N}$ zu finden, die mit den Kantenrichtungen kompatibel ist, d.h. $(x, y) \in E \Rightarrow f(x) < f(y)$.

Begonnen wird die Nummerierung bei einem Knoten mit Eingangsgrad 0 (der die erste Nummer erhalten kann).

Sei x der Knoten, der zuletzt nummeriert wurde. Dann werden nun die von x ausgehenden Kanten (virtuell) entfernt und somit die (virtuellen) Eingangsgrade der von ihm erreichbaren Knoten vermindert. Verwendet wird dabei eine Schlange, welche solche Knoten speichert, deren virtueller Eingangsgrad im Laufe der Berechnung inzwischen auf 0 gesunken ist und daher für die nächste zu vergebene Nummer infrage kommt. Auf diese Weise wird verhindert, dass immer wieder nach einem Knoten mit Eingangsgrad 0 gesucht werden muss.



Topologisches Sortieren: Knoten A nummeriert, Nachfolgekanten entfernt

```
/************************ TopoSort.java ************************************/

import java.util.*;

/** Topologisches Sortieren eines gerichteten Graphen                      */
/*  Verwendet wird eine Schlange, welche die Knoten aufnimmt,              */
/*  deren Eingangsgrade auf 0 gesunken sind                                */

public class TopoSort {

  public static void sortGraph ( Graph g) {

    for (Vertex v : g.vertices()){     // fuer jeden Knoten
      v.indegree = 0;                  // setze seinen Eingangsgrad auf 0
      v.nr = -1;                       // vergib ungueltige Nummer
    }

    for (Vertex v : g.vertices())      // fuer jeden Knoten
      for (Edge e : v.edges)           // fuer jeden Nachbarknoten
        e.dest.indegree++;             // erhoehe seinen Eingangsgrad um 1

    List<Vertex> l                     // Liste von Knoten, die
       = new LinkedList<Vertex>();     // inzwischen den Eingangsgrad 0 haben

    for (Vertex v : g.vertices())      // jeden Knoten mit Eingangsgrad 0
      if (v.indegree==0) l.add(v);     // fuege hinten in die Liste ein

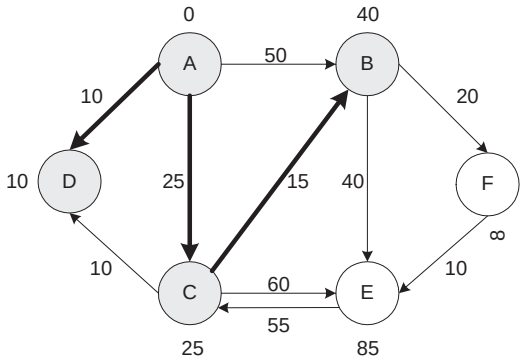
    int id = 0;                        // initialisiere Laufnummer
    while (!l.isEmpty()) {             // solange Liste nicht leer
      Vertex v = l.remove(0);          // besorge und entferne Kopf aus Liste
      v.nr = id++;                     // vergib naechste Nummer
      for (Edge e : v.edges){          // fuer jede ausgehende Kante
        Vertex w = e.dest;             // betrachte den zugehoerigen Knoten
        w.indegree--;                  // erniedrige seinen Eingangsgrad
        if (w.indegree==0)             // falls der Eingangsgrad auf 0 sinkt
          l.add(w);                    // fuege Knoten hinten in Liste ein
      }
    }
  }
}
```

12.6 Kürzeste Wege

Das Problem der kürzesten Wege besteht darin, in einem gerichteten, mit nichtnegativen Kosten gewichteten Graphen die kürzesten Wege von einem Startknoten zu allen anderen Knoten auszurechnen (single source shortest paths).

Der Algorithmus von Dijkstra verwendet dabei eine Priority-Queue ($\approx$ Heap aus Kapitel 7), welche die vorläufige Distanz eines Weges vom Startknoten zu einem Zielknoten in Form eines mit dieser Distanz bewerteten Knotens speichert.

Zu Beginn haben alle Knoten die vorläufige Distanz ∞; der Startknoten erhält die vorläufige Disstanz 0. Jeweils der billigste Knoten aus der Menge der vorläufig markierten Knoten kann seine endgültige Distanz erhalten und fügt ggf. die durch ihn verkürzten vorläufigen Distanzen zu seinen Nachbarn in Form von Knoten in die Schlange ein. Weil die Priority-Queue die Kosten der in ihr gespeicherten Wege nicht verringern kann, werden Wege, deren Kosten sich verringert haben, als neue Knoten eingefügt und die Schlange enthält daher für manche Knoten Mehrfacheinträge mit unterschiedlich teuren Distanzen. Solche Einträge können nach dem Entfernen aus der Schlange ignoriert werden, wenn der Knoten inzwischen als besucht (`seen`) markiert wurde.



