Kapitel 15

Betrachtungstransformationen

Die Abbildung dreidimensionaler Objekte auf den Bildschirm wird in eine Reihe von Elementartransformationen zerlegt:

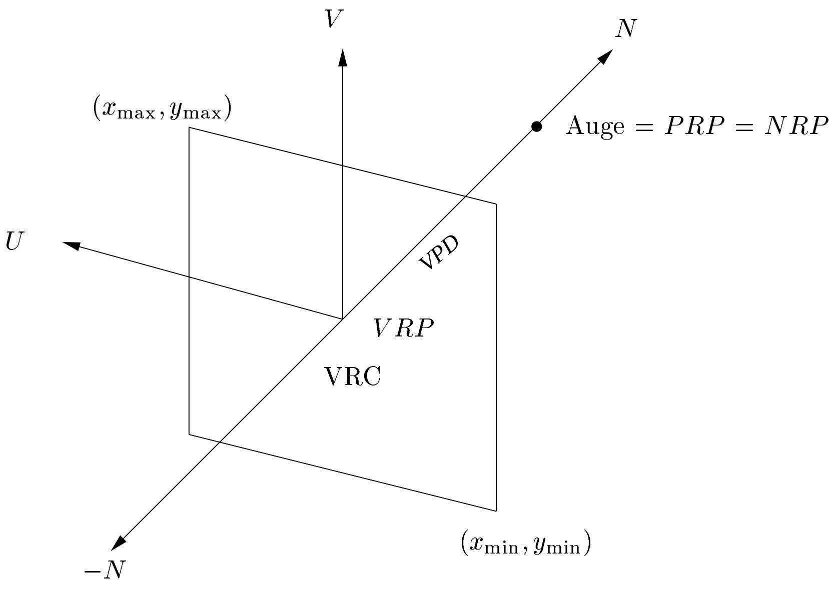
- Bilden von komplexen Szenen aus elementaren Objekten (*Modeling*),
- Festlegen der Bildschirmebene (*View Orientation*),
- Projektion auf ein normiertes Gerät (*View Mapping*),
- Abbildung auf ein Ausgabegerät (*Device Mapping*).

15.1 Die synthetische Kamera

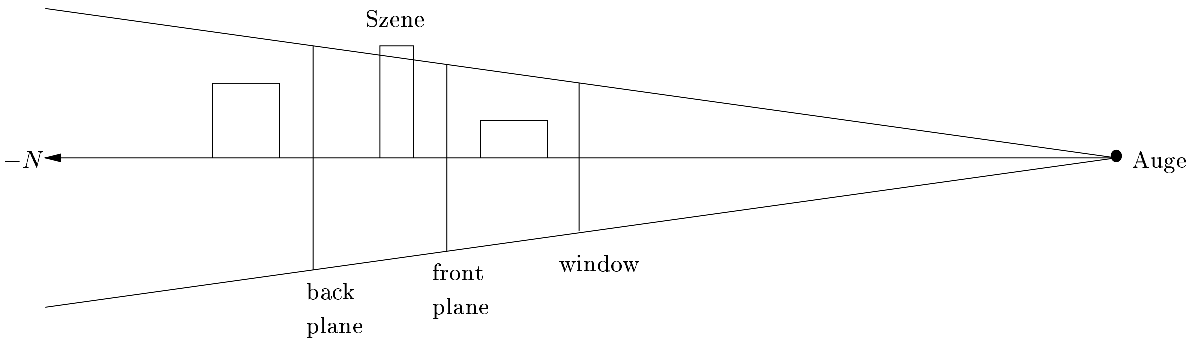
Die Parameter zur Durchführung der 3D-auf-2D-Abbildung (*viewing transformation*) sind im wesentlichen die Position und Orientierung einer *synthetischen Kamera* und ein Punkt in der Szene, auf den die Kamera fokussiert ist: Der View Reference Point (VRP).

Die View Plane ist die Bildebene, auf die die Szene projiziert wird. Diese ist definiert durch die View Plane Normal N, die Richtung, aus der die Kamera die Szene aufnimmt, und den VRP. Die Kamera befindet sich im NRP (Projection oder Normal Reference Point), der dem Augenpunkt eines natürlichen Betrachters entspricht.

Die Orientierung der Kamera wird durch den View Up Vector (VUV) festgelegt. Durch Projektion des VUV in die View Plane erhält man den Vektor V. Der Vektor U in der View Plane wird so gewählt, daß U, V, N ein rechtshändiges kartesisches Koordinatensystem bilden, das sogenannte View Reference Coordinate System VRC mit dem VRP als Ursprung und dem Augenpunkt NRP auf der positiven N-Achse bei $N = VPD$ (View Plane Distance).



