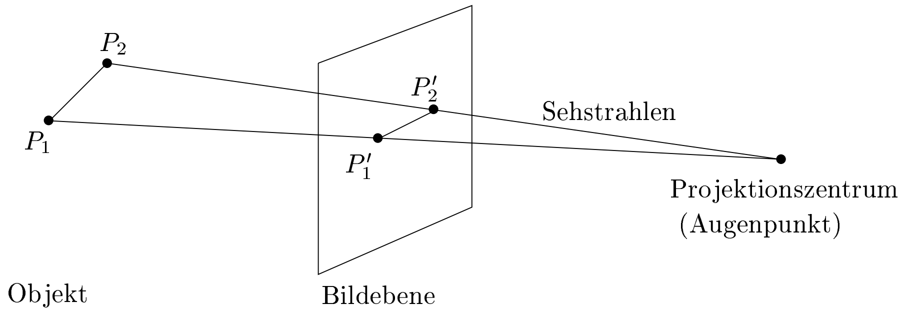
Kapitel 14

Projektion

Für die Anzeige am zweidimensionalen Ausgabegerät muß eine Abbildung (*Projektion*) der räumlichen, dreidimensionalen Szene auf eine *Projektionsebene* erfolgen.
Gegeben sind

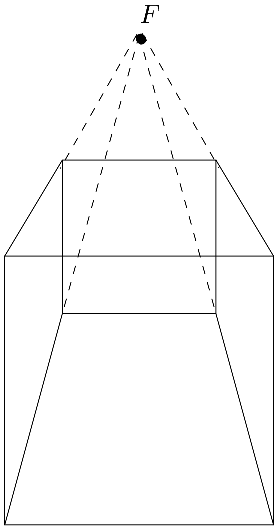
- das zu projizierende Objekt,
- die Bildebene,
- das Projektionszentrum.



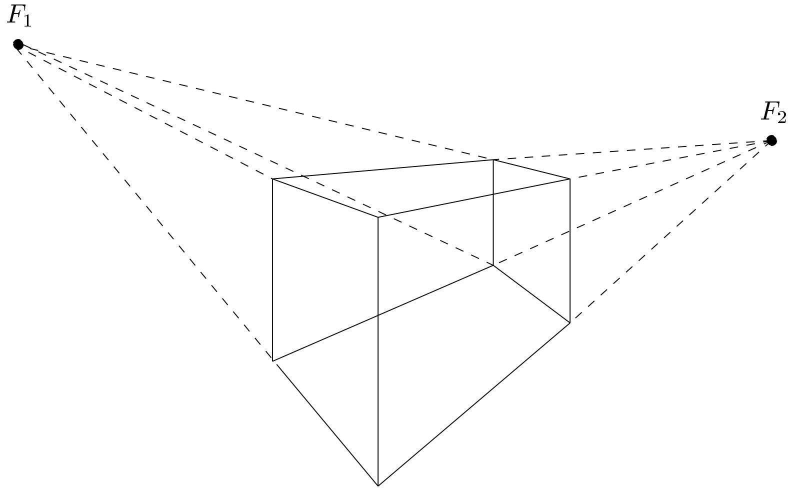
Ist der Abstand des Projektionszentrums von der Bildebene endlich, so handelt es sich um eine Zentralprojektion (perspektivische Projektion), andernfalls handelt es sich um eine Parallelprojektion (die Projektionsstrahlen sind zueinander parallel).

