Kapitel 20

Algorithmen für globale Beleuchtung

Ein Beleuchtungsmodell berücksichtigt bei der Berechnung der Farbe für einen Punkt das von den Lichtquellen direkt abgegebene Licht und das Licht, das den Punkt nach Reflexion und Transmission durch seine eigene und andere Flächen erreicht. Dieses indirekt reflektierte und hindurchgelassene Licht heißt *globale Beleuchtung.* Als *lokale Beleuchtung* bezeichnet man das Licht, das direkt von den Lichtquellen auf den schattierten Punkt fällt. Bisher wurde die globale Beleuchtung durch einen Term für ambiente Beleuchtung modelliert, der für alle Punkte auf allen Objekten konstant war. Dieser Term berücksichtigte weder die Positionen von Objekt und Betrachter noch Objekte, die das Umgebungslicht blockieren könnten.

In realen Szenen kommt nur ein geringer Teil des Lichts aus direkten Lichtquellen. Es gibt zwei Klassen von Algorithmen zur Erzeugung von Bildern, die die Bedeutung globaler Beleuchtung hervorheben. Der zweite Teil dieses Kapitels behandelt den Ray Tracing-Algorithmus, der neben der Ermittlung sichtbarer Flächen und deren Schattierung gleichzeitig Schatten, Reflexion und Brechung berechnet. Globale spiegelnde Reflexion und Transmission ergänzen dabei die für eine Fläche berechnete lokale spiegelnde, diffuse und ambiente Beleuchtung. Im Gegensatz dazu trennen die Radiosity-Methoden die Schattierung völlig von der Ermittlung sichtbarer Flächen. Sie berechnen erst in einem vom Blickpunkt unabhängigen Schritt alle Interaktionen einer Szene mit den Lichtquellen. Dann berechnen sie mit konventionellen Algorithmen zur Ermittlung sichtbarer Flächen und Schattierung durch Interpolation ein oder mehrere Bilder für die gewünschten Standpunkte des Betrachters.

Vom Blickpunkt abhängige Algorithmen (z.B. Ray Tracing) diskretisieren die Bildebene, um die Punkte zu ermitteln, an denen die Beleuchtungsgleichung für eine bestimmte Blickrichtung ausgewertet wird. Beleuchtungsalgorithmen, die vom Blickpunkt unabhängig sind (z.B. Radiosity), diskretisieren dagegen die Szene und verarbeiten sie weiter, um genügend Informationen zur Auswertung der Beleuchtungsgleichung an jedem beliebigen Punkt und für jede Blickrichtung zu erhalten. Die Algorithmen, die vom Blickpunkt abhängig sind, eignen sich gut zur Behandlung von Spiegelungen, die stark vom Standpunkt des Betrachters abhängen. Sie erfordern jedoch bei der Behandlung diffuser Phänomene zusätzlichen Aufwand, da sich diese über große Bildbereiche oder zwischen Bildern aus verschiedenen Blickpunkten wenig ändern. Die Algorithmen, die nicht vom Blickpunkt abhängen, modellieren diffuse Phänomene dagegen effizient, haben aber bei der Behandlung von Spiegelungen einen enorm hohen Speicherbedarf.

20.1 Radiosity-Verfahren

Dieser Algorithmus geht von der Erhaltung der Lichtenergie in einer geschlossenen Szene aus. Jeder von einer Fläche abgestrahlten oder reflektierten Energie entspricht die Reflexion oder Absorption durch andere Flächen. Die gesamte von einer Fläche abgegebene Energie heißt *Strahlung* oder *Radiosity*. Sie besteht aus der Summe der abgestrahlten Energie, der reflektierten Energie und der Energie, die durch die Fläche hindurchtritt. Ansätze, die die Strahlung der Flächen einer Szene berechnen, heißen daher *Radiosity-Verfahren*. Im Gegensatz zu konventionellen Rendering-Algorithmen berechnen Radiosity-Verfahren erst unabhängig vom Blickpunkt alle Lichtinteraktionen einer Szene. Der Term für das ambiente Licht ist nicht mehr nötig, da sie die Reflexionen zwischen den Objekten genauer behandeln. Dann werden eine oder mehrere Darstellungen gerastert. Dabei fällt nur noch der Aufwand für die Ermittlung der sichtbaren Flächen und für die Schattierung durch Interpolation an.

20.1.1 Die Radiosity-Gleichung (Beleuchtungsgleichung)

Die bisher betrachteten Schattierungsalgorithmen behandeln die Lichtquellen immer unabhängig von den beleuchteten Flächen. Bei den Radiosity-Verfahren kann dagegen jede Fläche Licht abstrahlen. Daher werden alle Lichtquellen mit einem inhärenten Flächeninhalt modelliert. Die Szene wird in eine endliche Anzahl n diskreter Flächenelemente (*Patches*) zerlegt. Jedes dieser Elemente hat endliche Größe, strahlt über die gesamte Fläche gleichmäßig Licht ab und reflektiert Licht. Wenn man jedes der n Flächenelemente als opaken, diffusen Lambertschen Strahler und Reflektierer betrachtet, gilt für Fläche i

$$B_i = E_i + \rho_i \sum_{j=1}^{n} B_j F_{ij}, 1 \leq i \leq n \ .$$

mit

E_i	=	von der Fläche i abgegebene Eigenstrahlung
ρ_i	=	Reflexionsvermögen der Fläche i
n	=	Anzahl der Flächen
F_{ij}	=	Anteil an der von Fläche j abgegebenen Energie, die auf Fläche i auftritt, genannt *Formfaktor*
B_i	=	gesamte von Fläche i abgestrahlte Energie (Summe aus Eigenstrahlung und Reflexion als Energie pro Zeit und pro Flächeneinheit), genannt *Radiosity* der Fläche i

Die Gleichung besagt, daß die Energie, die eine Flächeneinheit verläßt, aus der Summe des abgestrahlten und des reflektierten Lichts besteht. Das reflektierte Licht berechnet sich aus der Summe des einfallenden Lichts, multipliziert mit dem Reflexionsvermögen. Das einfallende Licht besteht wiederum aus der Summe des Lichts, das alle Flächen der Szene verläßt, multipliziert mit dem Lichtanteil, der eine Flächeneinheit des empfangenden Flächenelements erreicht. $B_j F_{ij}$ ist der Betrag des Lichts, das die ganze Fläche j verläßt und eine Flächeneinheit von Fläche i erreicht.

