

Kapitel 13: 3D-Transformationen

Einsatzgebiet

- Platzierung von Objekten in der Szene
- Berechnung der Projektion

Translation

$$(x', y', z') := (x + t_x, y + t_y, z + t_z)$$

$$T(t_x, t_y, t_z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Skalierung

Fixpunkt im Ursprung:

$$(x', y', z') := (x \cdot s_x, y \cdot s_y, z \cdot s_z)$$

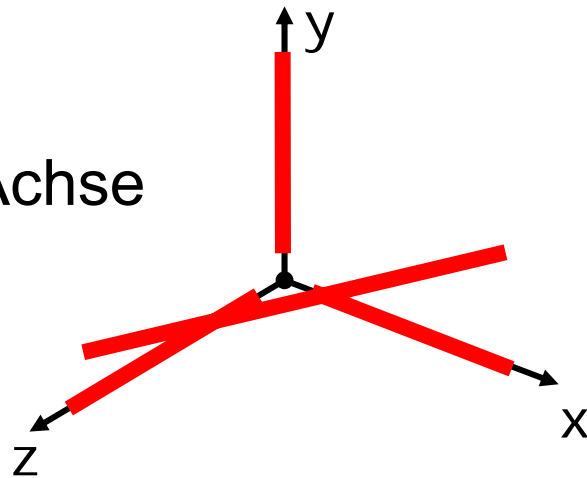
$$S(s_x, s_y, s_z) = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Fixpunkt bei Z_x, Z_y, Z_z :

$$T(Z_x, Z_y, Z_z) \cdot S(s_x, s_y, s_z) \cdot T(-Z_x, -Z_y, -Z_z)$$

Rotation

- um z-Achse
- um x-Achse
- um y-Achse
- um beliebige Achse

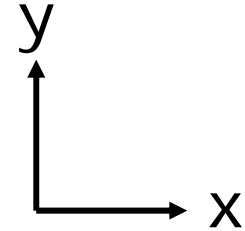


Rotation um z-Achse

$$x' := x \cdot \cos(\delta) - y \cdot \sin(\delta)$$

$$y' := x \cdot \sin(\delta) + y \cdot \cos(\delta)$$

$$z' := z$$



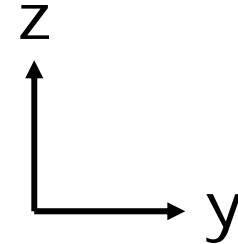
$$R_z(\delta) = \begin{pmatrix} \cos(\delta) & -\sin(\delta) & 0 & 0 \\ \sin(\delta) & \cos(\delta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotation um x-Achse

$$x' := x$$

$$y' := y \cdot \cos(\delta) - z \cdot \sin(\delta)$$

$$z' := y \cdot \sin(\delta) + z \cdot \cos(\delta)$$



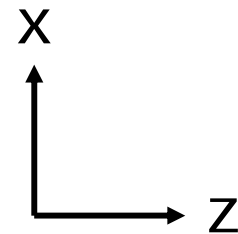
$$R_x(\delta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\delta) & -\sin(\delta) & 0 \\ 0 & \sin(\delta) & \cos(\delta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotation um y-Achse

$$x' := z \cdot \sin(\delta) + x \cdot \cos(\delta)$$

$$y' := y$$

$$z' := z \cdot \cos(\delta) - x \cdot \sin(\delta)$$



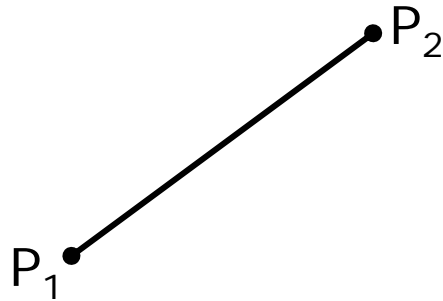
$$R_y(\delta) = \begin{pmatrix} \cos(\delta) & 0 & \sin(\delta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\delta) & 0 & \cos(\delta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotation um beliebige Achse

Punkt P Drehwinkel δ Drehachse P_2 - P_1

1. Translation in den Ursprung
2. Rotation um die x -Achse in die xz -Ebene
3. Rotation um die y -Achse in die z -Achse
4. Rotation um die z -Achse mit Winkel δ
5. Inversion von Schritt 3
6. Inversion von Schritt 2
7. Inversion von Schritt 1