Die beiden Punkte in den UV-Koordinaten der Viewplane $(x_{\min}, y_{\min})$, $(x_{\max}, y_{\max})$ legen das sogenannte View Window fest, d.h., was von der Szene zu sehen ist (entspricht der Brennweite eines Kameraobjektivs). Der sichtbare Teil kann noch weiter eingeschränkt werden durch Angabe einer *front plane* und *back plane*.



Bemerkung: Zur Berechnung der Projektion auf die Bildebene ist es unerheblich, wo die Bildebene in der Szene arrangiert ist.

15.2 Viewing Pipeline

Jedes Objekt wird beschrieben durch Modellkoordinaten (z.B. Würfel ist beschrieben durch Mittelpunkt $(0, 0, 0)$ und Kantenlänge 1).
Die Szene wird beschrieben durch eine Menge von Objekten, deren Lage und Größe in Weltkoordinaten beschrieben sind.
Die synthetische Kamera wird beschrieben durch $U, V, N, VPD, (x_{\max}, y_{\max}), (x_{\min}, y_{\min})$.
Folgende Abkürzungen werden verwendet:

MC	model coordinate system
WC	world coordinate system
VRC	view reference coordinate system
NPC	normalized projection coordinate system
DC	device coordinate system

Jedes Polygon durchläuft die folgende Viewing-Pipeline:

1.) Modeling: MC $\rightarrow$ WC
Beschreibe Polygonpunkte in Weltkoordinaten (dies geschieht durch Translation, Rotation und Skalierung).

2.) View Orientation: WC $\rightarrow$ VRC
Beschreibe Polygonpunkte bzgl. des UVN-Systems (dies geschieht durch Wechsel des Koordinatensystems, anschließend ist die Szene beschrieben mit xy-Ebene = Bildebene, das Auge liegt bei $z = VPD$).

3.) View Mapping: VRC $\rightarrow$ NPC
Transformiere die Szene derart, daß der sichtbare (= im Pyramidenstumpf aus view window, front plane, back plane liegende) Teil abgebildet wird auf einen Einheitswürfel, dessen Vorder- und Rückseite der *front plane* bzw. *back plane* entsprechen. Clippe jede Polygonkante am Einheitswürfel.

4.) Device Mapping: NPC $\rightarrow$ DC
Bilde jeden Bildpunkt auf Gerätekoordinaten ab = übernimm x, y-Koordinaten; z liefert Tiefeninformation.

Beim Flächenmodell werden nach dem Clipping in Schritt 3.) die Polygone in Dreiecke zerlegt. Die Dreiecke sind versehen mit den Normalen bzgl. des Weltkoordinatensystems. Diese werden benötigt für das Schattieren der Dreiecke.

15.2.1 Modeling-Transformationen

Punkt 1.) wird *Modeling* genannt: Das Anordnen von Objekten aus dem *Modellkoordinatensystem* (MC) zu einer Szene in dem sogenannten *Weltkoordinatensystem* (WC). Im MC liegen die Objekte als Prototypen vor. Ihre Definitionspunkte sind unabhängig von der späteren Größe und Position im WC in Modellkoordinaten gegeben. Der Ursprung des MC befindet sich sinnvollerweise im Zentrum des Objekts. Erst durch das Modeling erhalten die Objekte im WC ihre individuelle Größe, Orientierung und Position. Dieses wird im wesentlichen durch drei Arten von Transformationen realisiert: Translation, Rotation und Skalierung.

15.2.2 View Orientation

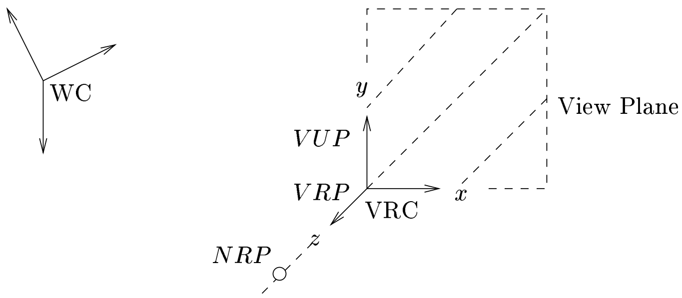
Zur Abbildung einer dreidimensionalen Szene aus den Weltkoordinaten auf den Bildschirm muß eine natürliche Betrachtersicht (*View Orientation*) definiert werden. Eine solche Betrachtersicht besteht aus den Viewing-Parametern

- Betrachterstandpunkt NRP (*Normal Reference Point*; auch *Eyepoint*),
- Blickrichtung VRP (*View Reference Point*),

- vertikale Orientierung VUP oder VUV (*View Up Vector*),
- Blickwinkel (Brennweite).