Zwischen den Formfaktoren in diffusen Szenen besteht eine nützliche Beziehung:

$$F_i \cdot F_{ij} = F_j \cdot F_{ji} \ ,$$

wobei F_i und F_j die Flächeninhalte sind.

Umordnen der Ausdrücke liefert

$$B_i - \rho_i \sum_{1 \leq j \leq n} B_j F_{ij} = E_i \ .$$

Also kann der Austausch von Licht innerhalb der Flächenelemente der Szene durch ein Gleichungssystem ausgedrückt werden:

$$\begin{bmatrix} 1-\rho_1 F_{11} & -\rho_1 F_{12} & \dots & -\rho_1 F_{1n} \\ -\rho_2 F_{21} & 1-\rho_2 F_{22} & \dots & -\rho_2 F_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ -\rho_n F_{n1} & -\rho_n F_{n2} & \dots & 1-\rho_n F_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ B_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ E_n \end{bmatrix}$$

Man beachte, daß der Beitrag eines Flächenelements zu seiner eigenen reflektierten Energie berücksichtigt werden muß (es könnte zum Beispiel konkav sein). Daher haben im allgemeinen nicht alle Terme auf der Diagonalen den Wert Eins.
Wenn man die Gleichung löst, erhält man für jedes Flächenelement einen Strahlungswert. Die Elemente können dann für jeden gewünschten Blickpunkt mit einem gewöhnlichen Algorithmus zur Ermittlung sichtbarer Flächen gerastert werden. Die Strahlungswerte sind die Intensitäten dieses Elements.

Gauß-Seidel-Iterations-Verfahren zur Lösung von linearen Gleichungssystemen

Die i-te Gleichung eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$ lautet:

$$\sum_{j=0}^{n-1} A[i,j]x[j] = b[i] \ .$$

Wenn alle Diagonalelemente von A ungleich Null sind, gilt:

$$x[i] = \frac{1}{A[i,i]} \left(b[i] - \sum_{j \neq i} A[i,j]x[j] \right) \ .$$

Das Iterations-Verfahren startet mit einer Schätzung x_0, die auf der rechten Seite eingesetzt wird zur Berechnung von $x_1[0]$. Im nächsten Schritt wird zur Berechnung von $x_1[1]$ bereits $x_1[0]$ benutzt. Ein Iterationsschritt lautet also:

$$x_k[i] = \frac{1}{A[i,i]} \left(b[i] - \sum_{j=0}^{i-1} x_k[j]A[i,j] - \sum_{j=i+1}^{n-1} x_{k-1}[j]A[i,j] \right) \ .$$

Bei Konvergenz wird das Verfahren nach k Iterationsschritten abgebrochen, wenn $b - Ax_k$ genügend klein geworden ist.

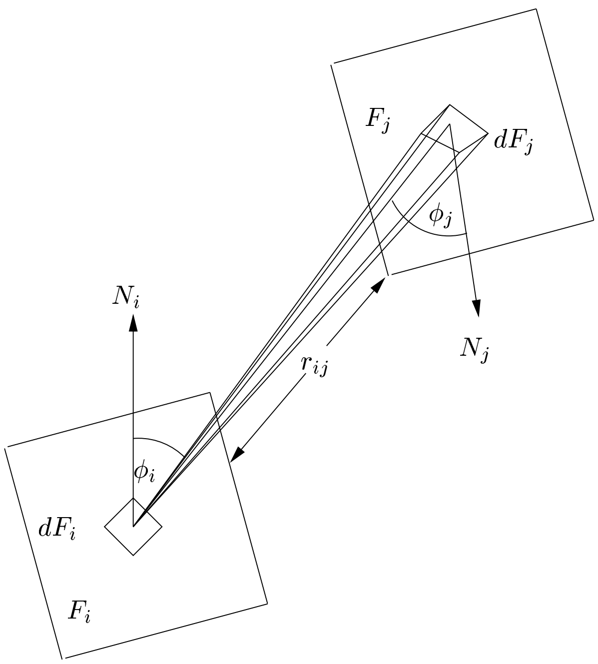
20.1.2 Berechnung der Formfaktoren

Die Formfaktoren werden bestimmt mit Hilfe der Gleichung

$$F_{ij} = \frac{1}{F_i} \int_{F_i} \int_{F_j} \frac{\cos(\phi_i)\cos(\phi_j)}{\pi r_{ij}^2} b_{ij} dF_j dF_i$$

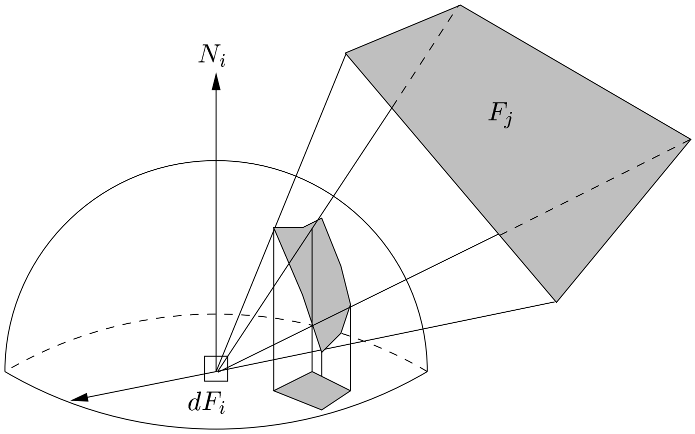
mit

ϕ_i	$=$	Winkel zwischen Normale auf Fläche i und Verbindungslinie zwischen Fläche i und Fläche j
ϕ_j	$=$	Winkel zwischen Normale auf Fläche j und Verbindungslinie zwischen Fläche i und Fläche j
r_{ij}	$=$	Entfernung zwischen Fläche dF_i und Fläche dF_j
b_{ij}	$=$	Blockierungsfunktion, falls Teile von Fläche j aus der Sicht von Fläche i verdeckt sind.
F_i	$=$	Flächeninhalt von Fläche i