Single-Source-Shortest-Path:
Grau gefärbt sind bereits markierte Knoten

```
/************************ Dijkstra.java ************************************/

import java.util.*;

/** implementiert den single source shortest path Algorithmus nach Dijkstra   */
/*                                                                             */
/*  Es sind nur nichtnegative Kantenkosten zugelassen                          */
/*                                                                             */
/*  Verwendet wird eine Priority-Queue der Knoten, gewichtet mit den Kosten    */
/*  des vorlaeufig kuerzesten Weges vom Startknoten bis zu diesem Knoten       */

public class Dijkstra {

  public static void dijkstra ( Graph g, Vertex start) {

    PriorityQueue<Vertex> p =        // Priority-Queue zum Verwalten der Laenge
        new PriorityQueue<Vertex>(); // des kuerzesten Weges bis zum Knoten

    for (Vertex v : g.vertices()){   // fuer jeden Knoten
      v.dist = Double.MAX_VALUE;     // Entfernung ist unendlich
      v.seen = false;                // Knoten noch nicht gesehen
      v.prev = null;                 // Vorgaenger noch nicht ermittelt
    }

    start.dist = 0;                  // endgueltige Kosten zum Startknoten
    p.add(start);                    // erster Eintrag in PriorityQueue

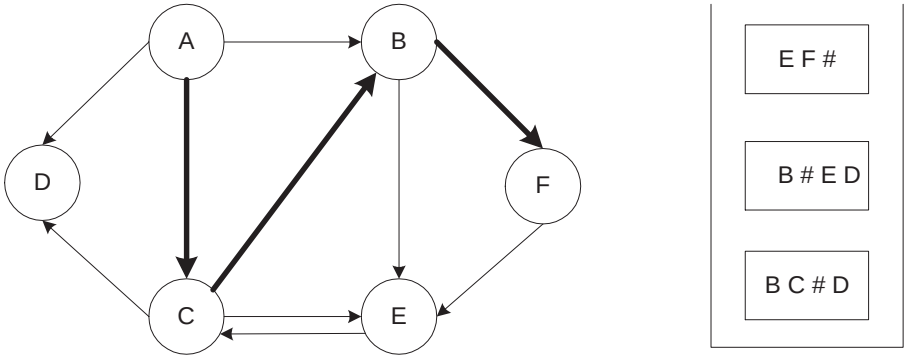
    while (!p.isEmpty()){            // solange noch Eintraege in Priority-Queue

      Vertex v = p.poll();           // billigster Eintrag in PriorityQueue
      if (v.seen) continue;          // falls schon bearbeitet: ignorieren
      v.seen = true;                 // als bearbeitet markieren

      for (Edge e : v.edges){        // fuer jede Nachbarkante e von v tue
        Vertex w = e.dest;           // besorge Zielknoten w
        double c = e.cost;           // besorge Kosten c zum Zielknoten w
        if (c<0) throw new           // falls Kantenkosten negativ
        RuntimeException("Negativ"); // melde Fehler
        if (w.dist > v.dist + c) {   // falls Verkuerzung moeglich
          w.dist = v.dist + c;       // berechne Verkuerzung
          w.prev = v;                // notiere verursachenden Vorgaenger
          p.add(w);                  // neuer Eintrag in PriorityQueue
        }
      }
    }
  }
}
```

12.7 Hamiltonkreis

Das Problem des Hamiltonkreises besteht darin, in einem Graphen einen Rundweg zu finden, der jeden Knoten genau einmal besucht und beim Ausgangsknoten wieder endet. Verwendet wird dabei ein Keller von Adjazenzlisten zur Organisation eines Backtracking-Ansatzes. Um die Exploration bei einer oben auf dem Keller liegenden teilweise abgearbeiteten Adjazenzliste an der richtigen Stelle fortführen zu können, bestehen die Kellereinträge aus den Iteratoren der Adjazenzlisten. Diese können jeweils den nächsten, noch nicht ausprobierten Nachbarn liefern.



Suche nach Hamiltonkreis: markiert ist der aktuelle Weg.
Im Keller liegen Iteratoren für Adjazenzlisten, ihr Fortschritt ist markiert mit #

```
/************************* Hamilton.java  ***********************************/

import java.util.*;

/** sucht einen Hamiltonkreis in einem gerichteten Graphen                   */
/*  verwendet wird ein Keller mit den Adjazenzlisten in Form von Iteratoren  */

public class Hamilton {

  public static Vertex hamilton(Graph g, Vertex start) {
    for (Vertex v : g.vertices()) {       // fuer jeden Knoten
      v.seen = false;                     // noch nicht gesehen
      v.prev = null;                      // noch kein Vorgaenger bekannt
    }
    Iterator iter;                        // Iteratorvariable
    Stack<Iterator> s = new Stack<Iterator>(); // Stack fuer Adjazenz-Iteratoren
    boolean entschieden = false;          // bisher ist noch nichts entschieden
    s.push(start.edges.iterator());       // Nachbarn des Startknoten auf Stack
    start.seen = true;                    // Startknoten gilt als besucht
    Vertex last = start;                  // last ist der zur Zeit letzte Knoten
    int k = 1;                            // Weglaenge = 1

    Vertex v=null;                        // Hilfsknoten
    while (!entschieden) {                // solange noch nicht entschieden
      iter = s.peek();                    // oberster Adjazenz-Iterator
      boolean verlaengerbar=false;        // bisher keine weiteren gefunden
      while (!verlaengerbar && iter.hasNext()) { // solange Hoffnung besteht
        Edge e = (Edge)iter.next();       // e ist naechste Kante
        v = e.dest;                       // v ist potentielle Verlaengerung
        if (!v.seen) verlaengerbar=true;  // Verlaengerung gefunden
      }
      if (verlaengerbar) {                // falls Verlaengerung moeglich
        k++;                              // erhoehe Weglaenge
        v.seen = true;                    // markiere v als besucht
        v.prev = last;                    // trage last als Vorgaenger ein
        last   = v;                       // v ist jetzt der letzte
        if (k==g.size()&&v.hasEdge(start))// Weg lang genug und Kante zu Start
          entschieden = true;             // endgueltig Kreis gefunden
        else s.push(v.edges.iterator());  // pushe Nachfolger von v auf Stack
      } else  {                           // keine Verlaengerung moeglich
        s.pop();                          // entferne oberste Adjazenzliste
        last.seen = false;                // last gilt als nicht besucht
        last = last.prev;                 // Vorgaenger ist nun der letzte
        k--;                              // Weglaenge erniedrigen
        if (s.empty()) entschieden=true;  // endgueltig keinen Kreis gefunden
      }
    }
    if (entschieden && s.empty())
        return null;                      // kein Kreis gefunden
        else return v;                    // liefere letzten Knoten des Kreises
  }
}
```