Der fiktive Betrachter blickt vom NRP in Richtung VRP und kippt dabei die Kamera so um die Blickrichtung, daß VUP von ihm aus gesehen vertikal nach oben zeigt. Der Blickwinkel entspricht der Brennweite und regelt den Bildausschnitt (*Zooming*).

Durch diese Parameter wird das VRC (*View Reference Coordinate System*) definiert mit VRP als Ursprung und NRP auf der positiven z-Achse. Die xy-Ebene wird als *View Plane* bezeichnet und steht senkrecht auf der Blickrichtung. Die y-Achse ist gegeben durch die Projektion von VUP in die View Plane. Deshalb darf VUP nicht parallel zur Blickrichtung sein.
Das VRC hat die gleiche Metrik wie das WC. Es handelt sich also um einen Wechsel des Koordinatensystems.
Der Abstand zwischen VRP und NRP wird als VPD (*View Plane Distance*) bezeichnet.



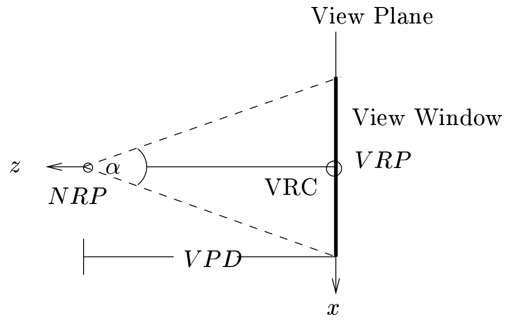
Definition des VRC

Für die Anwendung des Viewings ergeben sich im Programm verschiedene Möglichkeiten:

- Soll ein Objekt von verschiedenen Seiten betrachtet werden, so wird VRP in das Objekt gelegt. Durch NRP läßt sich nun die Blickrichtung frei wählen. Der Vektor VUP kann dabei konstant bleiben, sofern nicht senkrecht von oben oder unten geschaut wird.
- Soll sich die Szene bei konstantem Standpunkt um den Betrachter drehen, wird NRP festgesetzt. Durch Veränderung des VRP bewegt sich dann die Szene vor dem Auge des Betrachters. Der VUP kann dabei konstant bleiben, solange er nicht kollinear zum Vektor durch VRP und NRP wird.
- Eine weitere Möglichkeit sind Animationen, bei denen sich der Beobachter durch die Szene bewegt. Dieser Effekt läßt sich durch Verschieben von VRP und NRP um denselben Vektor erzielen.

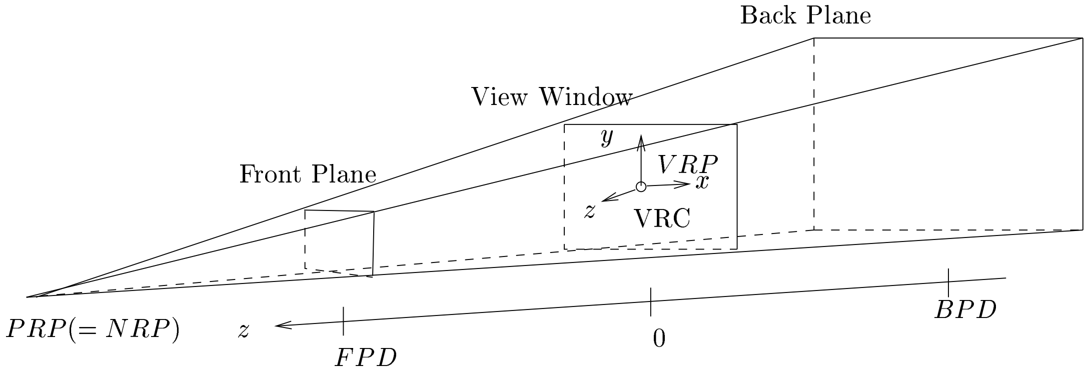
15.2.3 View Volume

Bei einer Kamera ist der maximal abbildbare Ausschnitt einer Szene durch das Objektiv festgelegt. Im Programm wird zur Erzielung desselben Effekts ein rechteckiger Ausschnitt aus der Bildebene — das *Window* — gewählt. Das Seitenverhältnis entspricht dem des Ausgabegeräts. Durch das View Window und die gewählte Projektion wird ein Bildraum definiert, der *View Volume* genannt wird. Nur jene Objekte und Objektteile, die sich innerhalb dieses Bildraumes befinden, werden auf die Bildebene (und dadurch in das View Window) abgebildet.