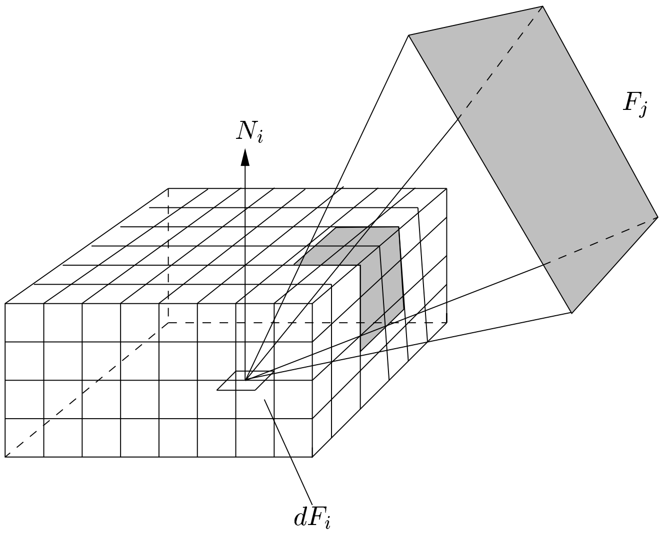


Der Berechnung von Formfaktoren zugrundeliegende Geometrie

Die geometrische Interpretation beschreibt den Formfaktor als das Verhältnis der Basisfläche einer Halbkugel zur Orthogonalprojektion der auf die Halbkugel projizierten Fläche: Erst projiziert man die von F_i aus sichtbaren Teile von F_j auf eine Halbkugel mit Radius Eins um dF_i, projiziert diese Projektion orthogonal auf die kreisförmige Grundfläche der Halbkugel und dividiert schließlich durch die Kreisfläche. Die Projektion auf die halbe Einheitskugel entspricht in der Gleichung dem Term $\cos\phi_j/r^2$, die Projektion auf die Grundfläche entspricht der Multiplikation mit $\cos\phi_i$, und die Division durch den Flächeninhalt des Einheitskreises liefert den Wert π im Nenner.



Geometrische Interpretation des Formfaktors



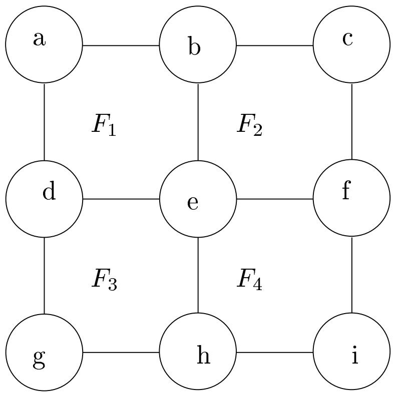
Der Halbwürfel ist die obere Hälfte eines Würfels, der um das Flächenelement zentriert ist.

Zur numerischen Berechnung wird die Halbkugel durch einen *Halbwürfel* (hemi-cube) mit dem Zentrum im Ursprung und dem Normalvektor in der z-Achse ersetzt. Die Oberseite des Würfels ist dabei parallel zur Fläche. Jede Seite des Halbwürfels wird in ein Raster gleich großer quadratischer Zellen aufgeteilt. (Die Auflösungen reichen von 50×50 bis zu mehreren Hundert pro Seite.) Dann wird jedes Flächenelement auf die Seiten des Halbwürfels projiziert. Dazu benutzt man einen Algorithmus, der für jede Zeile die Kennung des nächsten schneidenden Elements speichert. Diese Elementpuffer kann man mit einem z-Puffer-Algorithmus für jede Seite des Halbwürfels berechnen, bei dem man für jede Zelle statt der Schattierung die Kennung der nächstliegenden Fläche speichert. Jeder Zelle des Halbwürfels ist ein *Delta-Formfaktor* zugeordnet, der von der Position der Zelle abhängt und vorher berechnet wird. Für eine beliebig feine Rasterung der Quaderoberfläche ergibt sich der Formfaktor F_{ij} als Summe aller von der Fläche F_j überdeckten Rasterzellen. Wird eine Rasterzelle von mehreren Flächen überdeckt, wird sie der Fläche mit der geringsten Entfernung zugerechnet. Für die Summe aller Formfaktoren einer Fläche F_i gilt

$$\sum_{j=1}^{n} F_{ij} = 1 \ .$$

20.1.3 Interpolation der Pixelfarben

Für jede Fläche i liege nun ihre *Radiosity* B_i vor. Hieraus interpoliert man die Strahlung für die Eckpunkte:



$$\begin{array}{lcllcl}
B(e) & = & (B_1 + B_2 + B_3 + B_4)/4 & & & \\
B(a) & = & B_1 + (B_1 - B(e)) & B(c) & = & B_2 + (B_2 - B(e)) \\
B(g) & = & B_3 + (B_3 - B(e)) & B(i) & = & B_4 + (B_4 - B(e)) \\
 & & & & & \\
B(b) & = & (B(a) + (B(c))/2 & B(d) & = & (B(a) + B(g))/2 \\
B(f) & = & (B(c) + (B(i))/2 & B(h) & = & (B(g) + B(i))/2
\end{array}$$

Nun wird jedes Patch in zwei Dreiecke zerteilt, so daß nach der Projektion die Strahlungswerte an den Dreiecksecken zur zweifachen Interpolation verwendet werden können.

20.1.4 Schrittweise Verfeinerung

In Anbetracht des hohen Aufwands beim bisher beschriebenen Radiosity-Algorithmus stellt sich die Frage, ob man die Ergebnisse der Beleuchtungsberechnung inkrementell approximieren kann. Die Auswertung der i-ten Zeile des Gleichungssystems liefert eine Schätzung für die Strahlung B_i des Flächenelements, die auf den Schätzungen für die Strahlungswerte der anderen Flächenelemente basiert. Jeder Term in der Summe der Gleichung beschreibt die Auswirkung des Elements j auf die Strahlung des Elements i:

$$\text{Beitrag von } B_j \text{ zu } B_i = \rho_i B_j F_{ij} \text{ für alle } j \ .$$

Diese Methode "sammelt" also das Licht der restlichen Szene ein. Der Ansatz zur schrittweisen Verfeinerung verteilt dagegen die Strahlung eines Flächenelements auf die Szene. Dazu bietet sich die Anpassung obiger Gleichung zu

$$\text{Beitrag von } B_i \text{ zu } B_j = \rho_j B_i F_{ji} \text{ für alle } j \ .$$

an. Wenn man eine Schätzung für B_i hat, kann man den Beitrag des Flächenelements i zum Rest der Szene ermitteln, indem man vorstehende Gleichung für jedes Element j auswertet. Dazu braucht man leider F_{ji} für alle j. Jeder dieser Werte wird mit einem separaten Halbwürfel bestimmt. Dies erfordert ebensoviel Aufwand an Speicherplatz und Rechenzeit wie der ursprüngliche Ansatz. Man kann die Gleichung jedoch umschreiben, wenn man die Reziprozitätsbeziehung berücksichtigt.

$$\text{Beitrag von } B_i \text{ zu } B_j = \rho_j B_i F_{ij} \frac{F_i}{F_j} \text{ für alle } j \ .$$