12.8 Maximaler Fluss

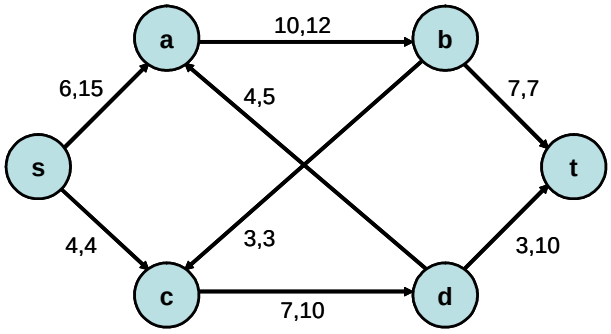
Gegeben sei ein gerichteter Graph $G = (V, E)$, gewichtet mit einer Funktion $c : E \to \mathbb{N}$. Die Gewichte $c(i, j)$ werden hier als Kantenkapazitäten interpretiert und beschreiben die maximale Zahl von Transporteinheiten, die pro Zeiteinheit durch diese Kante fließen können. Zwei Knoten aus V sind als Quelle s und die Senke t ausgezeichnet. Modelliert werden mit einem solchen Graph die Transportkapazitäten zwischen diversen Orten und gesucht wird der maximale Fluss, der von der Quelle ausgeht, durch die inneren Knoten fließt und an der Senke ankommt. Dabei muss die Flussmenge, die in einen inneren Knoten hineinfließt, übereinstimmen mit der Flussmenge, die aus ihm herausfließt.

Formal: Sei $V(i)$ die Menge aller Vorgängerknoten von Knoten i. Sei $N(i)$ die Menge aller Nachfolgerknoten von Knoten i. Ein **Fluss** ist eine Funktion $f : E \to \mathbb{N}$ mit:

- $0 \leq f(i, j) \leq c(i, j)$
- für alle $i \in V \backslash \{s, t\}$ gilt: $\sum_{a \in V(i)} f(a, i) = \sum_{b \in N(i)} f(i, b)$,

Gesucht ist nun der maximale Gesamtfluss $F = \sum_{b \in N(s)} f(s, b) = \sum_{a \in V(t)} f(a, t)$.

Im folgenden Graph ist jede Kante beschriftet mit ihrem aktuellen Fluss und ihrer maximalen Kapazität. Es fließen insgesamt 10 Einheiten von der Quelle s zur Senke t.



Um den maximalen Fluss zu berechnen, sucht man zunächst sogenannte erweiternde Wege. Ein **erweiternder** Weg in G ist eine Folge von Knoten, beginnend bei s und endend bei t, wobei für zwei aufeinanderfolgende Knoten i und j gilt:

- es existiert eine Vorwärtskante $(i, j) \in E$ mit $f(i, j) < c(i, j)$ oder
- es existiert eine Rückwärtskante $(j, i) \in E$ mit $f(j, i) > 0$.

Längs eines erweiternden Weges kann der Fluss vergrößert werden, indem man durch die Vorwärtskanten zusätzliche Einheiten fließen lässt und in den Rückwärtskanten den Fluss verringert.

Der Algorithmus von Ford-Fulkerson versucht solange den aktuellen Fluss längs eines erweiternden Weges zu erhöhen, wie dies möglich ist:

```
Sei f = 0 der initiale Fluss;
repeat {
   Suche bzgl. f einen erweiternden Weg von s nach t;
   falls gefunden: erhöhe f längs dieses Weges;
} while möglich
```

Die Korrektheit dieses Algorithmus folgt unmittelbar aus dem folgenden Satz:

$$\text{Ein Fluss } f \text{ ist maximal} \iff \text{Es gibt keinen erweiternden Weg.}$$

$\Leftarrow$

Sei ein **Cut** des Graphen $G = (V, E)$ definiert als eine Partition der Knotenmenge V in S und $\overline{S}$, so dass gilt: $s \in S$ und $t \in V \backslash S = \overline{S}$. Sei dann $(S, \overline{S}) := \{(x, y) \in E | x \in S, y \in \overline{S}\}$. Die Kapazität eines Cuts ist dann festgelegt durch $c(S) := \sum_{e \in (S,\overline{S})} c(e)$.

Daraus folgt unmittelbar der folgende Satz:

Sei f ein Fluss der Größe F, sei S ein Cut von G

$$\Rightarrow F = \sum_{e \in (S,\overline{S})} f(e) - \sum_{e \in (\overline{S},S)} f(e).$$

Der Fluss ist also an jedem beliebigen Cut messbar. Aus diesem Satz folgt aber direkt:

Sei f ein Fluss der Größe F, sei S ein Cut von G

$$\Rightarrow F \leq c(S),$$

d.h. der Fluss ist höchstens so hoch wie die Kapazität eines Cuts.

$\Rightarrow$

Ist ein Fluss f so groß wie die Kapazität eines Cuts S, so ist f ein maximaler Fluss und S ist ein minimaler Cut bezogen auf seine Kapazität c(S).