Definition des View Windows

Die Form des Bildraumes ist bei der perspektivischen Projektion eine unendliche Pyramide, deren Spitze im Projektionszentrum PRP (*Projection Reference Point*) liegt und deren Kanten durch die Eckpunkte des View Windows verlaufen. Hierbei wird im Programm der Betrachterstandpunkt NRP als Projektionszentrum gewählt.

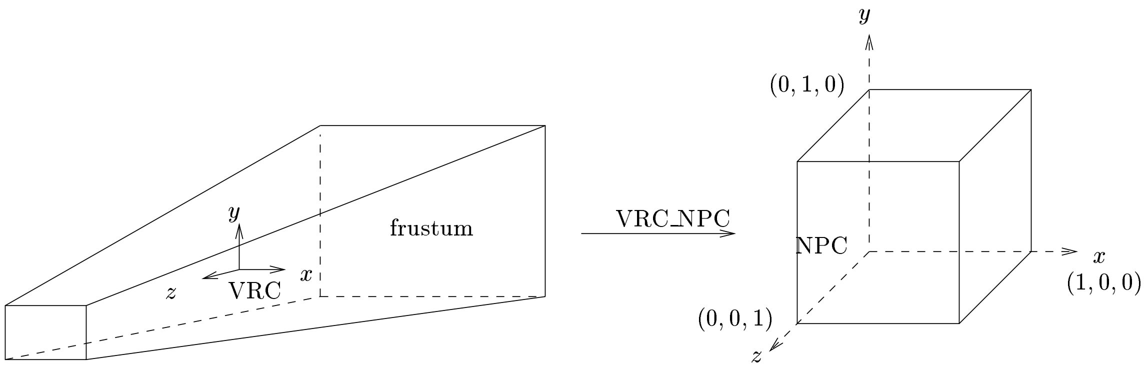


Bildraum bei perspektivischer Projektion

Die Begrenzung des Bildraumes in Richtung der z-Achse des VRC erfolgt durch zwei zur View Plane parallele Ebenen, die *Front* und *Back Plane* genannt werden. Die Front Plane liegt vom Projektionszentrum PRP aus gesehen vor der Back Plane. Ihre z-Komponenten werden als *Front Plane Distance* (FPD) und *Back Plane Distance* (BPD) bezeichnet. Es gilt $BPD < FPD$. Mit diesen Ebenen können Teile der Szene von der Projektion auf die Bildebene ausgeschlossen werden. Speziell bei der perspektivischen Projektion erweist sich diese Möglichkeit als notwendig, da sonst sehr nahe Objekte alle anderen verdecken bzw. sehr weit entfernte als nicht mehr erkennbare (d.h. zu kleine) Figuren abgebildet würden. Mit Front und Back Plane ergibt sich als View Volume ein Pyramidenstumpf.

15.2.4 View Mapping

Statt nun das View Volume aus dem VRC direkt auf den Bildschirm zu projizieren, wird im Programm eine weitere Transformation durchgeführt, die nicht nur zur Effizienzsteigerung des Algorithmus führt, sondern auch die Projektion der Szene auf die Bildebene erleichert: Der Bildraum wird in einen zur Bildebene normal ausgerichteten Einheitswürfel ($0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1; 0 \leq z \leq 1$) umgewandelt. Anstelle mehrerer unterschiedlicher Projektionen muß so anschließend nur noch die orthogonale Parallelprojektion auf die Ebene $z = 0$ durchgeführt werden. Das sogenannte *View Mapping* wird deshalb auch als Ausgabe auf einen normierten Bildschirm bezeichnet. Das Koordinatensystem, in dem sich der Einheitswürfel befindet, heißt *Normalized Projection Coordinate System* (NPC). Der Betrachterstandpunkt befindet sich im Unendlichen auf der positiven z-Achse und hat die homogenen Koordinaten $(0, 0, 1, 0)$. Vom Betrachter aus gesehen liegt im NPC der Punkt $(0, 0, 0)$ “links unten hinten” und $(1, 1, 1)$ “rechts oben vorne”.