Zur Auswertung dieser Gleichung für alle j sind nur die Formfaktoren nötig, die mit einem einzigen Halbwürfel um das Flächenelement i berechnet wurden. Kann man die Formfaktoren des Elements i schnell berechnen (z.B. mit z-Puffer-Hardware), kann man sie wieder löschen, sobald die Strahlungen vom Flächenelement i aus berechnet sind. Man muß also immer nur einen einzigen Halbwürfel und dessen Formfaktoren gleichzeitig berechnen und speichern.
Sobald die Strahlung eines Elements verteilt wurde, wählt man ein anderes Element aus. Ein Element kann wieder Strahlung verteilen, sobald es neues Licht von anderen Elementen erhält. Dabei wird nicht die gesamte geschätzte Radiosity des Elements i verteilt, sondern nur der Betrag ΔB_i, den das Element i seit dem letzten Verteilen empfing. Der Algorithmus läuft so lange weiter, bis die gewünschte Genauigkeit erreicht ist. Es ist sinnvoll, das Element mit der größten Differenz zu nehmen, statt die Elemente in zufälliger Reihenfolge auszuwählen. Man wählt also das Element, das noch am meisten Energie abzustrahlen hat. Da die Strahlung pro Flächeneinheit gemessen wird, wählt man ein Flächenelement, bei dem $\Delta B_i F_i$ maximal ist. Am Anfang gilt für alle Flächenelemente $B_i = \Delta B_i = E_i$. Dieser Wert ist nur bei Lichtquellen ungleich Null.

Im folgenden bezeichnet ΔB_i also die noch nicht verteilte Strahlung, d.h. die Differenz zwischen der *Radiosity* im letzten und im gegenwärtigen Iterationsschritt. Es wird ausgenutzt, daß gilt $F_{ji} = (F_{ij} \cdot F_i)/F_j$.

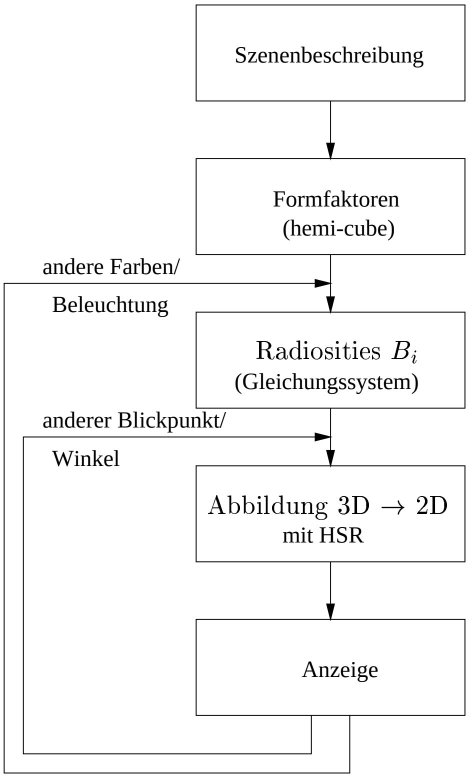
```
for i:= 1 to n do                            {initialisiere}
   if patch i ist Lichtquelle                {für jede Fläche}
     then Bi := ΔBi := Emissionswert         {Strahlung und Differenz}
     else Bi := ΔBi := 0
end;

repeat
   for {jede Fläche i, beginnend bei der mit der größten Ausstrahlung} do begin
     Plaziere Hemicube auf Fläche i
     Berechne Fij für alle 1 ≤ j ≤ n
     for j := 1 to n do begin                {für jede Fläche j tue}
        ΔR := ρj * ΔBi * Fij * Fi/Fj         {Strahlung von Fläche i}
        ΔBj := ΔBj + ΔR                      {Differenz erhöhen}
        Bj := Bj + ΔR                        {Strahlung erhöhen}
     end;
     ΔBi := 0;                               {Überschuß ist verteilt}
   end
until fertig                                 {bis zur Konvergenz}
```

Bei jeder Ausführung der äußeren FOR-Schleife verteilt ein weiteres Flächenelement seine unverbrauchte Strahlung auf die Szene. Daher werden nach der ersten Ausführung nur die Flächen beleuchtet, die selbst Lichtquellen sind sowie solche, die beim Verteilen der Strahlung des ersten Elements direkt beleuchtet werden. Rastert man am Ende jeder Ausführung des Codes ein neues Bild, so wird das erste Bild relativ dunkel und die nachfolgenden Bilder immer heller.

20.1.5 Zusammenfassung

Als Gesamtablauf des Radiosity-Verfahrens ergibt sich

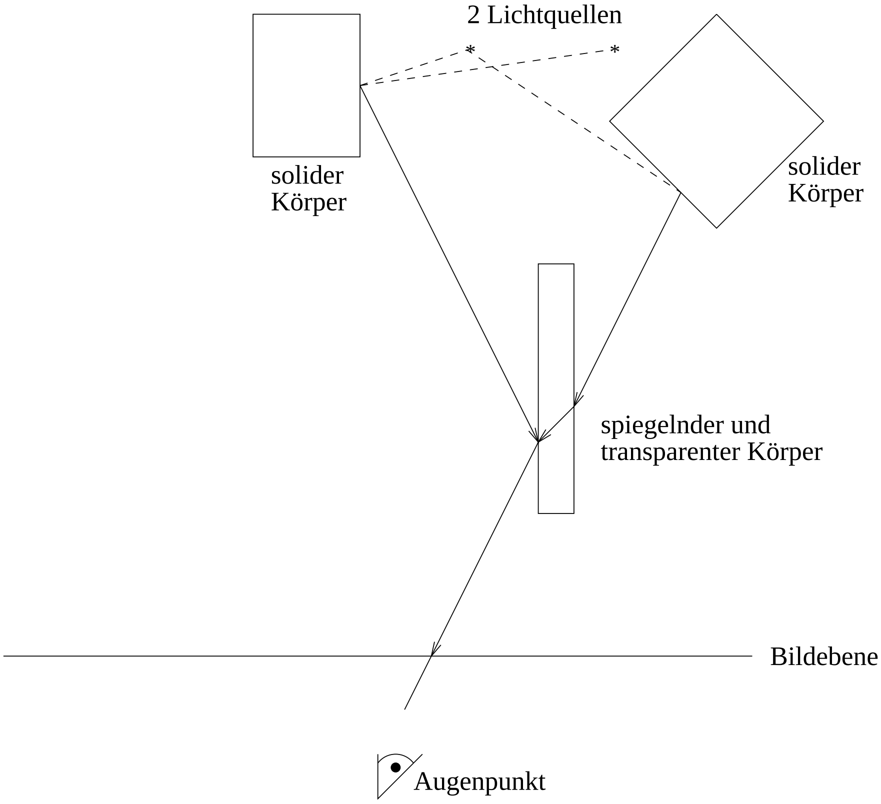


20.2 Ray Tracing

Verfahren mit *Ray Tracing* (Strahlverfolgung) eignen sich ausgezeichnet zur Modellierung von spiegelnden Reflexionen und von Transparenz mit Brechung (ohne Streuung). Globale Lichter werden mit einem ambienten Beleuchtungsterm ohne Richtung behandelt.

