Kapitel 13

3D-Transformationen

13.1 Translation

Mit homogenen Koordinaten läßt sich der um den Translationsvektor $t = (t_x, t_y, t_z)$ verschobene Punkt $P = (x, y, z)$

$$(x', y', z') := (x + t_x, y + t_y, z + t_z)$$

in der folgenden Form darstellen:

$$[x', y', z', 1] = [x, y, z, 1] \cdot T(t_x, t_y, t_z)$$

mit

$$T(t_x, t_y, t_z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ t_x & t_y & t_z & 1 \end{bmatrix}$$

13.2 Skalierung

Es liege der Fixpunkt im Ursprung:

$$(x', y', z') := (x \cdot s_x, y \cdot s_y, z \cdot s_z)$$

Die daraus resultierende Transformationsmatrix lautet:

$$S(s_x, s_y, s_z) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Es liege der Fixpunkt bei (Z_x, Z_y, Z_z):

1. Translation um $(-Z_x, -Z_y, -Z_z)$,
2. Skalierung um (s_x, s_y, s_z),
3. Translation um (Z_x, Z_y, Z_z).

Die Transformationsmatrix lautet:

$$T(-Z_x, -Z_y, -Z_z) \cdot S(s_x, s_y, s_z) \cdot T(Z_x, Z_y, Z_z)$$

13.3 Rotationen

Rotation um die z-Achse

$$\begin{aligned} x' &:= x \cdot \cos(\delta) - y \cdot \sin(\delta) \\ y' &:= x \cdot \sin(\delta) + y \cdot \cos(\delta) \\ z' &:= z \end{aligned}$$

Die daraus resultierende Transformationsmatrix lautet:

$$R_z(\delta) = \begin{bmatrix} \cos(\delta) & \sin(\delta) & 0 & 0 \\ -\sin(\delta) & \cos(\delta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotation um die x-Achse

$$\begin{aligned} x' &:= x \\ y' &:= y \cdot \cos(\delta) - z \cdot \sin(\delta) \\ z' &:= y \cdot \sin(\delta) + z \cdot \cos(\delta) \end{aligned}$$

Die daraus resultierende Transformationsmatrix lautet:

$$R_x(\delta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\delta) & \sin(\delta) & 0 \\ 0 & -\sin(\delta) & \cos(\delta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotation um die y-Achse

$$\begin{aligned} x' &:= z \cdot \sin(\delta) + x \cdot \cos(\delta) \\ y' &:= y \\ z' &:= z \cdot \cos(\delta) - x \cdot \sin(\delta) \end{aligned}$$

Die daraus resultierende Transformationsmatrix lautet:

$$R_y(\delta) = \begin{bmatrix} \cos(\delta) & 0 & -\sin(\delta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin(\delta) & 0 & \cos(\delta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

13.3.1 Rotation um eine beliebige Achse

Voraussetzung: Die Rotationsachse stimme nicht mit einer der Koordinatenachsen überein.

Idee: Transformiere Rotationsachse und Objekt so, daß die Rotationsachse mit der z-Achse übereinstimmt, rotiere um vorgegebenen Winkel δ, transformiere zurück.

1. Translation von Rotationsachse (und Objekt), so daß die Rotationsachse durch den Ursprung läuft.
2. Rotation der Rotationsachse um die x-Achse in die xz-Ebene.
3. Rotation der Rotationsachse um die y-Achse in die z-Achse.
4. Rotation des Objekts um die z-Achse mit Winkel δ.
5. Rücktransformation des gedrehten Objekts durch Anwendung der inversen Transformationen der Schritte (3), (2) und (1).

