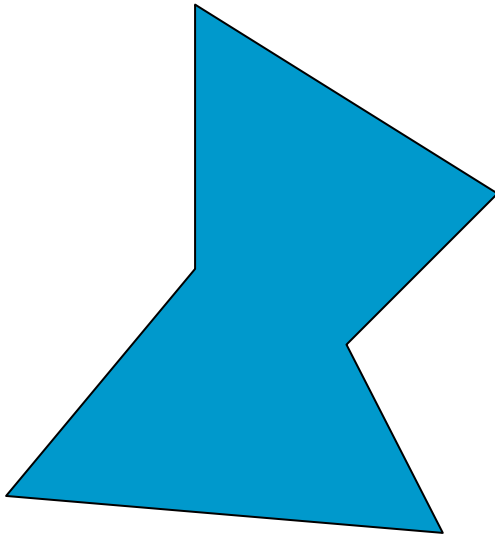


# Kapitel 6: 2D-Transformationen

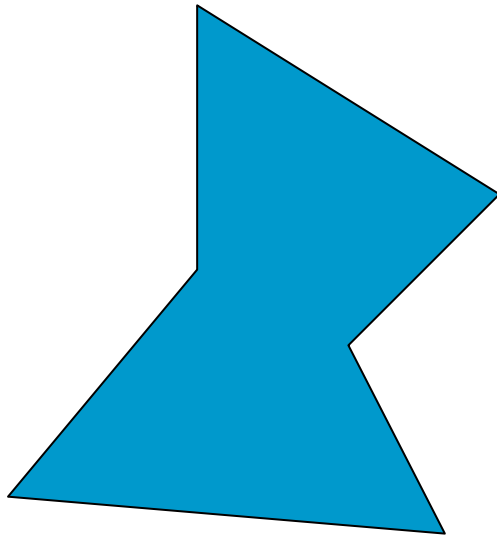
# Translation



$$x' := x + t_x$$

$$y' := y + t_y$$

# Skalierung



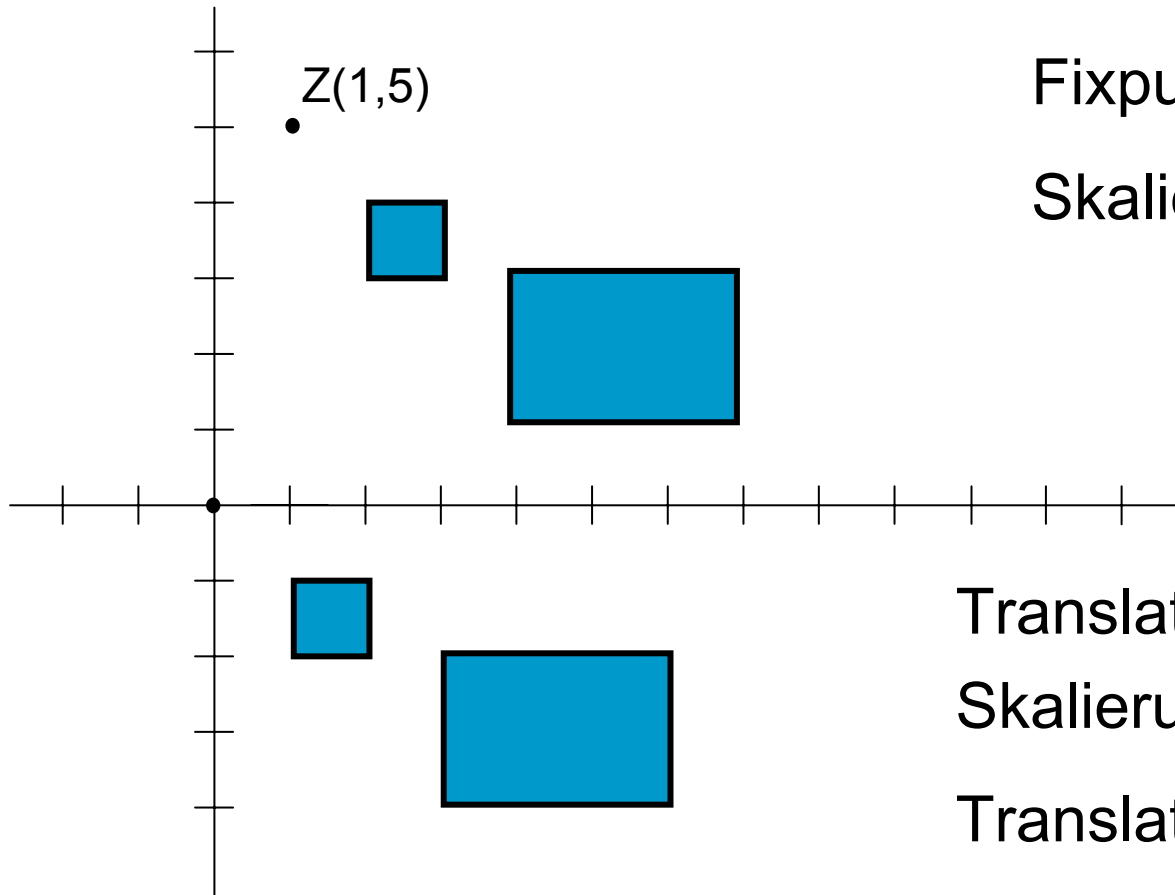
$$x' := x \cdot t_x$$

$$y' := y \cdot t_y$$

$t_x = t_y$  uniforme Skalierung

$t_x \neq t_y$  Verzerrung

# Skalierung bzgl. Fixpunkt



Fixpunkt  $Z_x=1, Z_y=5$

Skalierung  $s_x=3, s_y=2$

Translation um  $(-Z_x, -Z_y)$

Skalierung mit  $(s_x, s_y)$

Translation um  $(Z_x, Z_y)$

# Skalierungsformel

$$x' = (x - Z_x) \cdot s_x + Z_x$$

$$y' = (y - Z_y) \cdot s_y + Z_y$$

$$d_x = Z_x \cdot (1 - s_x)$$

$$d_y = Z_y \cdot (1 - s_y)$$

$$x' = x \cdot s_x + d_x$$