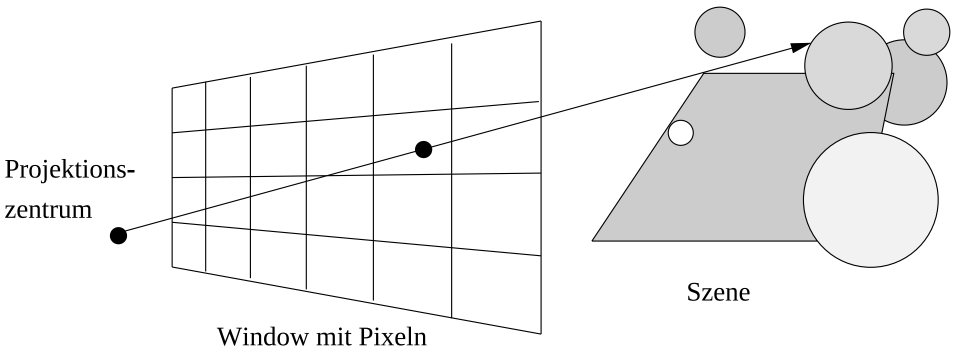
20.2.1 Grundlagen

Ausgehend vom Augenpunkt wird durch jedes Pixel ein Strahl gelegt und der Schnittpunkt dieses Strahls mit dem ersten getroffenen Objekt bestimmt. Trifft der Strahl auf kein Objekt, so erhält das Pixel die Hintergrundfarbe. Ist das Objekt spiegelnd, so wird der Reflexionsstrahl berechnet und rekursiv weiterbehandelt. Ist das Objekt transparent, wird zusätzlich der gebrochene Strahl weiterbehandelt. Zur Berechnung von Schatten wird von jedem Schnittpunkt zwischen Strahl und Objekt zu jeder Lichtquelle ein zusätzlicher Strahl ausgesandt. Trifft dieser Strahl auf ein blockierendes Objekt, dann liegt der Schnittpunkt im Schatten dieser Lichtquelle, und das von ihr ausgestrahlte Licht geht in die Intensitätsberechnung des Punktes nicht ein.



20.2.2 Ermittlung sichtbarer Flächen durch Ray Tracing

Verfahren mit *Ray Tracing* ermitteln die Sichtbarkeit von Flächen, indem sie imaginäre Lichtstrahlen des Betrachters zu den Objekten der Szene verfolgen. Man wählt ein Projektionszentrum (das Auge des Betrachters) und ein Window in einer beliebigen Bildebene. Das Window wird durch ein regelmäßiges Gitter aufgeteilt, dessen Elemente den Pixeln in der gewünschten Auflösung entsprechen. Dann schickt man für jedes Pixel im Window einen *Augstrahl* vom Projektionszentrum durch den Mittelpunkt des Pixels auf die Szene. Das Pixel erhält die Farbe des ersten getroffenen Objekts. Das folgende Programm enthält den Pseudocode für diesen einfachen Ray Tracer.




```
Wähle Projektionszentrum und Window in der Bildebene;
for(jede Rasterzeile des Bildes){
   for(jedes Pixel der Rasterzeile){
     Berechne den Strahl vom Projektionszentrum durch das Pixel;
     for(jedes Objekt der Szene){
        if(Objekt wird geschnitten und liegt bisher am nächsten)
           Speichere Schnittpunkt und Name des Objekts;
     }
     Setze das Pixel auf die Farbe des nächstliegenden Objektschnittpunkts;
   }
}
```

20.2.3 Berechnung von Schnittpunkten

Hauptaufgabe eines jeden Ray Tracers ist es, den Schnittpunkt eines Strahls mit einem Objekt zu bestimmen. Man benutzt dazu die parametrisierte Darstellung eines Vektors. Jeder Punkt (x, y, z) auf dem Strahl von (x_0, y_0, z_0) nach (x_1, y_1, z_1) wird durch einen bestimmten Wert definiert mit

$$x = x_0 + t(x_1 - x_0), \quad y = y_0 + t(y_1 - y_0), \quad z = z_0 + t(z_1 - z_0) \ .$$

Zur Abkürzung definiert man $\Delta x, \Delta y$ und Δz als

$$\Delta x = x_1 - x_0, \quad \Delta y = y_1 - y_0, \quad \Delta z = z_1 - z_0 \ .$$

Damit kann man schreiben

$$x = x_0 + t\Delta x, \quad y = y_0 + t\Delta y, \quad z = z_0 + t\Delta z \ .$$

Ist (x_0, y_0, z_0) das Projektionszentrum und (x_1, y_1, z_1) der Mittelpunkt eines Pixels im Window, so durchläuft t zwischen diesen Punkten die Werte von Null bis Eins. Negative Werte für

t liefern Punkte hinter dem Projektionszentrum, Werte größer als Eins stellen Punkte auf der Seite des Windows dar, die vom Projektionszentrum abgewandt sind. Man braucht für jeden Objekttyp eine Darstellung, mit der man den Wert von t am Schnittpunkt des Strahls mit dem Objekt bestimmen kann. Die Kugel bietet sich dafür als eines der einfachsten Objekte an. Aus diesem Grund tauchen Kugeln auch so oft in Ray-Tracing-Bildern auf. Eine Kugel um den Mittelpunkt (a, b, c) und Radius r kann durch die Gleichung

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$$

dargestellt werden. Zur Berechnung des Schnittpunkts multipliziert man die Gleichung aus und setzt x, y und z aus der Gleichung von oben ein.
Man erhält eine quadratische Gleichung in t, deren Koeffizienten nur die Konstanten aus den Gleichungen der Kugel und des Strahls enthalten. Man kann sie also mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen lösen. Wenn es keine reellen Lösungen gibt, schneidet der Strahl die Kugel nicht. Gibt es genau eine Lösung, dann berührt der Strahl die Kugel. Andernfalls geben die beiden Lösungen die Schnittpunkte mit der Kugel an. Der Schnittpunkt mit dem kleinsten positiven t-Wert liegt am nächsten.
Man muß zur Schattierung der Fläche die Flächennormale im Schnittpunkt berechnen. Im Fall der Kugel ist das besonders einfach, weil die (nicht normalisierte) Normale einfach der Vektor vom Kugelmittelpunkt zum Schnittpunkt ist: Die Kugel mit Mittelpunkt (a, b, c) hat im Schnittpunkt (x, y, z) die Flächennormale $((x - a)/r, (y - b)/r, (z - c)/r)$.
Es ist etwas schwieriger, den Schnittpunkt des Strahls mit einem Polygon zu berechnen. Um festzustellen, ob der Strahl ein Polygon schneidet, testet man zuerst, ob der Strahl die Ebene des Polygons schneidet und anschließend, ob der Schnittpunkt innerhalb des Polygons liegt.