Ist die Rotationsachse durch die Punkte P_1, P_2 gegeben, so gilt

$$v = P_2 - P_1 = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}.$$

Die Länge dieses Vektors lautet

$$|v| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

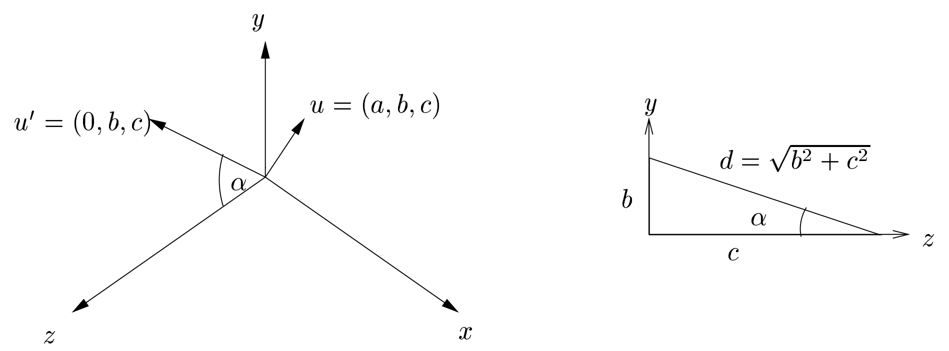
Die Komponenten des zugehörigen Einheitsvektors

$$u = \frac{v}{|v|} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, |u| = 1$$

lauten daher

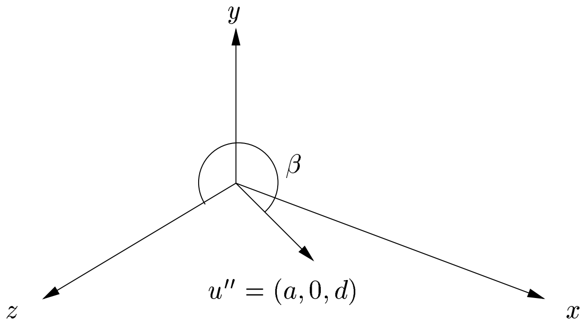
$$a = \frac{x_2 - x_1}{|v|},\ b = \frac{y_2 - y_1}{|v|},\ c = \frac{z_2 - z_1}{|v|}.$$

Schritt 1 läßt sich durch die Translation $T(-x_1, -y_1, -z_1)$ durchführen. Dadurch wird P_1, Ausgangspunkt des Einheitsvektors u, in den Ursprung verschoben.
Für Schritt 2 sind Sinus und Cosinus des Rotationswinkels α erforderlich, der zwischen der Projektion u' von u auf die yz-Fläche und der z-Achse, repräsentiert durch den Vektor $u_z = (0, 0, 1)$, liegt.

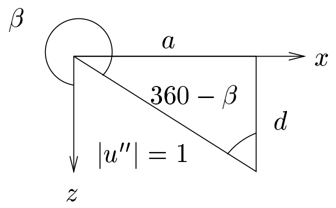


$\Rightarrow \cos(\alpha) = \frac{c}{d}$
$\Rightarrow \sin(\alpha) = \frac{b}{d}$

Nach Schritt 2 befindet sich der ursprüngliche Vektor u als u'' in der xz-Ebene:



Für Schritt 3 (Rotation um y-Achse) benötigt man Sinus und Cosinus des Rotationswinkels β.



$\Rightarrow \cos(\beta) = \cos(360° - \beta) = d$
$\Rightarrow \sin(\beta) = -\sin(360° - \beta) = -a$

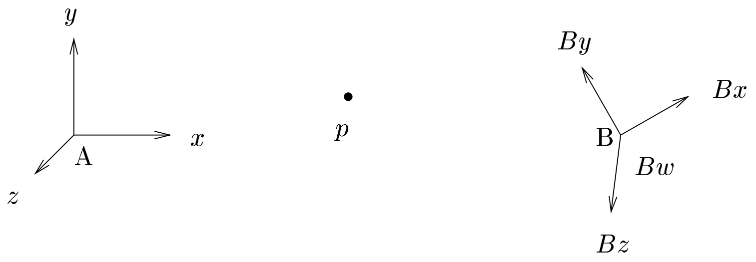
Nach den ersten drei Schritten ist die Drehachse mit der z-Achse identisch, so daß Schritt (4) mit der Rotationsmatrix $R_z(\delta)$ durchgeführt werden kann. Schritt (5) beinhaltet die Anwendung der inversen Transformationen.
Die Rotation um die Achse $v = \overline{P_1P_2}$ um den Winkel δ läßt sich daher wie folgt darstellen:

$$R(v, \delta) = T(-P_1) \cdot R_x(\alpha) \cdot R_y(\beta) \cdot R_z(\delta) \cdot R_y^{-1}(\beta) \cdot R_x^{-1}(\alpha) \cdot T(P_1)$$