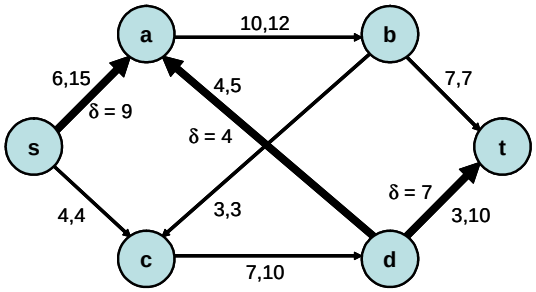
Wir betrachten nun folgende Situation:

Es gibt in G keine erweiternden Wege mehr. Dann enden also alle von s ausgehenden erweiternden Wege - genauer gesagt deren Anfangsstücke - entweder bei einer saturierten Vorwärtskante oder bei einer Rückwärtskante mit Fluss 0. Durch diese Kanten wird also ein Cut S impliziert, dessen Kapazität gleich dem momentanen Fluss ist. Daher muss der momentane Fluss aufgrund des letzten Satzes maximal sein.

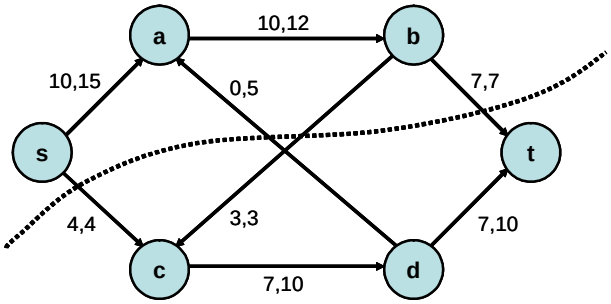
Die Suche nach einem erweiternden Weg wird durch eine Breitensuche organisiert, die beim Knoten s beginnt:

```
Markiere s;
Sei M := {s} die Menge der noch zu bearbeitenden Knoten;
while M nicht leer und t ist noch nicht markiert {
   Besorge und entferne aus M einen markierten Knoten x
   IF ∃ unmarkiertes y mit (x,y) ∈ E und f(x,y)<c(x,y) THEN
      markiere y und vermerke bei y seinen Vorgänger x;
      notiere δ(x,y) := c(x,y) - f(x,y);
      nimm y in M auf;
   IF ∃ unmarkiertes y mit (y,x) ∈ E und f(y,x) > 0 THEN
      markiere y und vermerke bei y seinen Vorgänger x;
      notiere δ(x,y) := f(y,x);
      nimm y in M auf;
}
fallst t markiert THEN
   berechne ausgehend von t längs der Vorgänger das maximal mögliche δ;
   erhöhe ausgehend von t längs der Vorgänger den Fluss f um δ;
```

In folgendem Graph ist ein erweiternder Weg fett markiert. Er führt von s über a und d nach t und erlaubt eine Flusserhöhung um $\delta = 4$.



Nach Anwendung des erweiternden Weges entsteht der folgende Graph, mit einem Fluss (und einem Cut) von 14 Einheiten. Da kein weiterer erweiternder Weg existiert, ist der Fluss maximal.



Zur effizienten Implementation der Breitensuche ist es erforderlich, bei jedem Knoten nicht nur die Liste seiner Nachfolger, sondern auch die Liste seiner Vorgänger zu speichern.