Drehachse



$$\vec{v} = P_2 - P_1 = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

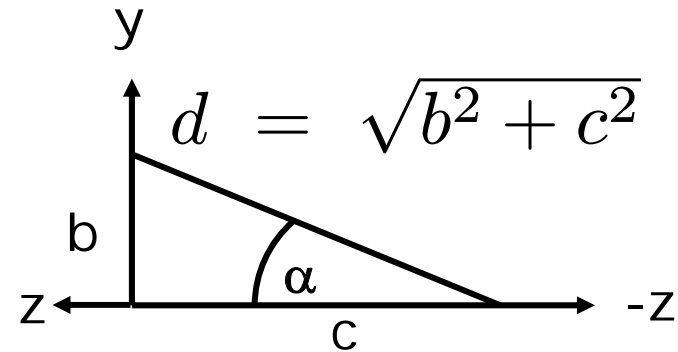
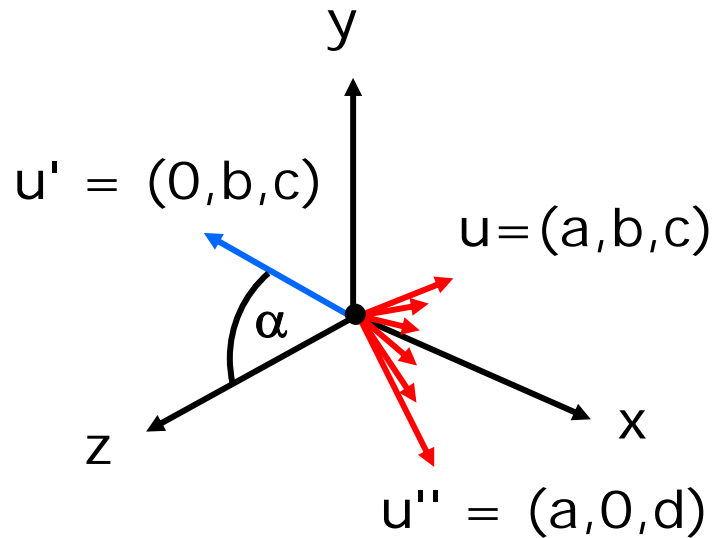
$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad |\vec{u}| = 1$$

$$a = \frac{x_2 - x_1}{|\vec{v}|} \quad b = \frac{y_2 - y_1}{|\vec{v}|} \quad c = \frac{z_2 - z_1}{|\vec{v}|}$$

1.) Translation in den Ursprung

$$T(-x_1, -y_1, -z_1)$$

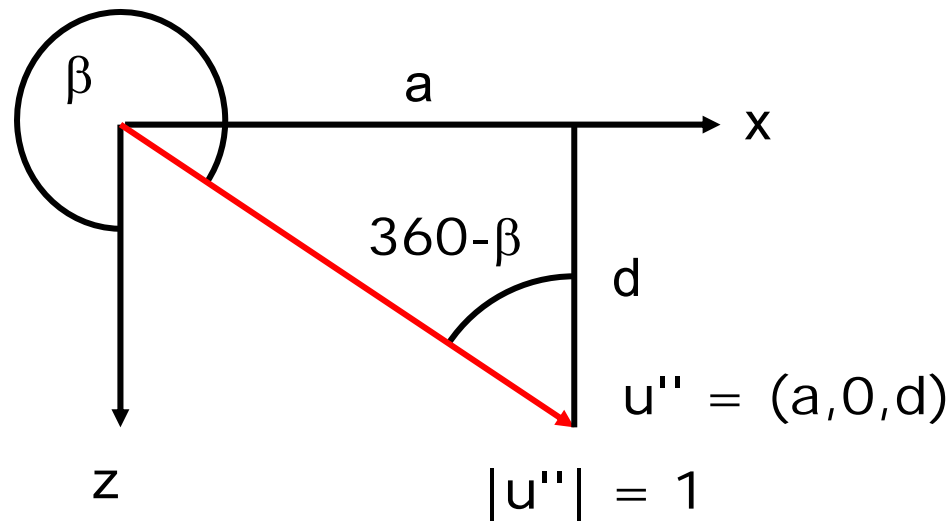
2.) Rotation um die x-Achse in die xz-Ebene