20.2.4 Effizienz beim Ray Tracing zur Ermittlung sichtbarer Flächen

Die vorgestellte einfache, aber rechenintensive Version des Ray-Tracing-Algorithmus schneidet jeden Augstrahl mit jedem Objekt der Szene. Für ein Bild der Größe 1024×1024 mit 100 Objekten wären daher 100 Mio. Schnittpunktberechnungen erforderlich. Ein System verbraucht bei typischen Szenen 75-95 Prozent der Rechenzeit für die Schnittpunktroutine. Daher konzentrieren sich die Ansätze zur Effizienzsteigerung auf die Beschleunigung der Schnittpunktberechnungen oder deren völlige Vermeidung.

Optimierung der Schnittpunktberechnungen

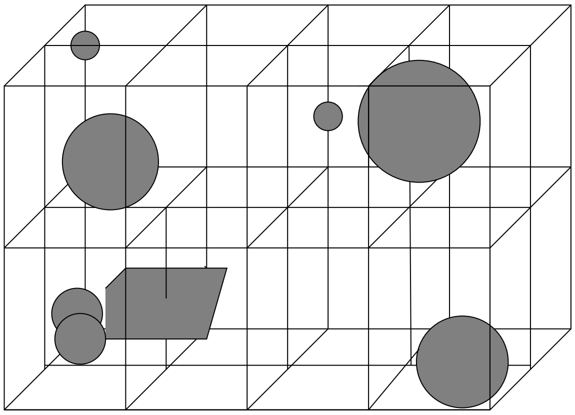
Die Formel für den Schnittpunkt mit einer Kugel läßt sich verbessern. Wenn man die Strahlen so transformiert, daß sie entlang der z-Achse verlaufen, kann man die gleiche Transformation auf die getesteten Objekte anwenden. Dann liegen alle Schnittpunkte bei $x = y = 0$. Dieser Schritt vereinfacht die Berechnung der Schnittpunkte. Das nächstliegende Objekt erhält man durch Sortieren der z-Werte. Mit der inversen Transformation kann man den Schnittpunkt dann für die Schattierungsberechnungen zurücktransformieren.
Begrenzungsvolumina eignen sich besonders gut dazu, die Zeit für die Berechnung der Schnittpunkte zu reduzieren. Man umgibt ein Objekt, für das die Schnittpunktberechnungen sehr aufwendig sind, mit einem Begrenzungsvolumen, dessen Schnittpunkte einfacher zu berechnen sind, z.B. Kugel, Ellipsoid oder Quader. Das Objekt wird nur dann getestet, wenn der Strahl das Begrenzungsvolumen schneidet.

Hierarchien

Begrenzungsvolumina legen zwar selbst noch keine Reihenfolge oder Häufigkeit der Schnittpunkttests fest. Sie können aber in verschachtelten Hierarchien organisiert werden. Dabei bilden die Objekte die Blätter, die inneren Knoten begrenzen ihre Söhne. Hat ein Strahl keinen Schnittpunkt mit einem Vaterknoten, dann gibt es garantiert auch keinen Schnittpunkt mit einem seiner Söhne. Beginnt der Schnittpunkttest also an der Wurzel, dann entfallen ggf. trivialerweise viele Zweige der Hierarchie (und damit viele Objekte).

Bereichsunterteilung

Die Hierarchie von Begrenzungsvolumina organisiert die Objekte von unten nach oben. Die Bereichsunterteilung teilt dagegen von oben nach unten auf. Zuerst berechnet man die *bounding box* der ganzen Szene. Bei einer Variante unterteilt man die *bounding box* dann in ein regelmäßiges Gitter gleich großer Bereiche. Jedem Bereich wird eine Liste mit den Objekten zugewiesen, die entweder ganz oder teilweise darin enthalten sind. Zur Erzeugung der Listen weist man jedes Objekt einem oder mehreren Bereichen zu, die dieses Objekt enthalten. Ein Strahl muß jetzt nur noch mit den Objekten in den durchlaufenen Bereichen geschnitten werden. Außerdem kann man die Bereiche in der Reihenfolge untersuchen, in der sie vom Strahl durchlaufen werden. Sobald es in einem Bereich einen Schnittpunkt gibt, muß man keine weiteren Bereiche mehr testen. Man muß jedoch alle anderen Objekte des Bereichs untersuchen, um das Objekt mit dem nächstliegenden Schnittpunkt zu ermitteln.

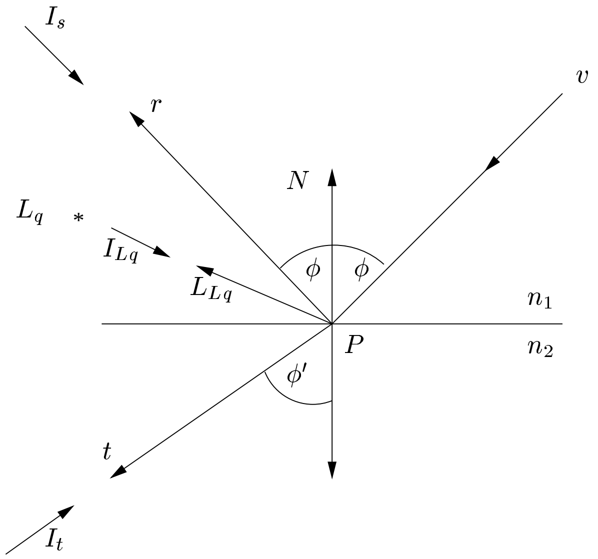


Die Szene wird durch ein regelmäßiges Gitter gleich großer Volumen unterteilt.