12.9 Implementation für ungerichtete Graphen durch Adjazenzlisten

In der Klasse `UndiVertex` wird von jedem Knoten auf alle adjazenten Kanten verwiesen und in der Klasse `UndiEdge` von jeder Kante auf ihre beiden Endpunkte.

```
/************************ UndiVertex.java ***********************************/
import java.util.*;
public class UndiVertex {

  public String         name;       // Name des Knoten               (fix)
  public List<UndiEdge> edges;      // inzidente Kanten              (fix)
  public UndiVertex     chef;       // Repraesentant fuer d. Knoten (errechnet)

  public UndiVertex ( String s ) {          // Konstruktor fuer Knoten
    name = s;                               // initialisiere Name des Knoten
    edges = new LinkedList<UndiEdge>();     // initialisiere adjazente Kanten
  }

  public Set <UndiVertex>neighbors(){ // liefert die Nachbarn des Knotens
    Set <UndiVertex> s = new HashSet<UndiVertex>();
    for (UndiEdge e : edges){
      if (e.left  != this) s.add(e.left);
      if (e.right != this) s.add(e.right);
    } return s;
  }

  public boolean hasEdge(UndiVertex w) {    // testet, ob Kante zu w besteht
    for (UndiVertex v : neighbors())        // fuer jede Kante pruefe
      if (v == w)                           // falls n mit w uebereinstimmt
        return true;                        // melde Erfolg
    return false;                           // ansonsten: melde Misserfolg
  }
}


/********************** UndiEdge.java ***************************************/
import java.util.*;
public class UndiEdge implements Comparable<UndiEdge>{

  public UndiVertex left;             // der eine benachbarte Knoten
  public UndiVertex right ;           // der andere benachbarte Knoten
  public double cost;                 // Kosten dieser Kante
  public boolean status;              // Zustand der Kante  (errechnet)

  public UndiEdge (UndiVertex l, UndiVertex r, double c) { // Konstruktor
    left  = l;                        // initialisiere den einen Nachbarn
    right = r;                        // initialisiere den anderen Nachbarn
    cost  = c;                        // initialisiere Kantenkosten
    status = false;                   // Kante ist noch unbearbeitet
  }

  public int compareTo (UndiEdge other) { // vergleiche mit anderer Kante
    if (cost < other.cost) return -1;     // negativ, falls selbst < andere
    if (cost > other.cost) return  1;     // positiv, falls selbst > andere
    return 0;                             // positiv, falls gleich
  }
}
```

```
/********************** UndiGraph.java ************************************/
/** Klasse zur Implementation eines ungerichteten Graphen                  */
/*  basierend auf UndiVertex und UndiEdge                                  */
/*  Der Graph wird implementiert als HashMap <String, Vertex>, d.h. als eine  */
/*  Hashtabelle mit Keys vom Typ String und Values vom Typ Knoten          */

import java.util.*;
public class UndiGraph {

  private Map <String, UndiVertex> graph;     // Datenstruktur fuer Graph

  public UndiGraph() {                        // leerer Graph wird angelegt
    graph = new HashMap<String,UndiVertex>(); // HashMap von String, UndiVertex
  }

  public boolean isEmpty(){                   // liefert true, falls Graph leer
    return graph.isEmpty();                   // mit isEmpty() von HashMap
  }

  public int size(){                          // liefert die Anzahl der Knoten
    return graph.size();                      // mit size() von HashMap
  }

  public Collection <UndiVertex> vertices(){  // liefert Knoten als Collection
    return graph.values();                    // mit values() von HashMap
  }

  public Collection <UndiEdge> edges()  {     // liefert Kanten als Collection
    Set s = new HashSet<UndiEdge>();          // erzeuge Menge von Kanten
    for (UndiVertex v : vertices()) {         // fuer jeden Graphknoten
      for (UndiEdge e : v.edges)              // durchlaufe seine Kanten
        s.add(e);                             // (doppelte werden vermieden)
    }
    return s;
  }

  public UndiVertex getVertex(String s){      // liefere Knoten zu String
    UndiVertex v = graph.get(s);              // besorge Knoten zu Knotennamen
    if (v==null) {                            // falls nicht gefunden
      v = new UndiVertex(s);                  // lege neuen Knoten an
      graph.put(s, v);                        // fuege Namen und Knoten ein
    }
    return v;                             // liefere gefundenen oder neuen Knoten
  }

  public void addEdge(String source,    // fuege Kante ein von Knoten source
                      String dest,      // zu Knoten dest
                      double cost) {    // mit Kosten cost
    UndiVertex v = getVertex(source);   // finde Knoten v zum Startnamen
    UndiVertex w = getVertex(dest);     // finde Knoten w zum Zielnamen
    UndiEdge e= new UndiEdge(v,w,cost); // erzeuge ungerichtete Kante
    v.edges.add(e);                     // fuege Kante (v,w,c) bei Knoten v ein
    w.edges.add(e);                     // fuege Kante (v,w,c) bei Knoten w ein
  }
}
```

```
/*********************  UndiGraphIO.java ***********************************/

import java.lang.*;
import java.util.*;
import java.io.*;
import AlgoTools.IO;

/** Routinen zum Einlesen und Ausgeben eines ungerichteten Graphen            */
/*  Der Graph wird realisiert durch eine HashMap,                             */
/*  welche den Namen des Knoten auf den Knoten abbildet.                      */
/*  Es wird erwartet, dass jede ungerichtete Kante nur einmal gelesen wird    */

public class UndiGraphIO {

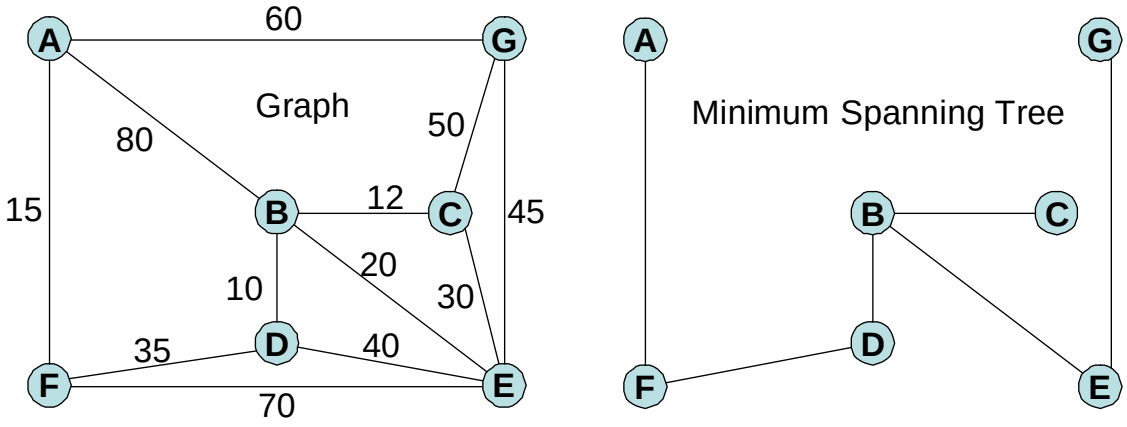
  public static UndiGraph readUndiGraph() { // liest unger.Graph aus Datei ein
    UndiGraph g = new UndiGraph();
    try {
      BufferedReader f = new BufferedReader(new FileReader("undigraph.dat"));
      String zeile;
      while ( (zeile = f.readLine()) != null) {
        StringTokenizer st = new StringTokenizer(zeile);
        String source = st.nextToken();
        String dest   = st.nextToken();
        double cost   = Double.parseDouble(st.nextToken());
        g.addEdge(source,dest,cost);
      }
    } catch (Exception e) {IO.println(e);}
    return g;
  }

  public static void printUndiGraph(UndiGraph g) { // gibt Graph aus
    IO.println("Adjazenzlisten des Graphen:\n");
    for (UndiVertex v : g.vertices()) {
      for (UndiEdge e : v.edges) {
        if (e.left==v)
        IO.print("(" + e.left.name + "," + e.right.name + ")");
        else
        IO.print("(" + e.right.name + "," + e.left.name + ")");
        IO.print(e.cost + "  ");
      }
      IO.println();
    }
    IO.println();
  }
}
```

12.10 Minimaler Spannbaum

Gegeben ein ungerichteter, gewichter Graph $G = (V, E)$, dessen Kanten mit der Funktion $c : E \to \mathbb{N}$ gewichtet sind. Gesucht wird eine Teilmenge von Kanten mit möglichst geringen Gesamtkosten, die alle Knoten verbindet. Hat der Graph n Knoten, so besteht der Spannbaum aus $n - 1$ Kanten.