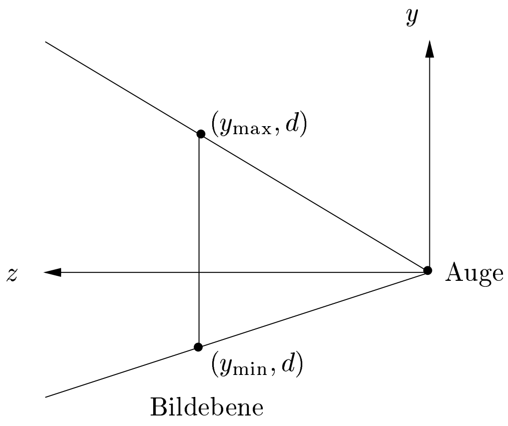
View Mapping

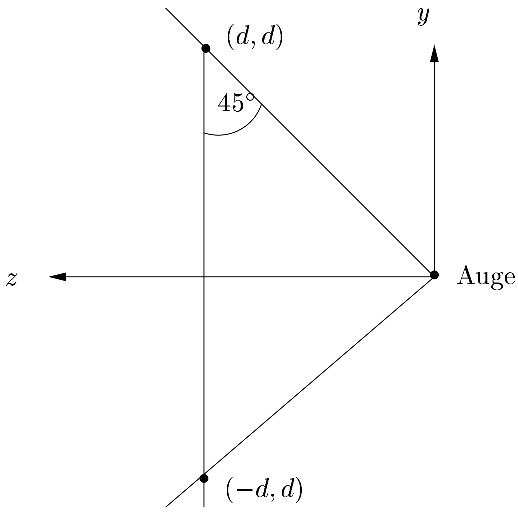
Bei der perspektivischen Projektion wird in einem ersten Schritt der Pyramidenstumpf, der den Bildraum darstellt und *frustum* genannt wird, auf einen regelmäßigen Pyramidenstumpf abgebildet. Dessen Grundfläche ist ein Quadrat, das mit jeder Seitenfläche einen Winkel von 45° einschließt. Dabei werden die z-Koordinaten nicht und die x- und y-Koordinaten proportional zur z-Koordinate verändert, was einer Scherung an der z-Achse entspricht. Im zweiten Schritt wird der regelmäßige Pyramidenstumpf in den normierten Einheitswürfel transformiert. Dazu müssen die x- und y-Koordinaten proportional zu den reziproken z-Werten skaliert werden. Die Front Plane entspricht im NPC der Ebene $z = 1$ und die Back Plane der Ebene $z = 0$.

Beide Schritte werden im Programm zu einer Transformationsmatrix zusammengefaßt. Bei deren Anwendung auf die homogenen Koordinaten ist zu beachten, daß die resultierenden Punkte im allgemeinen w-Werte ungleich 1 haben, die affinen Koordinaten also erst nach der Division durch w vorliegen. Außerdem ist diese Abbildung nur bezüglich der x- und y-Koordinaten linear. In z-Richtung werden die Werte durch die Scherung im zweiten Schritt reziprok verzerrt, d.h., äquidistante Punkte längs der z-Achse im VRC häufen sich im NPC bei $z = 0$ nahe der Back Plane.

Zur Erleichterung der Herleitung wird zunächst das Koordinatensystem so transformiert, daß der PRP im Ursprung sitzt. Danach wird das Koordinatensystem an der xy-Ebene gespiegelt, indem die z-Koordinaten mit -1 multipliziert werden. Danach ist das Koordinatensystem linkshändig.

Zur Durchführung von Punkt 3.) wird zunächst die abgeschnittene Pyramide (= frustum) transformiert in einen symmetrischen Pyramidenstumpf mit quadratischer Grundfläche und Kanten unter 45°.





Es müssen also die y-Koordinaten proportional zur z-Koordinate verändert werden. Dies entspricht einer Scherung an der z-Achse und Skalierung, d.h.

$$\begin{aligned} y' &= k_1 \cdot y + k_2 \cdot z \\ z' &= z \end{aligned}$$

Punkt $(y_{\max}, d)$ soll abgebildet werden auf (d, d);
Punkt $(y_{\min}, d)$ soll abgebildet werden auf $(-d, d)$.