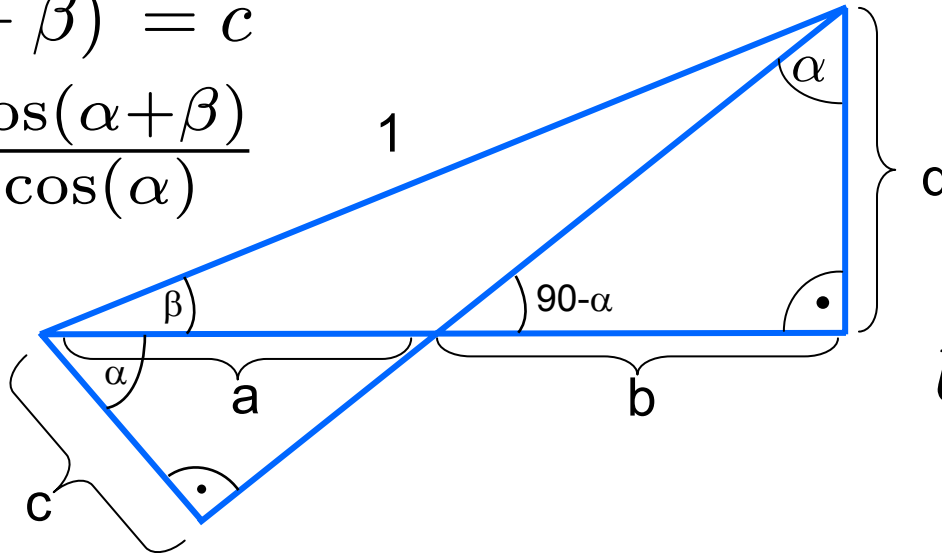
$$y' = y \cdot s_y + d_y$$

# Additionstheorem

$$\cos(\alpha) = c/a$$

$$\cos(\alpha + \beta) = c$$

$$a = \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha)}$$



$$\sin(\beta) = d$$

$$\tan(\alpha) = b/d$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

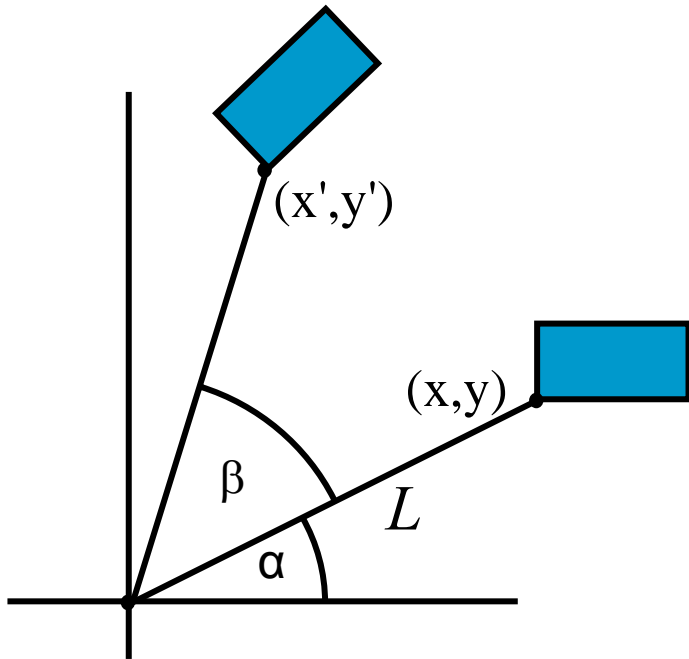
$$b = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \cdot \sin(\beta)$$

$$a + b = \cos(\beta) = \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha)} + \sin(\beta) \cdot \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

$$\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) = \cos(\alpha + \beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