Probleme dieser Art entstehen immer dann, wenn ein kostengünstiges Netzwerk gesucht wird, welches z.B. eine Menge von Inseln durch Brücken oder ein Menge von Ortschaften durch Stromleitungen verbindet.



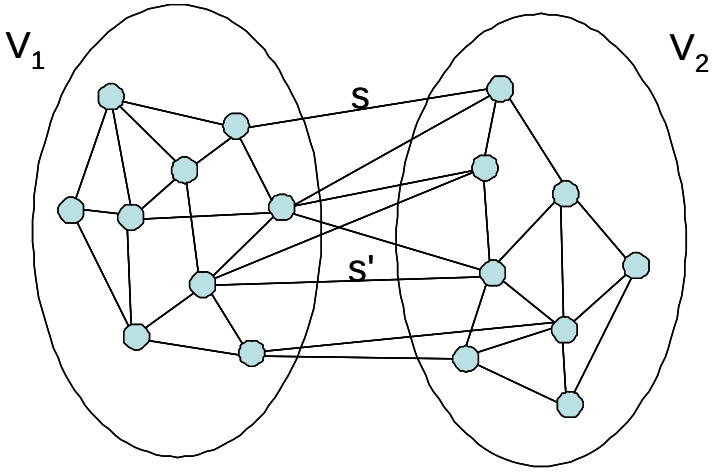
Ein Lösungsverfahren wurde von Kruskal vorgestellt:

```
Initialisiere einen Wald von Bäumen durch n isolierte Knoten;
Initialisiere einen Heap mit allen gewichteten Kanten;
while noch nicht genügend Kanten gefunden {
   entferne die billigste Kante (x,y) aus dem Heap;
   falls x und y in verschiedenen Baümen sind;
   vereinige die beiden Bäume;
}
```

Die Korrektheit des Kruskal-Algorithmus folgt aus dem folgenden

Satz: Gegeben sei eine Partition V_1, V_2 der Knotenmenge V. Sei s die billigste Kante zwischen V_1 und V_2. Dann gibt es einen MSB (Minimaler Spannbaum) der s enthält. (s ist sogar in allen MSBs enthalten).

Beweis:



Annahme: s sei nicht im MSB enthalten. Dann füge s in den MSB ein. Es entsteht ein Zyklus, der über s' läuft. Entferne nun s' aus dem MSB. Es entsteht ein neuer, billigerer MSB. Dies ist ein Widerspruch zur Minimalität des Ausgangs-MSB.

Zur Verwaltung der Zusammenhangskomponenten notieren wir bei jedem Knoten x in einer Arbeitsvariable `chef` denjenigen Knoten, der zur Zeit als Vorgesetzter für ihn fungiert. Ein Knoten, der sein eigener Vorgesetzter ist, übernimmt die Rolle des Repräsentanten für alle Knoten, die in seiner Zusammenhangskomponente liegen und die über die Variable `chef` direkt oder indirekt auf ihn verweisen. Bei der Vereinigung von zwei Zusammenhangskomponenten mit den Repräsentanten x und y muss nur einer der beiden (z.B. x) den anderen (d.h. y) als neuen Chef eintragen.

Damit die Suche nach dem aktuellen Chef nicht zu immer länger werdenden Verweisketten führt, benutzt man die Technik des *Path halving*: Längs des Weges von einem Knoten x zu seinem Repräsentanten z wird bei jedem Knoten der aktuelle Vater durch den Großvater ersetzt. Dieser Mehraufwand zahlt sich insofern aus, als bei der nächsten Repräsentantensuche der Weg nur noch halb so lang ist.