$$\cos(\alpha) = c/d$$

$$\sin(\alpha) = b/d$$

3.) Rotation um die y-Achse in die z-Achse



$$\Rightarrow \cos(\beta) = \cos(360^\circ - \beta) = d$$

$$\Rightarrow \sin(\beta) = -\sin(360^\circ - \beta) = -a$$

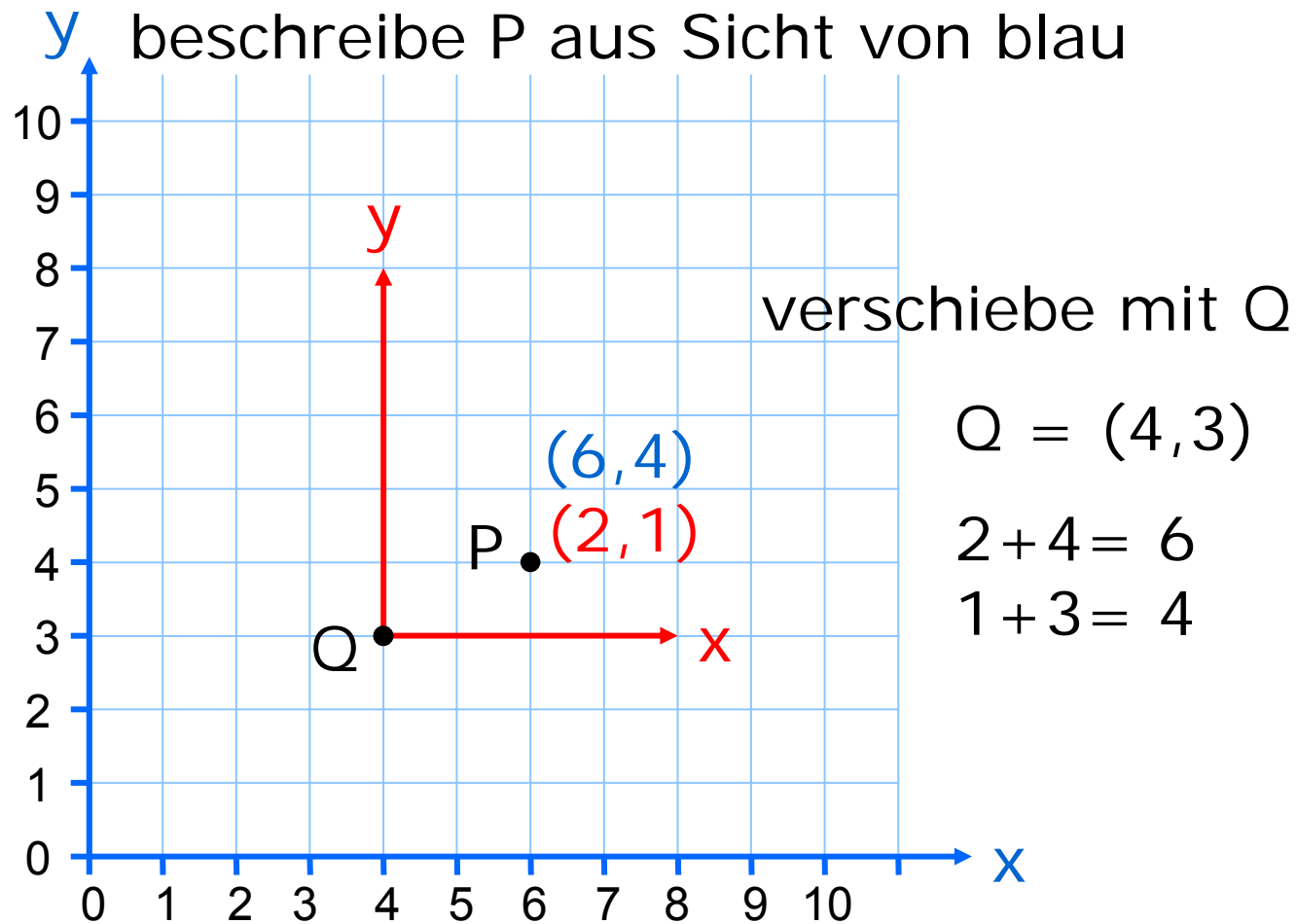
4.) Rotation um die z-Achse

$$R_z(\delta) = \begin{pmatrix} \cos(\delta) & -\sin(\delta) & 0 & 0 \\ \sin(\delta) & \cos(\delta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. - 7.) Gesamttransformation

