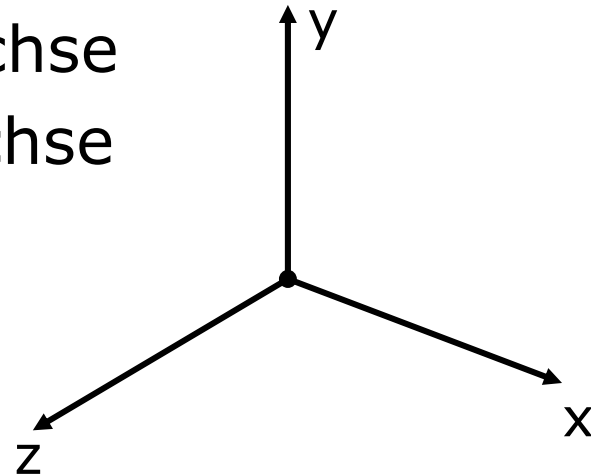


Kapitel 12: Mathematische Grundlagen

3D-Koordinatensystem

Das kartesische Koordinatensystem
in der rechtshändigen Form:

Daumen:	x-Achse
Zeigefinger:	y-Achse
Mittelfinger:	z-Achse



Länge eines Vektors

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{v}| := \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

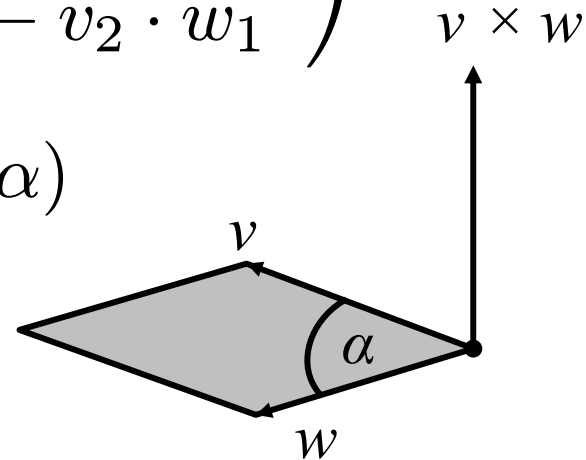
Kreuzprodukt

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

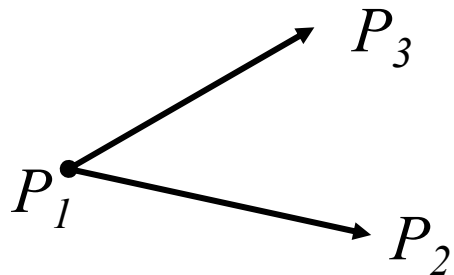
$$\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} v_2 \cdot w_3 - v_3 \cdot w_2 \\ v_3 \cdot w_1 - v_1 \cdot w_3 \\ v_1 \cdot w_2 - v_2 \cdot w_1 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{v} \times \vec{w}| = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \sin(\alpha)$$



Kreuzprodukt und Ebene



$$\vec{P_2 - P_1} \times \vec{P_3 - P_1}$$

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

aus Ebenengleichung $\Rightarrow$ Normalenvektor $(A \ B \ C)^T$

aus Normalenvektor $\Rightarrow D \Rightarrow$ Ebenengleichung
durch Einsetzen eines Punktes

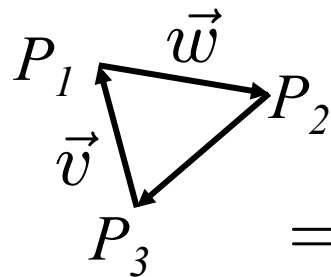
(x, y, z) liegt

...in der Ebene, falls $Ax + By + Cz + D = 0$

... oberhalb, falls $Ax + By + Cz + D > 0$

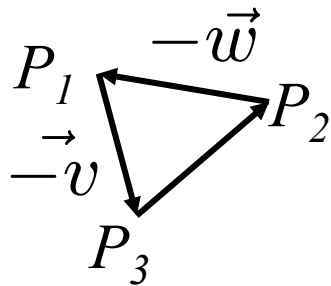
... unterhalb, falls $Ax + By + Cz + D < 0$