Hat der Graph n Knoten und m Kanten, dann beträgt der Aufwand für den Kruskal-Algorithmus $O(m \cdot \log(m) \cdot \text{lg*}(m))$, da maximal jede Kante einmal mit Aufwand $\log m$ aus dem Heap genommen wird. Der zusätzliche Faktor lg*(m) bezeichnet eine fast konstante, sehr langsam wachsende Funktion (nämlich die Inverse der Ackermannfunktion, für alle praktischen Werte von m kleiner als 5). Sie wird verursacht durch das Testen mit Path Halving, ob zwei Knoten in derselben Zusammenhangskomponente liegen.

```
/************************ Kruskal.java  ************************************/

/** bestimmt einen minimalen Spannbaum nach der Idee von Kruskal              */
/*  verwendet wird eine PriorityQueue zum Verwalten der gewichteten Kanten    */
/*                                                                            */
/*  Um die Suche nach dem Repraesentanten einer Zusammenhangskomponente zu    */
/*  beschleunigen, wird die Technik des Path-halving eingesetzt: auf dem Weg  */
/*  zum Repraesentanten wird jeder Vater durch den Grossvater ersetzt         */

import java.util.*;

public class Kruskal {

  private static UndiVertex findAndUpdateChef(UndiVertex v) {
    while (v.chef != v) {          // solange der Knoten kein Repraesentant ist
      v.chef = v.chef.chef;        // ersetze Vater durch Grossvater
      v      = v.chef;             // steige zum Grossvater hoch
    }
    return v;                      // liefere den ermittelten Repraesentanten
  }

  public static void kruskal(UndiGraph g) {

    PriorityQueue<UndiEdge> p =            // Priority-Queue zum Verwalten
        new PriorityQueue<UndiEdge>();     // aller Kanten gemaess Gewicht

    for (UndiVertex v : g.vertices()){     // jeder Knoten
      v.chef = v;                          // ist sein eigender Chef
    }

    for (UndiEdge e: g.edges()) {          // jede Kante
      e.status = false;                    // ist noch nicht gewaehlt
    }

    p.addAll(g.edges());                   // alle Kanten in die Priority-Queue

    int count = 0;                         // bisher noch keine Kanten gefunden

    UndiVertex x,y;                        // 2 Knoten
    while (count < g.size()-1) {           // solange noch nicht genug Kanten
      UndiEdge e   = p.poll();             // besorge die billigste Kante
      x = findAndUpdateChef(e.left);       // bestimme Repraesentanten links
      y = findAndUpdateChef(e.right);      // bestimme Repraesentanten rechts
      if (x != y) {                        // falls in verschiedenen Komponenten
        x.chef = y;                        // vereinige Komponenten
        e.status = true;                   // notiere Kante e
        count++;
      }
    }
  }
}
```

```
/************************ KruskalTest.java***********************************/

import java.util.*;
import AlgoTools.IO;

/** testet den Kruskalgorithmus auf einem ungerichteten Graphen               */

public class KruskalTest {

  public static void main(String [] argv) {

    UndiGraph g = UndiGraphIO.readUndiGraph();      // Graph einlesen

    UndiGraphIO.printUndiGraph(g);                  // Graph ausgeben

    Kruskal.kruskal(g);                             // berechne Spannbaum

    IO.print("Der minimale Spannbaum ");            // gib den errechneten
    IO.println("besteht aus folgenden Kanten:\n "); // Spannbaum aus
    for (UndiEdge e : g.edges()){                   // durchlaufe alle Kanten
      if (e.status)
        IO.println("(" + e.left.name + "," + e.right.name + ") " + e.cost);
    }
  }
}
```

```
Adjazenzlisten des Graphen:

(D,B)10.0  (D,E)40.0  (D,F)30.0
(E,B)20.0  (E,C)20.0  (E,D)40.0  (E,F)70.0  (E,G)40.0
(F,A)20.0  (F,D)30.0  (F,E)70.0
(G,A)60.0  (G,C)50.0  (G,E)40.0
(A,B)80.0  (A,F)20.0  (A,G)60.0
(B,A)80.0  (B,C)10.0  (B,D)10.0  (B,E)20.0
(C,B)10.0  (C,E)20.0  (C,G)50.0

Der minimale Spannbaum besteht aus folgenden Kanten:

(B,C) 10.0
(B,E) 20.0
(B,D) 10.0
(D,F) 30.0
(A,F) 20.0
(E,G) 40.0
```

von KruskalTest.java erzeugte Ausgabe undiresult.dat

12.11 Matching

Ein Matching M in einem ungerichteten Graph $G = (V, E)$ besteht aus einer Menge von unabhängigen Kanten, d.h. Kanten, die keine gemeinsamen Endknoten haben. Ein Matching modelliert mögliche Zuordnungen in einem System von binären Beziehungen, z.B. Spielpartner in einem Tennisturnier.

Bzgl. eines Matchings M wird ein Knoten *frei* genannt, wenn er nicht Endpunkt einer Matchingkante ist; der Knoten heißt *belegt*, wenn er Endpunkt von (genau) einer Matching-Kante ist. In einem gewichteten Graphen werden die Kosten eines Matchings durch die Summe der Gewichte der benutzten Kanten definiert.

M ist ein **Maximal-Matching**, wenn zu M keine weitere Kante hinzugefügt werden kann.

M ist ein **Maximum-Matching**, wenn es keine anderen Matchings mit mehr Kanten gibt.

M ist ein **perfektes Matching**, wenn alle Knoten belegt sind.

M ist ein **Minimum-Cost-Matching**, wenn es von allen perfekten Matchings die geringsten Kosten verursacht.

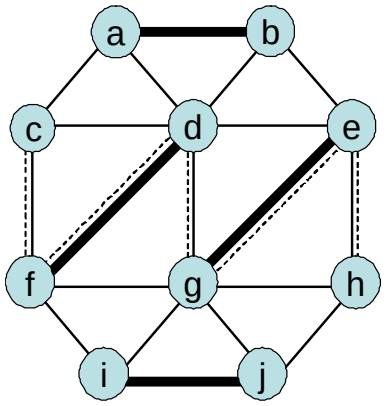
Maximale Matchings können mit einem Greedyverfahren bestimmt werden, indem solange Kanten zwischen freien Knoten gewählt werden, bis dies nicht mehr möglich ist.

Maximum-Matchings können bestimmt werden, indem ausgehend von einem initialen Matching sogenannte erweiternde Wege gefunden werden, längs derer das Matching vergrößert wird. Genauer: Ein alternierender Weg bzgl. eines Matchings M ist eine Sequenz von Kanten mit jeweils gemeinsamen Endpunkten, die abwechselnd zum Matching und nicht zum Matching gehören. Ein erweiternder Weg bzgl. eines Matchings M ist ein alternierender Weg bzgl. M, der bei einem freien Knoten beginnt und bei einem freien Knoten endet. Durch Umtauschen der Matchingkanten in Nicht-Matchingkanten und umgekehrt kann längs des erweiternden Weges das Matching um eine Kante erhöht werden.