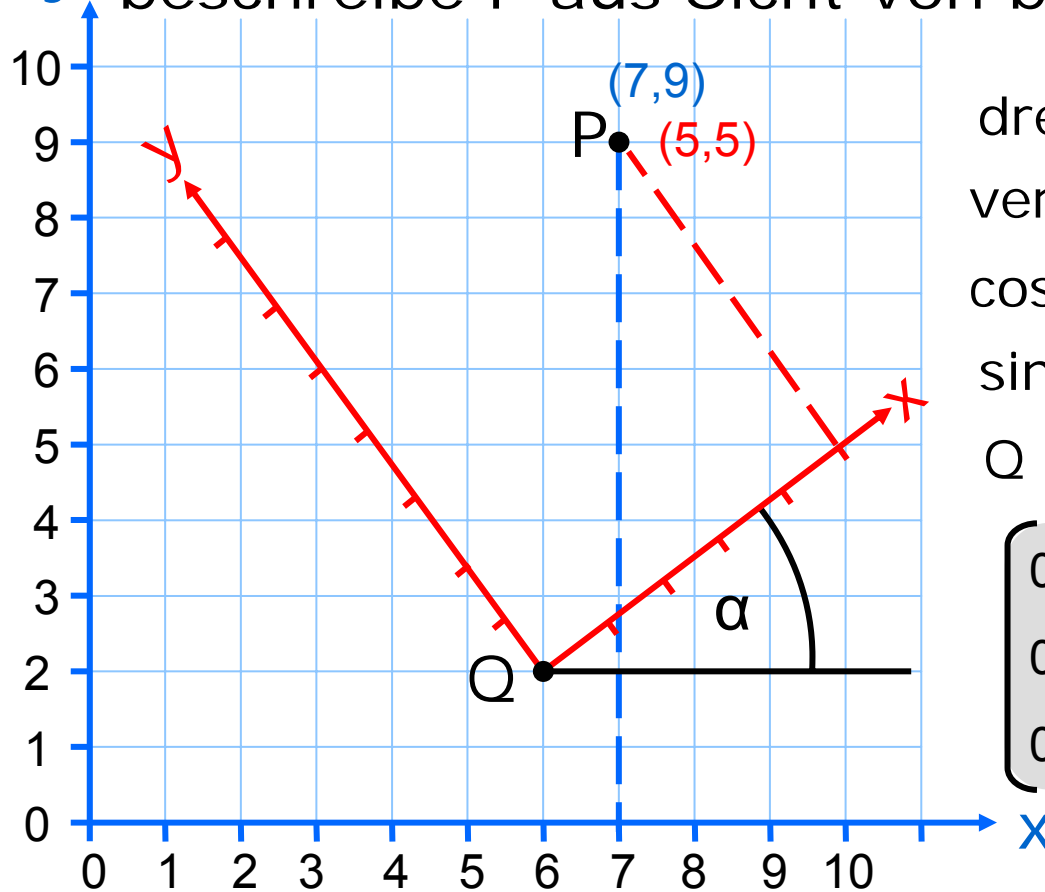
$$R(\vec{v}, \delta) = T(P_1) \cdot R_x^{-1}(\alpha) \cdot R_y^{-1}(\beta) \cdot R_z(\delta) \cdot T(-P_1)$$

Koordinatensystemwechsel, die 1.



Koordinatensystemwechsel, die 2.