14.1 Perspektivische Projektion

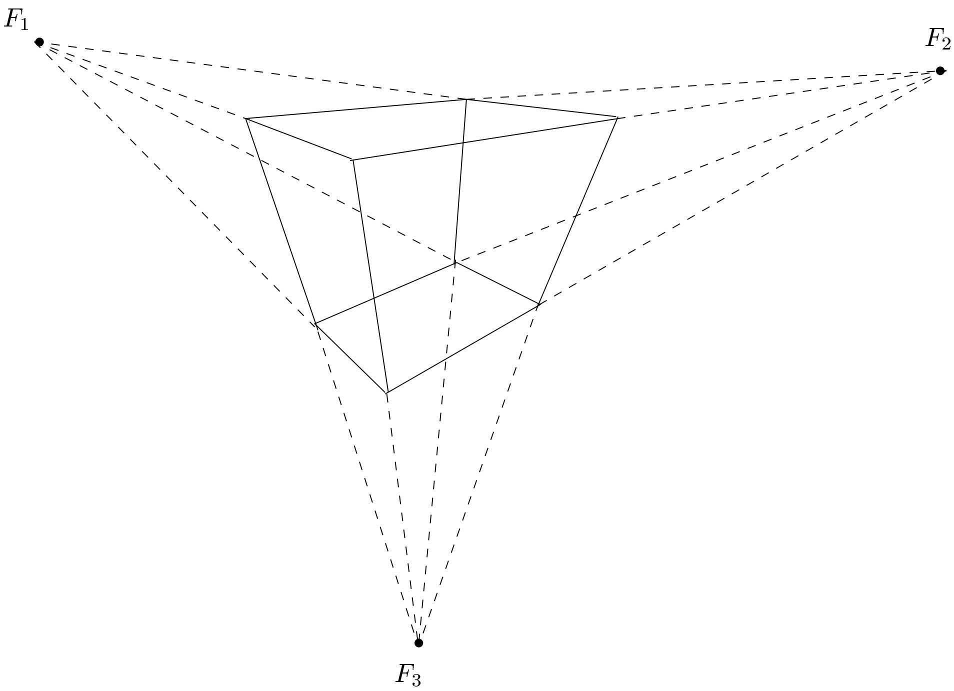
Die abgebildeten Objekte werden proportional zu ihrem Abstand zur Bildebene verkleinert. Je nachdem, ob die Bildebene eine, zwei oder drei der Koordinatenachsen schneidet, entstehen ein, zwei oder drei Fluchtpunkte.



1 Fluchtpunkt F

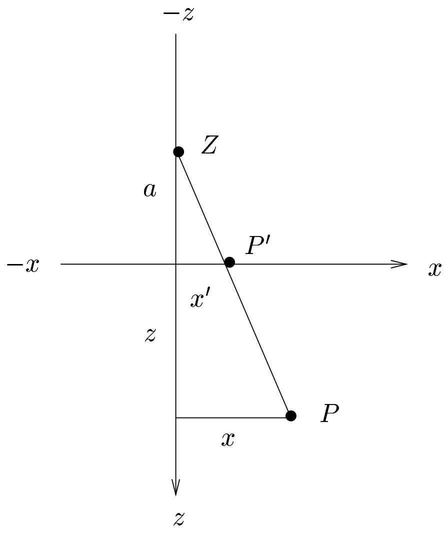


2 Fluchtpunkte F_1, F_2

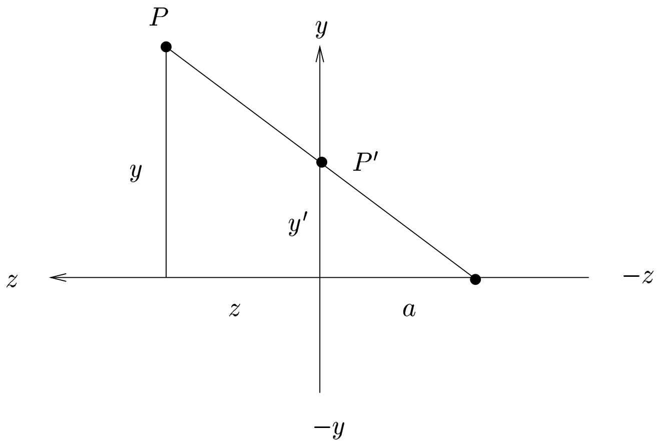


3 Fluchtpunkte F_1, F_2, F_3

OBdA sei die Bildebene gleich der xy-Ebene, und das Projektionszentrum liege auf der negativen z-Achse im Punkt $Z = (0, 0, -a)$. Gegeben Punkt $P = (x, y, z)$. Gesucht sind auf der Bildebene die Koordinaten des projizierten Bildpunktes $P' = (x', y', 0)$.



