Kapitel 11

3D-Grundlagen

Für 3-dimensionale Objekte gibt es mehrere Möglichkeiten der Repräsentation (d.h. Definition des Objekts) und der Darstellung (d.h. Projektion des Objekts auf den Bildschirm).

11.1 Repräsentation und Darstellung

Repräsentation

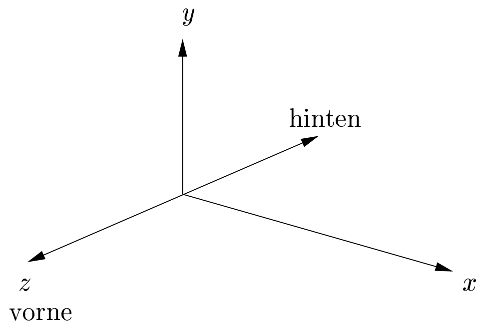
- Elementarobjekt mit Definitionspunkten,
- Drahtmodell mit Kantenliste,
- Flächenmodell mit Flächenliste,
- CSG (constructive solid geometry) mit mengentheoretischer Verknüpfung von Elementarobjekten.

Darstellung

- Drahtmodell mit sämtlichen Kanten,
- Drahtmodell mit Entfernung verdeckter Kanten,
- Flächenmodell mit Schattierung, ohne abgewandte Flächen,
- Flächenmodell mit Berechnung von Lichtreflektion, ohne verdeckte Teile von Flächen,
- Körpermodell mit Berechnung von Schattenbildung, Spiegelungen und Brechungen.

11.2 3D-Koordinatensystem

Weit verbreitet ist das kartesische Koordinaten-System, z.B. in der rechtshändigen Form.



Bei gespreizten Fingern der rechten Hand zeigt der Zeigefinger in x-Richtung, der Mittelfinger in y-Richtung, der Daumen in z-Richtung.

11.3 Kreuzprodukt und Skalarprodukt

Def.: Gegeben ein 3D-Vektor

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

Seine Länge ist definiert als

$$|v| := \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

Def.: Gegeben zwei 3D-Vektoren

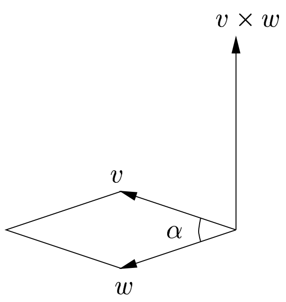
$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \text{ und } w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$$

Das **Kreuzprodukt** von v und w ist definiert als

$$v \times w = \begin{bmatrix} v_2 \cdot w_3 - v_3 \cdot w_2 \\ v_3 \cdot w_1 - v_1 \cdot w_3 \\ v_1 \cdot w_2 - v_2 \cdot w_1 \end{bmatrix}$$

Der Vektor $v \times w$ steht senkrecht auf v und steht senkrecht auf w. Seine Länge entspricht der Fläche des durch v und w aufgespannten Parallelogramms, d.h.

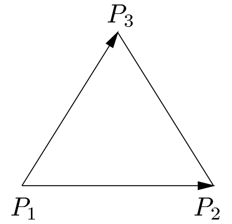
$$|v \times w| = |v| \cdot |w| \cdot \sin(\alpha)$$



In einem rechtshändigen Koordinatensystem entspricht bei gespreizten Fingern der Zeigefinger v, der Mittelfinger w, der Daumen $v \times w$.

Anwendung des Kreuzprodukts

Gegeben eine Fläche durch 3 nicht kollineare Punkte P_1, P_2, P_3.



Der Vektor $(P_2 - P_1) \times (P_3 - P_1)$ bildet den Normalenvektor zur Fläche.
Ist eine Ebene durch ihre Ebenengleichung $Ax + By + Cz + D = 0$ gegeben, so ergibt sich der Normalenvektor als (A, B, C).
Ist ein Normalenvektor (A, B, C) gegeben, so errechnet sich D durch Einsetzen eines beliebigen Punktes der Ebene.
Ein Punkt (x, y, z) liegt

"oberhalb" der Ebene,	falls	$Ax + By + Cz + D > 0$
"unterhalb" der Ebene,	falls	$Ax + By + Cz + D < 0$
in der Ebene,	falls	$Ax + By + Cz + D = 0$

Def.: Gegeben zwei n-dimensionale Vektoren v, w.
Das **Skalarprodukt** lautet:

$$v \cdot w := \sum_{i=1}^{n} v_i \cdot w_i$$

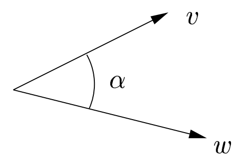
Für Vektoren a, b, c und $s \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{array}{rcll} a \cdot b & = & b \cdot a & \text{(Symmetrie)} \\ (a+c) \cdot b & = & a \cdot b + c \cdot b & \text{(Linearität)} \\ (sa) \cdot b & = & s(a \cdot b) & \text{(Homogenität)} \\ |b| & = & \sqrt{b \cdot b} & \text{(euklidische Norm)} \end{array}$$

Anwendungen des Skalarprodukts:

Gegeben zwei Vektoren v, w.
Für den Winkel α zwischen v und w gilt:

$$\cos(\alpha) = \frac{v \cdot w}{|v| \cdot |w|}.$$



$$\text{Es gilt:} \quad \begin{array}{lcl} v \cdot w < 0 & \Leftrightarrow & v \text{ und } w \text{ sind mehr als } 90^\circ \text{ auseinander} \\ v \cdot w = 0 & \Leftrightarrow & v \text{ steht senkrecht auf } w \\ v \cdot w > 0 & \Leftrightarrow & v \text{ und } w \text{ sind weniger als } 90^\circ \text{ auseinander} \end{array}$$

Es gilt: $n \cdot r = D$ beschreibt eine Ebene für $D \in \mathbb{R}$ und Normalenvektor n. Alle Lösungsvektoren r liegen (als Punkte aufgefaßt) auf der Ebene. Das Skalarprodukt aller Ebenenpunkte (als Vektoren geschrieben) mit dem Normalenvektor ist konstant.

11.4 Matrixinversion

Analog zum zweidimensionalen Fall werden die dreidimensionalen Transformationen durch Verknüpfung homogener Koordinaten mit 4×4-Transformationsmatrizen dargestellt.
Sei $A = (a_{ik})$, $1 \leq i, k \leq 4$, eine 4×4-Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Ist $D = \det\ A = |a_{ik}|$ die *Determinante* von A, so bezeichnet man als *Unterdeterminante* des Elementes a_{ik} diejenige 3-reihige Determinante, die aus D durch Streichen der i-ten Zeile und der k-ten Spalte hervorgeht. Unter der *Adjunkten* A_{ik} des Elementes a_{ik} versteht man die mit dem Faktor $(-1)^{i+k}$ versehene Unterdeterminante von a_{ik}.
Beispiel:

$$\begin{aligned} A_{23} &= -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} \\ &= -[a_{11}(a_{32}a_{44} - a_{34}a_{42}) - a_{12}(a_{31}a_{44} - a_{34}a_{41}) + a_{14}(a_{31}a_{42} - a_{32}a_{41})] \end{aligned}$$

Für die *inverse Matrix* A^{-1} gilt:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det\ A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & A_{41} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & A_{42} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{43} \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} \end{pmatrix}$$

Für die Entwicklung der Determinante von A nach der ersten Zeile können die Adjunkten benutzt werden. Es gilt:

$$\det\ A = \sum_{k=1}^{4} a_{1k} A_{1k}$$