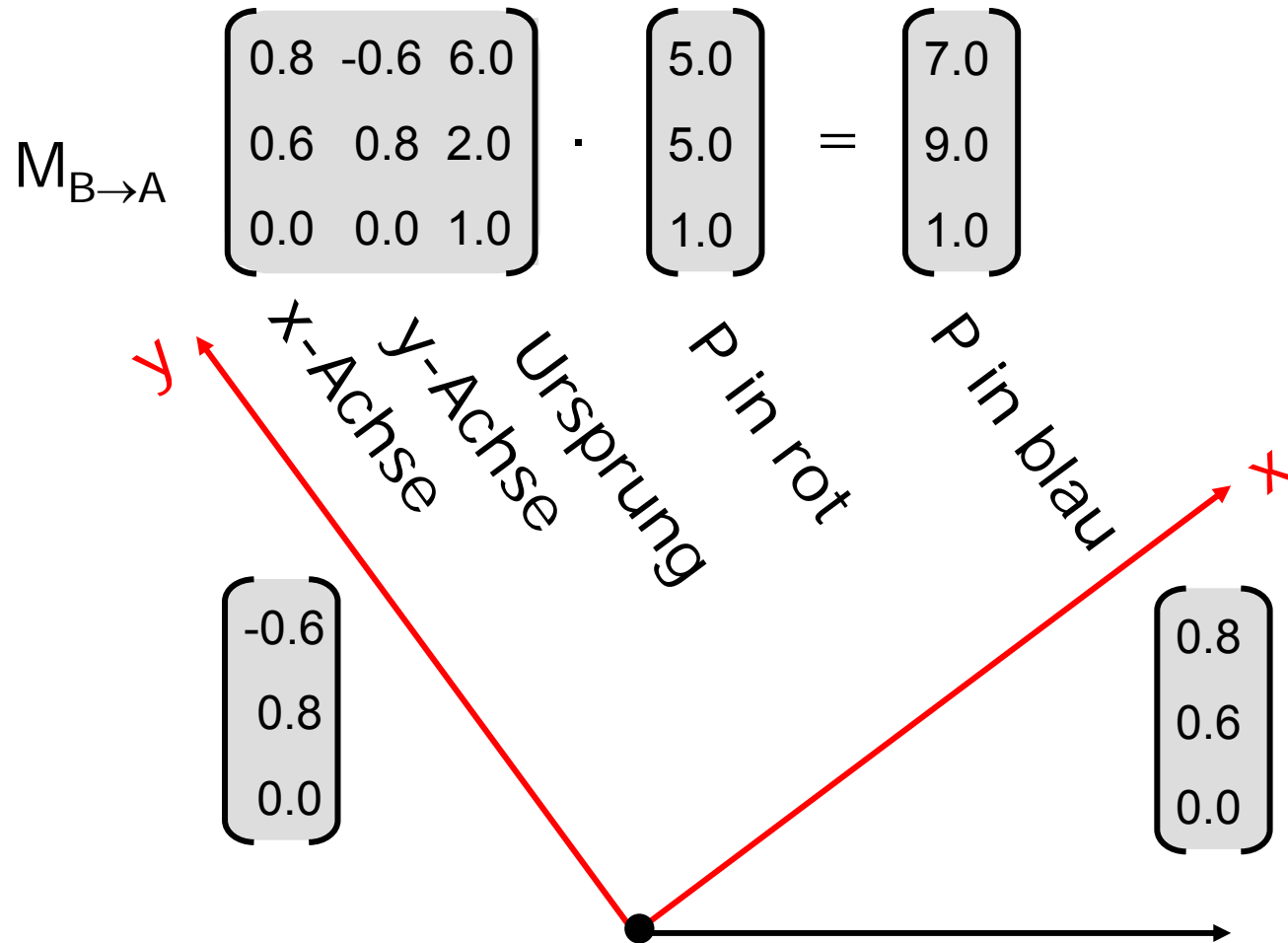
y beschreibe P aus Sicht von blau



drehe P um α
verschiebe mit Q
 $\cos(\alpha) = 4/5 = 0.8$
 $\sin(\alpha) = 3/5 = 0.6$
 $Q = (6, 2)$

$$\begin{pmatrix} 0.8 & -0.6 & 6.0 \\ 0.6 & 0.8 & 2.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{pmatrix}$$

Koordinatensystemwechsel, die 3.



Koordinatensystemwechsel, die 4.

$$M_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}} \cdot \vec{p}_{\mathcal{B}} = \vec{p}_{\mathcal{A}}$$

$$\begin{pmatrix} X_x^A & Y_x^A & Z_x^A & Q_x^A \\ X_y^A & Y_y^A & Z_y^A & Q_y^A \\ X_z^A & Y_z^A & Z_z^A & Q_z^A \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_x^B \\ p_y^B \\ p_z^B \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x^A \\ p_y^A \\ p_z^A \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ursprung von B
 z-Achse von B
 y-Achse von B
 x-Achse von B

Koordinatensystemwechsel, die 5.