Es gilt der Satz:

$$M \text{ ist ein Maximum-Matching} \iff \text{es gibt keinen erweiternden Weg mehr.}$$

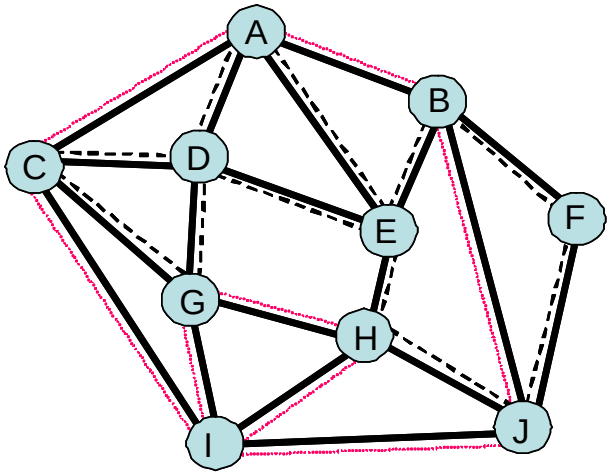
Folgendes Bild zeigt ein maximales Matching bestehend aus vier (dick gezeichneten) Kanten. Dieses Matching lässt sich durch den alternierenden (gestrichelt gezeichneten) Weg über die Knoten c, f, d, g, e, h um eine Kante erweitern. Es besteht dann aus den 5 Kanten $(a, b), (c, f), (d, g), (e, h), (i, j)$ und bildet ein Maximum-Matching.



12.12 Chinese Postman

Vorbemerkung: Ein ungerichteter Graph heit *Eulergraph*, falls alle Knoten geraden Knotengrad haben. Ein Eulergraph erlaubt immer eine sogenannte *Eulertour*, d.h. einen geschlossenen Kantenzug, in dem jede Kante genau einmal vorkommt. Die Konstruktion einer Eulertour geschieht durch willkürliches Ablaufen noch nicht benutzter Kanten und nutzt aus, dass ein Knoten, der über eine noch nicht benutzte Kante angelaufen wird, immer (wegen seines graden Knotengrads) eine noch nicht benutzte Kante aufweist, über die der Weg fortgesetzt werden kann. Letztendlich muss diese Kantenfolge wieder beim Ausgangsknoten ankommen. Ggf. müssen mehrere Kantenzüge, die auf diese Weise konstruiert wurden, zu einem Gesamtweg verschmolzen werden.

In folgendem Graph haben alle Knoten geraden Grad. Eine erste Kantenfolge (gestrichelt gezeichnet) beginnt bei F, läuft dann über $J, H, E, D, G, C, D, A, E, B$ und kehrt zu F zurück. Eine weitere Kantenfolge (gepunktet gezeichnet) beginnt bei C, läuft über A, B, J, I, H, G, I und kehrt zu C zurück. Beide Folgen können z.B. am Knoten H verschmolzen werden, indem die gestrichelte Folge bei Ankunft in H zunächst die gepunktete Folge abläuft und dann die gestrichelte Folge weiter führt. Es ergibt sich als Eulertour $F, J, H, G, I, C, A, B, J, I, H, E, D, G, C, D, A, E, B, F$.



Gegeben sei nun ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$, gewichtet mit einer Kostenfunktion $c : E \to \mathbb{N}$.

Das Problem des Chinese Postman besteht darin, eine billigste Kantenrundreise zu bestimmen, d.h. eine geschlossene, möglichst billige Kantenfolge über alle Knoten, in der jede Kante mindestens einmal auftritt. Dies soll die Aufgabe eines Briefträgers modellieren, der kostengünstig alle Straßen einer Stadt abgehen und wieder zum Ausgangspunkt zurückkehren soll.

Die Lösung dieses Problems hängt mit der Euler-Eigenschaft zusammen:

- Ist G ein Eulergraph, so liefert die Eulertour die billigste Postman-Tour.
- Ist G kein Eulergraph, so muss G durch Verdoppelung einiger Kanten in einen Eulergraph G' überführt werden. Gesucht wird daher ein System von kantendisjunkten kürzesten Wegen zwischen denjenigen Knoten in V, die ungeraden Grad haben.

Offensichtlich wird in einer optimalen Lösung jede Kante maximal zweimal durchlaufen. Denn würde

sie öfter durchlaufen, so ließen sich zwei Durchläufe streichen, der Graph bliebe weiterhin eulersch und die Tour wäre verbilligt.

Sei $U := \{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$ die Menge der Knoten aus V mit ungeradem Knotengrad. Offenbar gilt: k ist gerade, denn in einem Graph ist die Anzahl der Knoten mit ungeradem Kantengrad gerade.

Auf der Menge U errechne mit dem Algorithmus von Floyd die Distanzmatrix d_{ij}, d.h. die Kosten der kürzesten Wege zwischen allen Paaren aus U unter Verwendung aller Knoten und Kanten aus G.

Betrachte nun die Clique dieser k Knoten mit ihren errechneten Kantengewichten d_{ij}.

In dieser Clique suchen wir ein Minimum Cost Matching M. Dieses Matching liefert uns die Knotenpaare, die mit einem kürzesten Weg gemäß Floyd verbunden werden müssen. Dadurch erhalten alle Knoten einen geraden Grad. Wir erhalten also einen Eulergraph, der einen geschlossenen Weg über alle Kanten erlaubt und damit die gesuchte Postman-Tour darstellt.

Es lässt sich nachweisen, dass die zugehörigen Wege alle kantendisjunkt sind. Denn würde eine Kante (x, y) gemeinsam auf dem kürzesten Weg von a nach b und von c nach d genutzt, so könnten durch Entfernen der Kante (x, y) zwei billigere Wege von a über x nach c und von b über y nach d entstehen.

Im folgenden Graphen gibt es vier Knoten mit ungeradem Grad (fett markiert). Sie werden preisgünstig durch kürzeste Wege (gestrichelt markiert) miteinander verbunden. Längs dieser Wege werden nun alle Kanten verdoppelt, so dass dadurch alle Knoten geraden Grad haben. Auf diesem Eulergraph bildet dann eine Eulertour die Lösung des Chinese Postman.