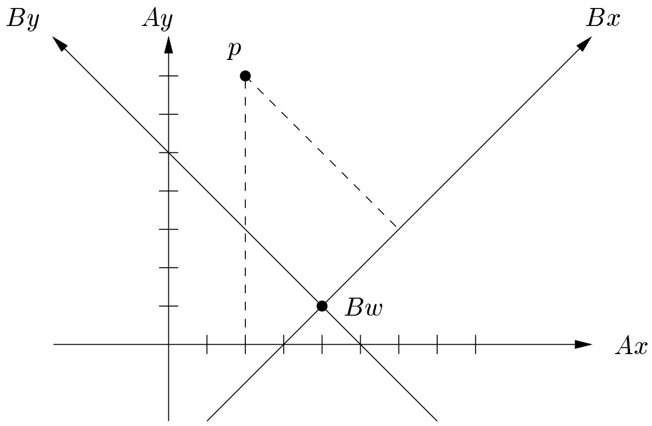
13.4 Transformation von Koordinatensystemen

Die Transformation von einem Koordinatensystem in ein anderes läßt sich folgendermaßen formalisieren: Gegeben sei ein Koordinatensystem A, in dem ein anderes Koordinatensystem B durch die homogenen Koordinaten des Ursprungs (Bw) und die drei Richtungsvektoren der Achsen (Bx, By, Bz) definiert ist. Zeilenweise angeordnet ergeben diese Vektoren die Matrix B_A, die den Übergang vom Koordinatensystem B zum Koordinatensystem A beschreibt:

$$B\_A = \begin{bmatrix} Bx \\ By \\ Bz \\ Bw \end{bmatrix}.$$



Beispiel (für den 2-dimensionalen Fall):



x-Achse:	Bx	lautet	$[\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}, 0]$
y-Achse:	By	lautet	$[-\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}, 0]$
Ursprung:	Bw	lautet	$[4, 1, 1]$
Punkt:	p_B	lautet	$[2 \cdot \sqrt{2}, 4 \cdot \sqrt{2}, 1]$

Also läßt sich der Punkt p wie folgt transformieren:

$$[2 \cdot \sqrt{2}, 4 \cdot \sqrt{2}, 1] \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{2}} & 0 \\ -\sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{2}} & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Um einen Punkt p_A des Koordinatensystems A im Koordinatensystem B zu spezifizieren, verwendet man die inverse Matrix zu B_A :

$$p\_B = p\_A \cdot (B\_A)^{-1}.$$

13.5 Transformation der Normalenvektoren

Die Normalenvektoren müssen bei der Transformation von Objektpunkten ebenfalls abgebildet werden. Allgemein gilt, daß bei der Transformation eines Objekts mit der Matrix M ein Normalenvektor n dieses Objekts mit der transponierten Inversen von M abgebildet werden muß:

$$n' = n \cdot (M^{-1})^T \ .$$

Beweis: Sei n der Normalenvektor einer Ebene, seien r_1 und r_2 beliebige Punkte in der Ebene. Betrachte n, r_1 und r_2 als Zeilenvektoren und arbeite mit dem Matrixprodukt (Zeile mal Spalte).

Dann gilt:

$$(r_1 - r_2) \cdot n^T = 0$$

Bei einem Wechsel des Koordinatensystems werden die Ortsvektoren r_1 und r_2 mit der Matrix M transformiert:

$$r'_1 = r_1 \cdot M$$

$$r'_2 = r_2 \cdot M$$

Es gilt:

$$\begin{array}{rcl}
 & (r_1 - r_2) \cdot n^T & = 0 \\
\Leftrightarrow & (r_1 - r_2) \cdot (M \cdot M^{-1}) \cdot n^T & = 0 \\
\Leftrightarrow & ((r_1 - r_2) \cdot M) \cdot (M^{-1} \cdot n^T) & = 0 \\
\Leftrightarrow & (r'_1 - r'_2) \cdot (n \cdot (M^{-1})^T)^T & = 0 \\
\Leftrightarrow & (r'_1 - r'_2) \cdot (n')^T & = 0 \\
 & & \\
\Rightarrow & n' = n \cdot (M^{-1})^T &
\end{array}$$