Gegeben Punkt P_A , beschrieben in A

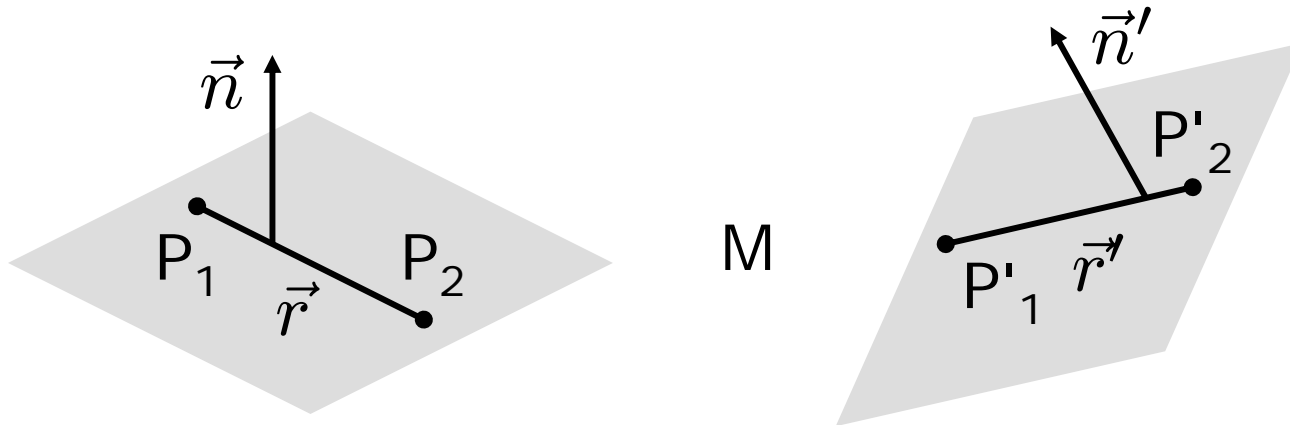
Gesucht Punkt P_B , beschrieben in B

$$M_{B \rightarrow A} \cdot \vec{p}_B = \vec{p}_A$$

$$\vec{p}_B = M_{B \rightarrow A}^{-1} \cdot \vec{p}_A$$

Multipliziere P_A mit der Inversen von $M_{B \rightarrow A}$

Transformation einer Normalen



$$\vec{r} = P_2 - P_1 \quad P'_1 = M \cdot P_1 \quad P'_2 = M \cdot P_2$$

$$\vec{r}' = P'_2 - P'_1$$

$$= M \cdot P_2 - M \cdot P_1 = M \cdot (P_2 - P_1) = M \cdot \vec{r}$$

$$\vec{r} \cdot \vec{n} = 0$$

$$\vec{r}' \cdot \vec{n}' = 0$$

$$M \cdot \vec{r} \cdot \vec{n}' = 0$$

Ausmultiplizieren + Umordnen

$$M \cdot \vec{r} \cdot \vec{n}' = 0$$

.....