Durch Lösen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} d &= k_1 \cdot y_{\max} + k_2 \cdot d \\ -d &= k_1 \cdot y_{\min} + k_2 \cdot d \end{aligned}$$

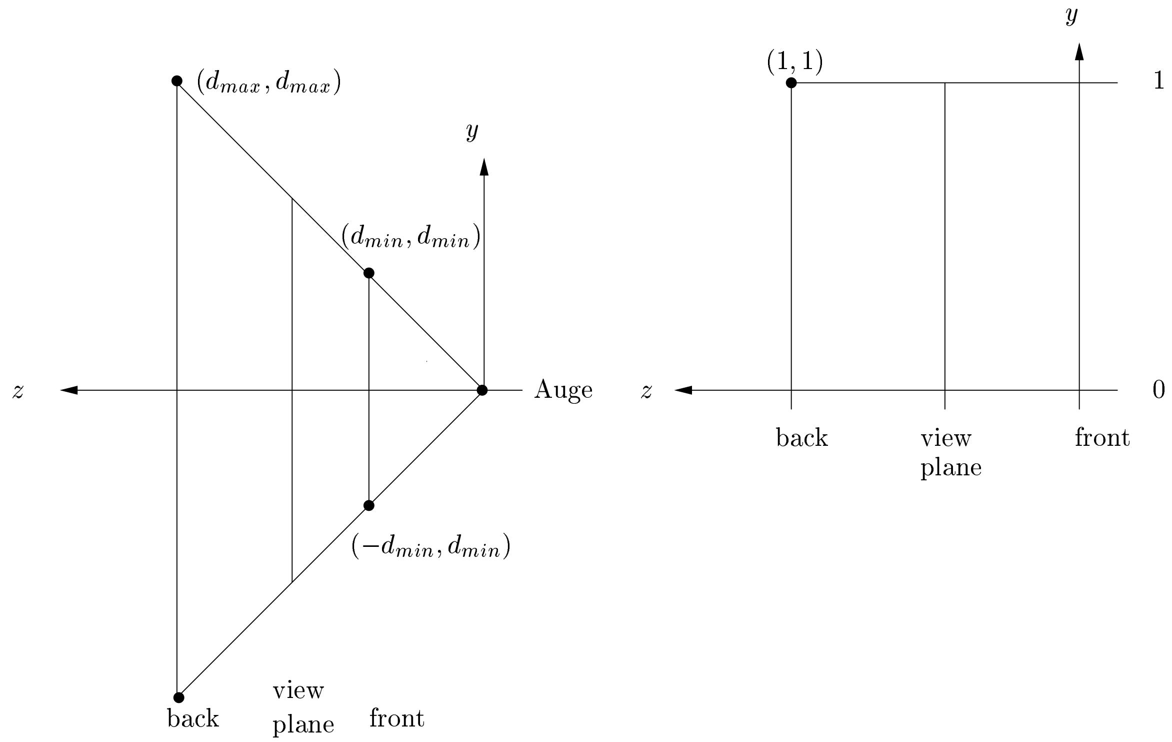
erhält man

$$k_1 = \frac{2d}{V_y}, \quad k_2 = -\frac{y_{\max} + y_{\min}}{V_y}$$

wobei $V_y = (y_{\max} - y_{\min})$ die Höhe des Bildfensters ist.
Analoge Scherung der x-Werte ergibt:

$$k_1 = \frac{2d}{V_x}, \quad k_2 = -\frac{x_{\max} + x_{\min}}{V_x}$$

wobei $V_x = (x_{\max} - x_{\min})$ die Breite des Bildfensters ist.
Als nächstes wird die regelmäßige Pyramide in den Einheitswürfel $(0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1)$ transformiert. Die *front plane* entspricht der Ebene $z = 0$ und die *back plane* der Ebene $z = 1$.



Da die y-Werte proportional zu den reziproken z-Werten skaliert werden müssen, ergibt sich als Transformation

$$\begin{aligned} y' &= k_1 + k_2 \cdot \frac{y}{z} \\ z' &= k_3 + k_4 \cdot \frac{1}{z} \end{aligned}$$

Der Kehrwert von z im Term zu z' ist erforderlich wegen der Verwendung von homogenen Koordinaten mit 4×4-Transformationsmatrizen.
Punkt $(d_{\max}, d_{\max})$ soll abgebildet werden auf $(1,1)$,
Punkt $(-d_{\min}, d_{\min})$ soll abgebildet werden auf $(0,0)$.
Durch Lösen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 1 &= k_1 + k_2 \cdot \frac{d_{\max}}{d_{\max}} \\ 0 &= k_1 + k_2 \cdot \frac{-d_{\min}}{d_{\min}} \end{aligned}$$

erhält man

$$k_1 = \frac{1}{2}, \quad k_2 = \frac{1}{2}.$$

Durch Lösen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 1 &= k_3 + k_4 \cdot \frac{1}{d_{\max}} \\ 0 &= k_3 + k_4 \cdot \frac{1}{d_{\min}} \end{aligned}$$

erhält man

$$k_3 = \frac{d_{\max}}{d_{\max} - d_{\min}}, \quad k_4 = -\frac{d_{\min} \cdot d_{\max}}{d_{\max} - d_{\min}}.$$