Szene in Blickrichtung negativer y-Achse
Es gilt: $x' : a = x : (a + z)$



Szene in Blickrichtung negativer x-Achse
Es gilt: $y' : a = y : (z + a)$

Betrachtet man die Szene "von oben" und "von der Seite", so erhält man aufgrund der Strahlensätze die Beziehung

$$x' = \frac{x}{1 + z/a}\ , \qquad y' = \frac{y}{1 + z/a}\ , \qquad z' = 0.$$

Die homogenen Koordinaten des projizierten Punktes lauten

$$P' = [x/w, y/w, 0, 1] = [x, y, 0, w] \text{ mit } w = 1 + z/a.$$

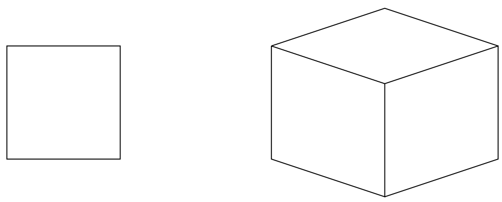
Für die Transformationsmatrix der perspektivischen Projektion ergibt sich also:

$$P_{persp_{xy}}(-a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

14.2 Parallel-Projektion

14.2.1 Normalprojektionen

Stehen die Sehstrahlen normal zur Bildebene, liegt eine *orthogonale* Projektion vor:



a) b)

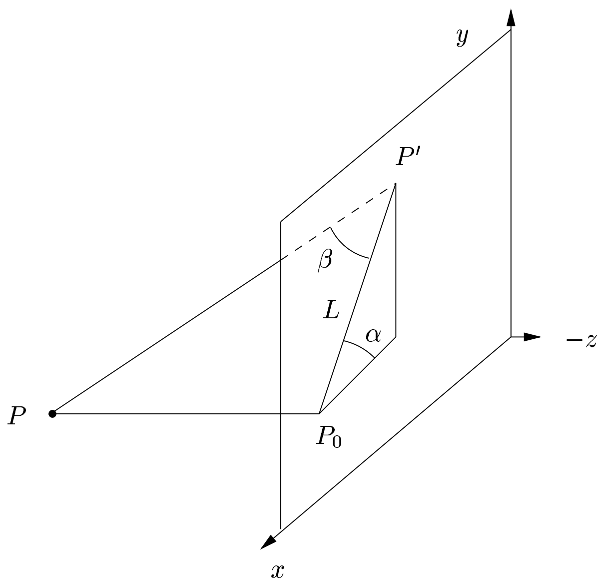
Die häufigste Anwendung orthogonaler Projektionen liegt in der Darstellung eines Objekts durch *Grund-*, *Auf-* und *Seitenriß* (s. Abb. a).
Eine weitere Form der Normalprojektionen sind die *axonometrischen Projektionen*, bei denen die Bildebene auf keiner der Hauptachsen senkrecht steht. Dadurch sind in der Abbildung mehrere zueinander normal stehende Flächen gleichzeitig sichtbar. Die resultierenden Darstellungen sind der perspektivischen Projektion ähnlich. Anstelle der zur Entfernung vom Auge proportionalen Verkürzung erfolgt aber eine gleichmäßige Verkürzung aller Kanten (s. Abb. b).
Die Transformationsmatrix für die orthogonale Parallelprojektion auf die xy-Ebene lautet

$$P_{ortho_{xy}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

da für jeden Punkt $P = [x, y, z, 1]$ die Koordinaten des projizierten Punktes gleich $[x, y, 0, 1]$ sind.

14.2.2 Schiefe Projektionen

Bei den *schiefen* Parallelprojektionen stehen die Sehstrahlen nicht normal auf der Bildebene, sondern schneiden sie unter dem Winkel β. Die schiefe Projektion auf die xy-Ebene entspricht einer Scherung der x- und y-Koordinaten proportional zu z.



Seien $P_0 = (x, y, 0)$ die orthogonale und $P' = (x', y', 0)$ die schiefe Projektion von Punkt $P = (x, y, z)$. Sei L die Entfernung von P_0 nach P'. Dann gilt

$$x' = x - L \cdot \cos(\alpha)$$
$$y' = y + L \cdot \sin(\alpha)$$
$$z' = 0$$

Wegen $\tan(\beta) = \frac{z}{L}$ folgt

$x' = x - z \cdot \frac{\cos(\alpha)}{\tan(\beta)}$
$y' = y + z \cdot \frac{\sin(\alpha)}{\tan(\beta)}$