$$\vec{r} \cdot M^T \cdot \vec{n}' = 0 \quad \vec{r} \cdot \vec{n} = 0$$

$$M^T \cdot \vec{n}' = \vec{n}$$

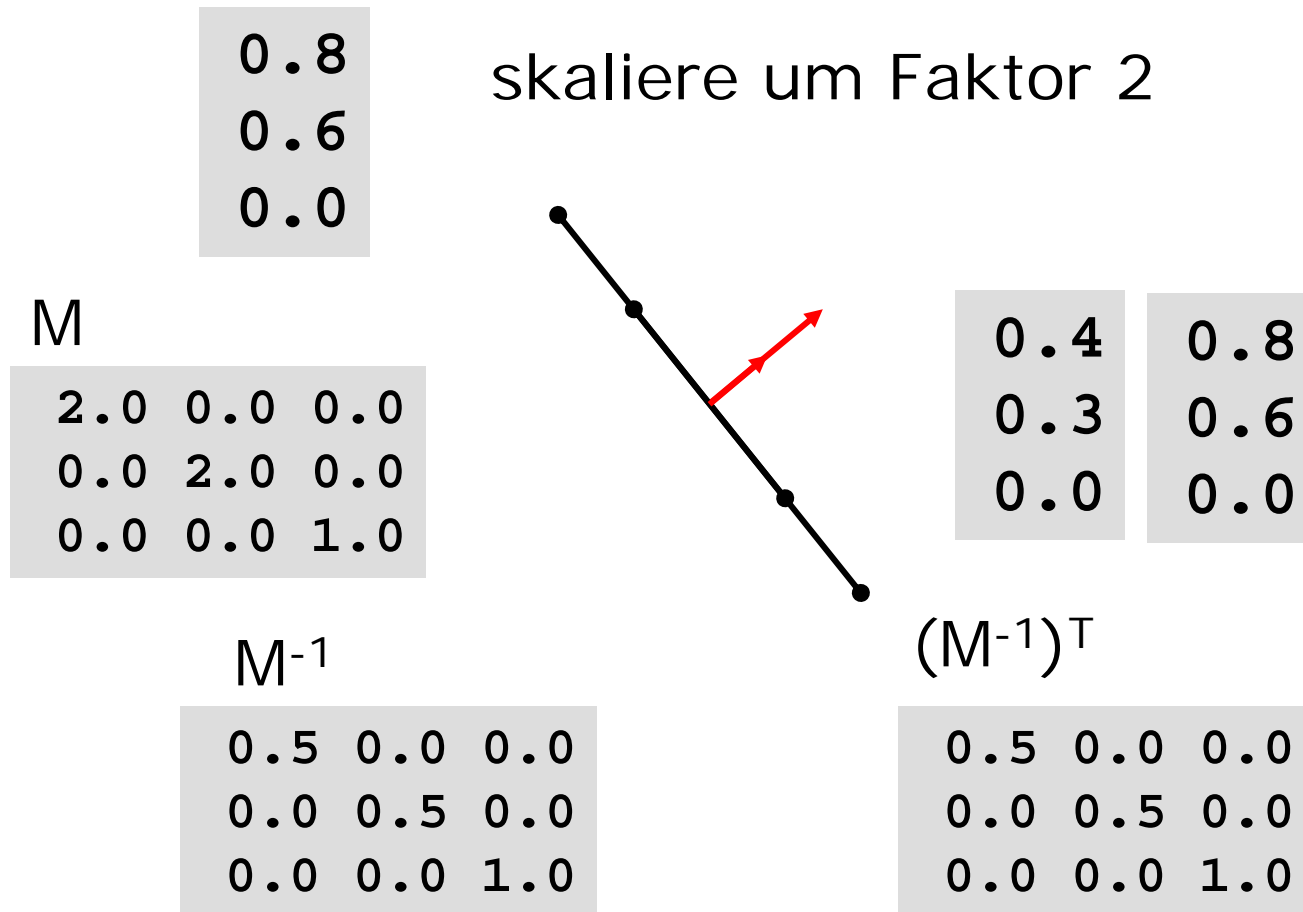
$$\vec{n}'^T \cdot M = \vec{n}^T$$

$$\vec{n}'^T = \vec{n}^T \cdot M^{-1}$$

$$\vec{n}' = (M^{-1})^T \cdot \vec{n}$$

⇒ transformiere den Normalenvektor
mit der transponierten Inversen !

Skalierung einer Normalen



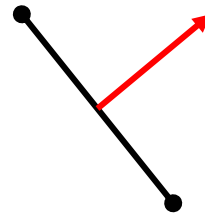
Rotation einer Normalen

0.8
0.6
0.0

drehe um 25°

M

0.91 -0.42 0.0
0.42 0.91 0.0
0.0 0.0 1.0



0.48
0.88
0.00

M^{-1}

0.91 0.42 0.0
-0.42 0.91 0.0
0.0 0.0 1.0

$(M^{-1})^T$

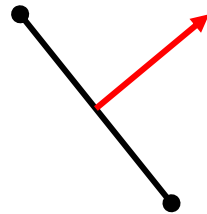
0.91 -0.42 0.0
0.42 0.91 0.0
0.0 0.0 1.0

Translation einer Normalen

verschiebe um (5,2)

0.8
0.6
0.0

0.8
0.6
0.0



M

M^{-1}

$(M^{-1})^T$

1	0	5
0	1	2
0	0	1

1	0	-5
0	1	-2
0	0	1

1	0	0
0	1	0
-5	-2	1