Kreuzprodukt und Fläche



$$n_{cw}^{\rightarrow} = P_1 \xrightarrow{\rightarrow} P_3 \times P_2 \xrightarrow{\rightarrow} P_1$$

$$= \vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} v_2 \cdot w_3 - v_3 \cdot w_2 \\ v_3 \cdot w_1 - v_1 \cdot w_3 \\ v_1 \cdot w_2 - v_2 \cdot w_1 \end{pmatrix}$$



$$n_{ccw}^{\rightarrow} = P_1 \xrightarrow{\rightarrow} P_2 \times P_3 \xrightarrow{\rightarrow} P_1$$

$$= -\vec{w} \times -\vec{v} = \begin{pmatrix} w_2 \cdot v_3 - w_3 \cdot v_2 \\ w_3 \cdot v_1 - w_1 \cdot v_3 \\ w_1 \cdot v_2 - w_2 \cdot v_1 \end{pmatrix}$$

$$n_{cw}^{\rightarrow} = -n_{ccw}^{\rightarrow}$$

gegen Uhrzeiger $\Rightarrow$ Normale zum Betrachter

Skalarprodukt

$$\vec{v} \cdot \vec{w} := \sum_{i=1}^n v_i \cdot w_i$$

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, s \in \mathbb{R}$$

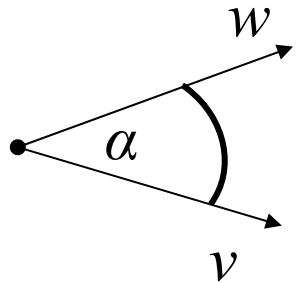
$$\text{Symmetrie:} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$\text{Linearität:} \quad (\vec{a} + \vec{c}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{c} \cdot \vec{b}$$

$$\text{Homogenität:} \quad (s\vec{a}) \cdot \vec{b} = s(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

$$\text{euklidische Norm:} \quad |\vec{b}| = \sqrt{\vec{b} \cdot \vec{b}}$$

Skalarprodukt und Winkel



$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} < 0$$

Winkel $> 90^\circ$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$$

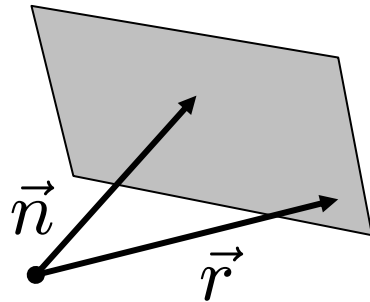
Winkel $= 90^\circ$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} > 0$$

Winkel $< 90^\circ$

Skalarprodukt und Ebene

Konstante	$D \in \mathbb{R}$
Normalenvektor	$\vec{n}$
Ebene als Lösung von	$\vec{n} \cdot \vec{r} = -D$



Determinante

ordnet einer quadratischen Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

eine Zahl zu: $\det(A)$ $|A|$

$|A|$ determiniert, ob A invertierbar ist

Gleichungssystem

$$a \cdot x = b$$

$$x = b/a \quad \text{falls } a \neq 0$$

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

$$\vec{x} = \vec{b}/A$$

$$\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b} \quad \text{falls } A \text{ invertierbar}$$

Inversion einer Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

gesucht A^{-1} mit $A \cdot A^{-1} = E = A^{-1} \cdot A$

möglich, falls Determinante von $A \neq 0$

Definition der Determinanten

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)})$$

$\operatorname{sgn}(\sigma)$ = Vorzeichen der Permutation
 $\Rightarrow n!$ Summanden

Adjunkte

A_{ik} : $(-1)^{i+k}$ · Unterdeterminante

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

$$A_{23} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Berechnung der Adjunkten

$$A_{23} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} = & -[+a_{11}(a_{32}a_{44} - a_{34}a_{42}) \\ & -a_{12}(a_{31}a_{44} - a_{34}a_{41}) \\ & +a_{14}(a_{31}a_{42} - a_{32}a_{41})] \end{aligned}$$

Berechnung der Inversion

$$\det(A) = \sum_{k=1}^4 a_{1k} A_{1k}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & A_{41} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & A_{42} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{43} \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} \end{pmatrix}$$