Die x-Werte werden analog zu den y-Werten skaliert. Insgesamt ergibt sich somit

$$\begin{aligned}
x' &= \frac{1}{2} + \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{z} \\
y' &= \frac{1}{2} + \frac{y}{2} \cdot \frac{1}{z} \\
z' &= \frac{d_{\max}}{d_{\max} - d_{\min}} - \frac{d_{\min} \cdot d_{\max}}{d_{\max} - d_{\min}} \cdot \frac{1}{z}.
\end{aligned}$$

Zwar wird hierdurch die Szene im vorderen z-Bereich nicht-linear gestaucht, zur Bestimmung der Sichtbarkeit reichen die ermittelten z-Werte jedoch aus, da ihre Ordnung erhalten bleibt. Durch Verknüpfen der beiden letzten Transformationen erhält man in Schritt 3.) als Transformationsmatrix

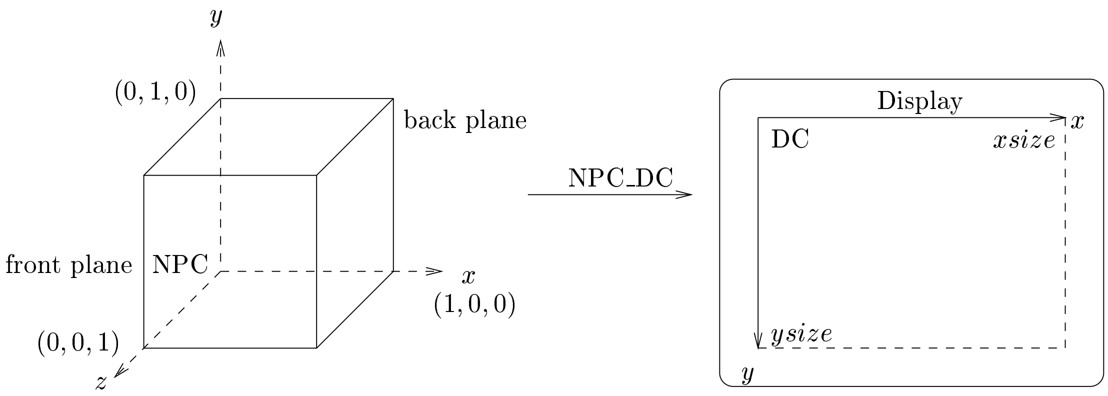
$$\begin{bmatrix}
\frac{d}{x_{\max} - x_{\min}} & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{d}{y_{\max} - y_{\min}} & 0 & 0 \\
\frac{1}{2}(1 - \frac{x_{\min} + x_{\max}}{x_{\max} - x_{\min}}) & \frac{1}{2}(1 - \frac{y_{\min} + y_{\max}}{y_{\max} - y_{\min}}) & \frac{d_{\max}}{d_{\max} - d_{\min}} & 1 \\
0 & 0 & \frac{-d_{\max} \cdot d_{\min}}{d_{\max} - d_{\min}} & 0
\end{bmatrix}$$

die den sichtbaren Teil der Szene in den Einheitswürfel transformiert.
Um wieder ein rechtshändiges Koordinatensystem zu erhalten, wird zunächst das Koordinatensystem so transformiert, daß die Back Plane in die xy-Ebene verschoben wird. Abschließend wird wieder an der xy-Ebene gespiegelt.
Für das Clippen von Kanten am Einheitswürfel bietet sich die dreidimensionale Erweiterung des Algorithmus von Cohen & Sutherland an: Der Bereichs-Code benötigt 6 Bits.

15.2.5 Device Mapping

Die abschließende Projektion der Szene in Schritt 4.) aus dem NPC auf den Bildschirm wird als *Device Mapping* bezeichnet. Der Einheitswürfel enthält dank der vorangegangenen Transformationen die gesamte darzustellende Szeneninformation. Die Abbildung muß lediglich die x- und y-Koordinaten aus dem NPC so in die Bildschirmkoordinaten DC (*Device Coordinate System*) transformieren, daß eine anschließende Rundung die ganzzahligen Koordinaten der Pixel ergibt.