20.2.5 Rekursives Ray Tracing

In diesem Abschnitt wird der Basisalgorithmus zum Ray Tracing auf die Behandlung von Schatten, Reflexion und Brechung erweitert. Der einfache Algorithmus ermittelte die Farbe eines Pixels am nächsten Schnittpunkt eines Augstrahls und eines Objekts mit einem beliebigen der früher beschriebenen Beleuchtungsmodelle. Zur Schattenberechnung wird ein zusätzlichen Strahl vom Schnittpunkt zu allen Lichtquellen geschickt. Schneidet einer dieser *Schattenstrahlen* auf seinem Weg ein Objekt, dann liegt das Objekt am betrachteten Punkt im Schatten, und der Schattierungsalgorithmus ignoriert den Beitrag der Lichtquelle dieses Schattenstrahls.

Der rekursive Ray-Tracing-Algorithmus startet zusätzlich zu den Schattenstrahlen weitere *Spiegelungs-* und *Brechungsstrahlen* im Schnittpunkt (siehe Abbildung). Diese Spiegelungs-, Reflexions- und Brechungsstrahlen heißen *Sekundärstrahlen*, um sie von den *Primärstrahlen* zu unterscheiden, die vom Auge ausgehen. Gibt es bei dem Objekt spiegelnde Reflexion, dann wird ein Spiegelungsstrahl um die Flächennormale in Richtung r gespiegelt. Ist das Objekt transparent, und es gibt keine totale innere Reflexion, startet man einen Brechungsstrahl entlang t in das Objekt. Der Winkel wird nach dem Gesetz von Snellius bestimmt.
Jeder dieser Reflexions- und Brechungsstrahlen kann wiederum neue Spiegelungs-, Reflexions- und Brechungsstrahlen starten.
Typische Bestandteile eines *Ray-Tracing*-Programms sind die Prozeduren `shade` und `intersect`, die sich gegenseitig aufrufen. `shade` berechnet die Farbe eines Punktes auf der Oberfläche. Hierzu werden die Beiträge der reflektierten und gebrochenen Strahlen benötigt. Diese Beiträge erfordern die Bestimmung der nächstgelegenen Schnittpunkte, welche die Prozedur `intersect` liefert. Der Abbruch der Strahlverfolgung erfolgt bei Erreichen einer vorgegebenen Rekursionstiefe oder wenn ein Strahl kein Objekt trifft.



Seien v, N die normierten Vektoren für Sehstrahl und Normale. Sei $n = n_2/n_1$ das Verhältnis der beiden Brechungsindizes. Dann sind die Vektoren r und t, die im Schnittpunkt P zur Weiterverfolgung des reflektierten und gebrochenen Strahls benötigt werden, definiert durch

$$\begin{aligned} r &= v + 2\cos(\phi)N \\ t' &= p(N + v') - N \\ \text{mit } v' &= \frac{v}{|v \cdot N|} \text{ und } p = \frac{1}{\sqrt{n^2|v'|^2 - |v' + N|^2}} . \end{aligned}$$

Dabei ist r ein Einheitsvektor und t' ein Vektor in Transmissionsrichtung t. Ist p ein imaginärer Ausdruck, liegt Totalreflexion vor, und der Transmissionsanteil wird gleich Null gesetzt.

In die Berechnung der Farbe im Punkt P geht die gewichtete Summe der in den einzelnen Rekursionsschritten berechneten Farbintensitäten ein. Unter Berücksichtigung des *Phong*-Modells ergibt sich

$$I = k_a I_H + k_d \sum_{Lq} I_{Lq}(N \cdot L_{Lq}) + k_s(I_s + \sum_{Lq} I_{Lq}(A \cdot R_{Lq})^c) + k_t I_t$$

mit

k_a	ambienter Reflexionskoeffizient
I_H	Hintergrundbeleuchtung
k_d	diffuser Reflexionskoeffizient
I_{Lq}	Intensität der Lichtquelle
N	Normale auf Ebene
L_{Lq}	Vektor zur Lichtquelle
k_s	spiegelnder Reflexionskoeffizient
I_s	globale Transmissionsintensität
A	Vektor zum Augenpunkt
R_{Lq}	Reflexionsvektor für Lichtquelle L_q
c	spekularer Exponent
k_t	Transmissionskoeffizient (materialabhängig)
I_t	Transmissionsintensität

Pseudocode für einfaches rekursives Ray Tracing

```
Wähle Projektionszentrum und Window in der view plane;
for(jede Rasterzeile des Bildes){
   for(jedes Pixel der Rasterzeile){
     Ermittle Strahl vom Projektionszentrum durch das Pixel;
     pixel = RT_intersect(ray, 1);
   }
}

/* Schneide den Strahl mit Objekten, und berechne die Schattierung am nächsten */
/* Schnittpunkt. Der Parameter depth ist die aktuelle Tiefe im Strahlenbaum. */

RT_color RT_intersect(RT_ray ray, int depth)
{
   Ermittle den nächstliegenden Schnittpunkt mit einem Objekt;
   if(Objekt getroffen){
     Berechne die Normale im Schnittpunkt;
     return RT_shade(nächstliegendes getroffenes Objekt, Strahl, Schnittpunkt,
                     Normale, depth);
   }
   else
     return HINTERGRUND_FARBE;
}
```

```
/* Berechnen Schattierung für einen Punkt durch Verfolgen der Schatten-, */
/* Reflexions- und Brechungsstrahlen */

RT_color RT_shade(
   RT_object object,         /* Geschnittenes Objekt */
   RT_ray ray,               /* Einfallender Strahl */
   RT_point point,           /* Schnittpunkt, der schattiert werden soll */
   RT_normal normal,         /* Normale in dem Punkt */
   int depth)                /* Tiefe im Strahlenbaum */
{
RT_color color;              /* Farbe des Strahls */
RT_ray rRay, tRay, sRay;     /* Reflexions-, Brechungs- und Schattenstrahlen */
RT_color rColor, tColor;     /* Farbe des reflektierten und gebrochenen Strahls */

   color = Term für das ambiente Licht;

   for(jede Lichtquelle){
     sRay = Strahl von der Lichtquelle zum Punkt;
     if(Skalarprodukt der Normalen mit der Richtung zum Licht ist positiv){
        Berechne, wieviel Licht von opaken und transparenten Flächen blockiert wird;
        Skaliere damit die Terme für diffuse und spiegelnde Reflexion, bevor sie
        zur Farbe addiert werden;
     }
}
if(depth < maxDepth){        /* Bei zu großer Tiefe beenden */
     if(Objekt reflektiert){
        rRay = Strahl vom Punkt in Reflexionsrichtung;
        rColor = RT_intersect(rRay, depth + 1);
        Skaliere rColor mit dem Spiegelungskoeffizienten,
        und addiere den Wert zur Farbe;
     }
     if(Objekt ist transparent){
        tRay = Strahl vom Punkt in Brechungsrichtung;
        if(es gibt keine totale interne Reflexion){
           tColor = RT_intersect(tRay, depth + 1);
           Skaliere tColor mit dem Transmissionskoeffizienten,
           und addiere den Wert zur Farbe;
        }
     }
   }
   return color;             /* Liefere die Farbe des Strahls zurück */
}
```