Der Winkel β regelt im projizierten Bild das Verhältnis von x-Ausdehnung zu z-Ausdehnung. Die Koordinaten zweier projizierter Punkte P_1', P_2' lauten:

$x_1' = x_1 - z_1 \cdot \cos(\alpha)/\tan(\beta)$
$y_1' = y_1 + z_1 \cdot \sin(\alpha)/\tan(\beta)$
$x_2' = x_2 - z_2 \cdot \cos(\alpha)/\tan(\beta)$
$y_2' = y_2 + z_2 \cdot \sin(\alpha)/\tan(\beta)$

Für zwei Punkte, die sich nur bzgl. ihrer z-Koordinaten unterscheiden, betragen die Abstände ihrer Bilder in x- bzw. y-Richtung

$|x_1' - x_2'| = |(z_1 - z_2) \cdot \cos(\alpha)/\tan(\beta)|$
$|y_1' - y_2'| = |(z_1 - z_2) \cdot \sin(\alpha)/\tan(\beta)|$

für den Abstand $|P_1' - P_2'| = \sqrt{|x_1' - x_2'|^2 + |y_1' - y_2'|^2}$ ergibt sich

$$|P_1' - P_2'| = \sqrt{\frac{(z_1 - z_2)^2}{\tan^2(\beta)} \cdot (\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha))} = \frac{z_1 - z_2}{\tan(\beta)}$$

wegen $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$.
Für die Berechnung der Transformationsmatrix benötigt der Algorithmus den Verkürzungsfaktor d und den Scherwinkel α. d gibt an, um welchen Faktor zur Bildebene normal stehende Strecken verkürzt werden. Es gilt

$$d = \frac{1}{\tan(\beta)} .$$

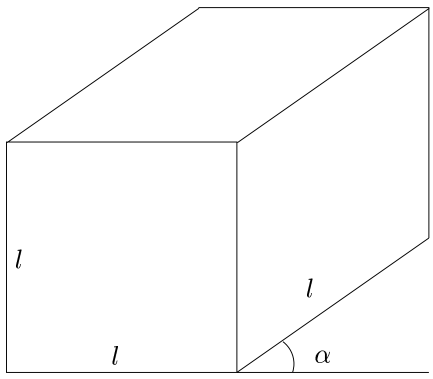
α definiert den Winkel zur Horizontalen, unter dem diese Kanten aufgetragen werden. Für die Koordinaten des so projizierten Punktes $P = (x, y, z, 1)$ gilt

$$\begin{aligned} x' &= x - z \cdot (d \cdot \cos(\alpha)), \\ y' &= y + z \cdot (d \cdot \sin(\alpha)), \\ z' &= 0, \\ w' &= 1 \end{aligned}$$

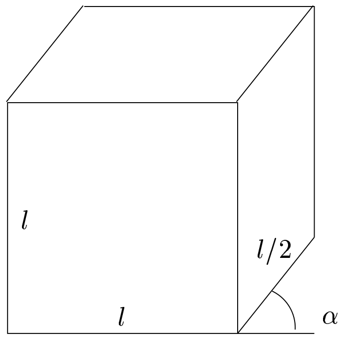
Die entsprechende Transformationsmatrix lautet

$$P_{schief_{xy}}(\alpha, d) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -d \cdot \cos(\alpha) & d \cdot \sin(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Für $d = 0$ ($\beta = 90°$) ergibt sich daraus die orthogonale Projektion. Bei schiefen Projektionen ist der Wert für d immer ungleich Null.
Zwei häufig als Ersatz für Perspektive verwendete Projektionen haben die Werte $d = 1$ ($\beta = 45°$), $\alpha = 35°$ (*Kavalierprojektion*) und $d = 0.5$ ($\beta = 63.43°$), $\alpha = 50°$ (*Kabinettprojektion*). Bei der Kavalierprojektion werden alle auf der Bildebene normal stehenden Strecken unverkürzt abgebildet. Bei der Kabinettprojektion ergibt sich eine Verkürzung auf die Hälfte ihrer ursprünglichen Länge.



Kavalierprojektion: $\beta = 45°$
kombiniert mit $\alpha = 35°$



Kabinettprojektion: $\beta = 63.43°$
kombiniert mit $\alpha = 50°$