DC ist auf den meisten Bildschirmen ein linkshändiges Koordinatensystem. (Die y-Achse zeigt nach unten, oben links ist der Ursprung $(0,0)$.) Die Anzahl der Pixel im Ausgabefenster ist flexibel und betrage horizontal $xsize$ und vertikal $ysize$. In x-Richtung muß dann das Intervall $[0,1]$ auf die diskreten Werte $\{0, ..., xsize - 1\}$ und in y-Richtung $[0,1]$ umgekehrt auf $\{ysize - 1, ..., 0\}$ abgebildet werden. Die z-Koordinaten dienen später zur Bestimmung und Unterdrückung verdeckter Flächen, die sich durch die Staffelung der Objekte in der Tiefe des Bildraumes ergeben (siehe z-Buffer-Algorithmus).



Device Mapping

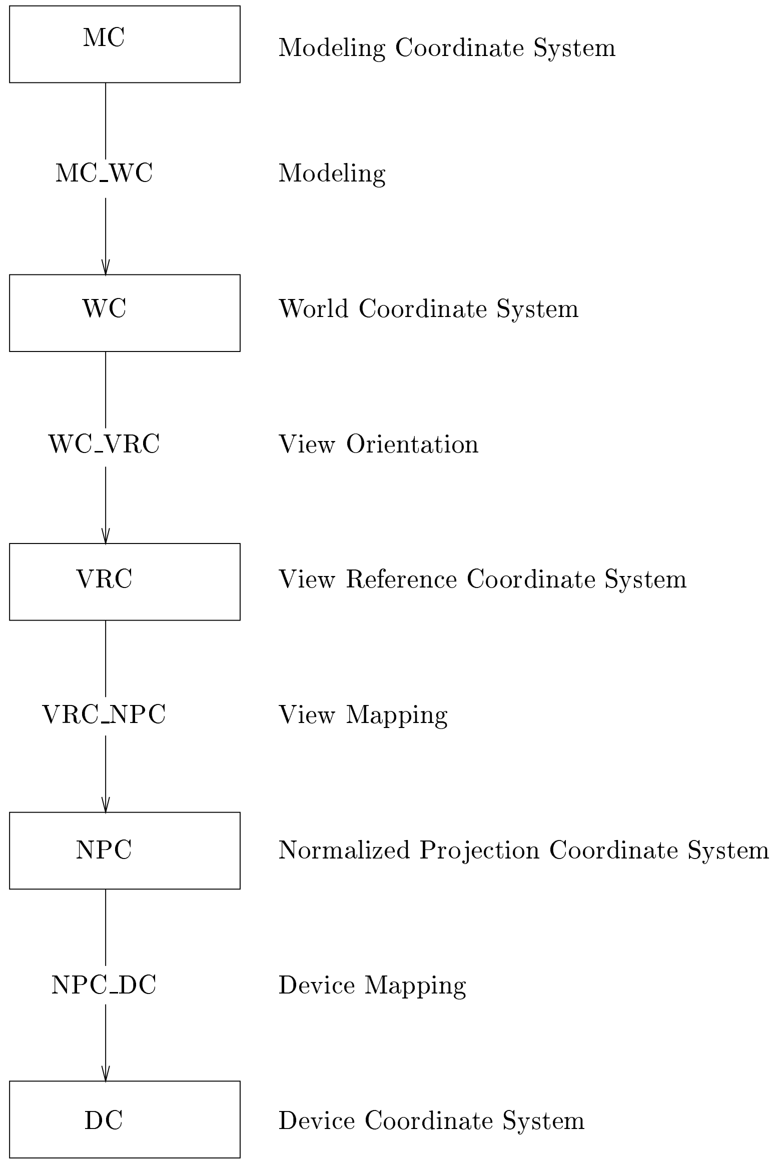
Die Transformationsmatrix entspricht einer Skalierung um den Vektor $(xsize, -ysize, 1)$ konkateniert mit einer Translation des Ursprungs in die linke untere Ecke des Bildschirms $(0, ysize, 0)$.

$$T_{\mathrm{NPC\_DC}} = \begin{pmatrix} xsize & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -ysize & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & ysize & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Für die Projektion werden einfach die x- und y-Werte übernommen; die z-Werte sind erforderlich zur Regelung der Sichtbarkeit beim Tiefenpufferalgorithmus.

15.2.6 Zusammenfassung

Die Abbildung zeigt die schematische Transformationspipeline im Überblick. Diese wird bei der Ausführung des Programms von Polygonen durchlaufen, aus denen sich die Elementarobjekte zusammensetzen.



Transformationspipeline