Ray Tracing ist besonders anfällig für Probleme, die durch die begrenzte Rechengenauigkeit entstehen. Dies zeigt sich vor allem bei der Berechnung der Schnittpunkte sekundärer Strahlen mit den Objekten. Wenn man die x-, y- und z-Koordinaten eines Objekts mit einem Augstrahl berechnet hat, dienen sie zur Definition des Startpunkts eines Sekundärstrahls. Für diesen muß dann der Parameter t bestimmt werden. Wird das eben geschnittene Objekt mit dem neuen Strahl geschnitten, hat t wegen der begrenzten Rechengenauigkeit oft einen kleinen Wert ungleich Null. Dieser falsche Schnittpunkt kann sichtbare Probleme bewirken.

20.2.6 Public Domain Ray Tracer Povray

Der "Persistence of Vision Ray Tracer" (POV-Ray) ist ein urheberrechtlich geschütztes Freeware-Programm zum Berechnen einer fotorealitischen Projektion aus einer 3-dimensionalen Szenenbeschreibung auf der Grundlage der Strahlverfolgung. Seine Implementierung basiert auf DKBTrace 2.12 von David Buck & Aaron Collins. Zur Unterstützung des Anwenders gibt es einige include-Files mit vordefinierten Farben, Formen und Texturen.

Beispiel einer Szenenbeschreibung

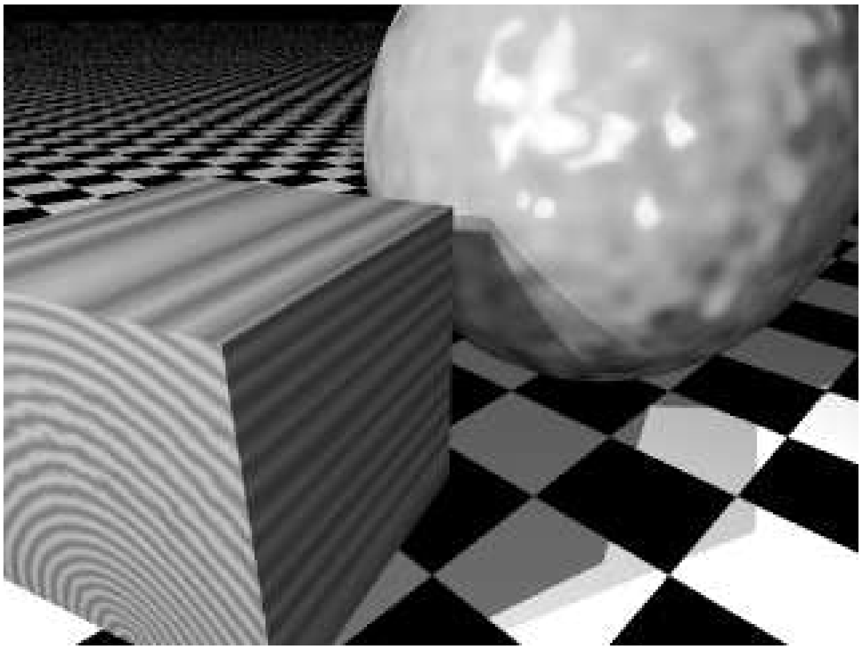
```
#include "colors.inc"
#include "textures.inc"

camera {
       location <3, 3, -1>
       look_at  <0, 1,  2>
}
light_source { <0, 4, -3> color White}
light_source { <0, 6, -4> color White}
light_source { <6, 4, -3> color White}

plane {
       <0, 1, 0>, 0
       pigment {
               checker
                      color White
                      color Black
       }
}

sphere {
       <0, 2, 4>, 2
       texture {
               pigment {color Orange}
               normal  {bumps 0.4  scale 0.2}
               finish  {phong 1}
       }
}

box {
       <-1, 0, -0.5>,
       < 1, 2,  1.5>
       pigment {
               DMFWood4
               scale 2
       }
       rotate y*(-20)
}
```



Povray-Bild zur Szenenbeschreibung

Der Aufruf von *povray* erfolgt zweckmäßigerweise mit einem Shell-Skript, dem der Name der zu bearbeitenden Datei als einziger Parameter übergeben wird:

```
#!/bin/sh

povray +I$1.pov +Oscene.tga +L/usr/lib/povray3/include +W320 +H200
```

Die vom Ray-Tracer erstellte Statistik lautet:

```
scene.pov Statistics, Resolution 320 x 200
----------------------------------------------------------------------------
Pixels:           64000   Samples:          64000   Smpls/Pxl: 1.00
Rays:             64000   Saved:                0   Max Level: 1/5
----------------------------------------------------------------------------
Ray->Shape Intersection          Tests       Succeeded  Percentage
----------------------------------------------------------------------------
Box                             238037          40342     16.95
Plane                           238037          62400     26.21
Sphere                          238037          50948     21.40
----------------------------------------------------------------------------
Calls to Noise:                      0   Calls to DNoise:         83403
----------------------------------------------------------------------------
Shadow Ray Tests:           522111   Succeeded:               24497
----------------------------------------------------------------------------
Smallest Alloc:                 12 bytes   Largest:           12308
Peak memory used:           103504 bytes
----------------------------------------------------------------------------
Time For Trace:    0 hours  0 minutes  18.0 seconds (18 seconds)
    Total Time:    0 hours  0 minutes  18.0 seconds (18 seconds)
```

Mit Hilfe des folgenden Shell-Skripts wird eine GIF-Datei für eine Colormap mit 256 Farben erstellt:

```
#!/bin/sh

tgatoppm $1.tga | ppmquant 256 | ppmtogif > $1.gif
```

Die Ausgabe dabei lautet:

```
ppmquant: making histogram...
ppmquant: 2053 colors found
ppmquant: choosing 256 colors...
ppmquant: mapping image to new colors...
ppmtogif: computing colormap...
ppmtogif: 239 colors found
```