# Drehung



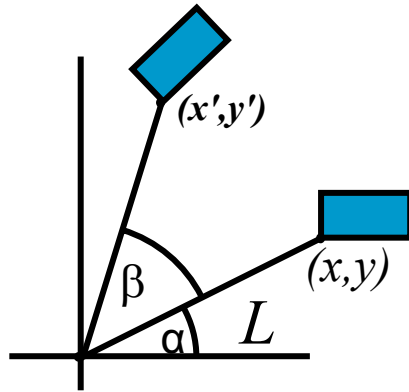
$$\cos(\alpha) = x/L$$

$$\sin(\alpha) = y/L$$

$$\cos(\alpha + \beta) = x'/L$$

$$\sin(\alpha + \beta) = y'/L$$

# Formel für Drehung



$$\sin(\alpha) = y/L \quad \cos(\alpha) = x/L$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos(\beta) \cdot \sin(\alpha) + \sin(\beta) \cdot \cos(\alpha)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\beta) \cdot \cos(\alpha) - \sin(\beta) \cdot \sin(\alpha)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = x'/L = \cos(\beta) \cdot \cos(\alpha) - \sin(\beta) \cdot \sin(\alpha)$$

$$x' = L \cdot \cos(\beta) \cdot x/L - \sin(\beta) \cdot y/L \cdot L$$

$$x' = x \cdot \cos(\beta) - y \cdot \sin(\beta)$$

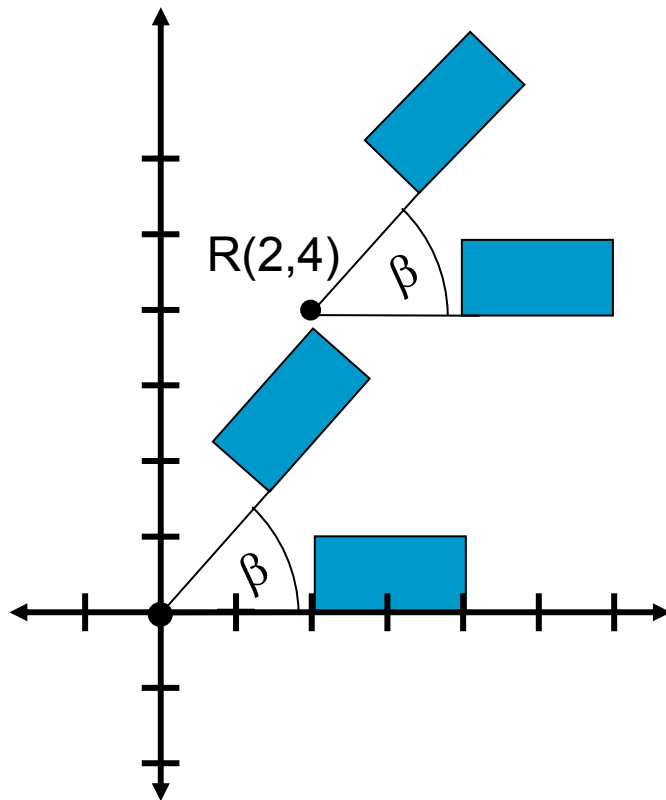
$$\sin(\alpha + \beta) = y'/L = \cos(\beta) \cdot \sin(\alpha) + \sin(\beta) \cdot \cos(\alpha)$$

$$y' = L \cdot \cos(\beta) \cdot y/L + L \cdot \sin(\beta) \cdot x/L$$

$$y' = x \cdot \sin(\beta) + y \cdot \cos(\beta)$$



# Rotation bzgl. Rotationszentrum



Translation um  $(-R_x, -R_y)$   
Rotation um  $\beta$  bzgl.  $(0,0)$   
Translation um  $(R_x, R_y)$

# Matrix für Rotation

$$x' := x \cdot \cos(\beta) - y \cdot \sin(\beta)$$

$$y' := x \cdot \sin(\beta) + y \cdot \cos(\beta)$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$(x' \ y') := (x \ y) \cdot \begin{pmatrix} \cos(\beta) & \sin(\beta) \\ -\sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = (B^T \cdot A^T)^T$$

# Matrix für Skalierung

$$x' := x \cdot s_x$$

$$y' := y \cdot s_y$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

# Matrix für Translation

$$x' := x + t_x$$

$$y' := y + t_y$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

# Homogene Koordinaten

- Punkt  $P(x,y)$  hat homogene Koordinaten  $(x \cdot w, y \cdot w, w)^T$  mit  $w \neq 0$
- Zu den homogenen Koordinaten  $(x,y,w)^T$  mit  $w \neq 0$  gehört der Punkt  $P(x/w, y/w)$
- Der Richtungsvektor  $(x,y)^T$  hat die homogenen Koordinaten  $(x,y,0)^T$
- Zum Punkt  $P(3,4)$  in  $\mathbb{R}^2$  gehört die Ursprungsgerade  $(3 \cdot w, 4 \cdot w, w)$  in  $\mathbb{R}^3$

# Matrix für Translation

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

# Beispiel für Translation

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 21 \\ 24 \\ 3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 18 \\ 3 \end{pmatrix}$$

# Matrix für Skalierung

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

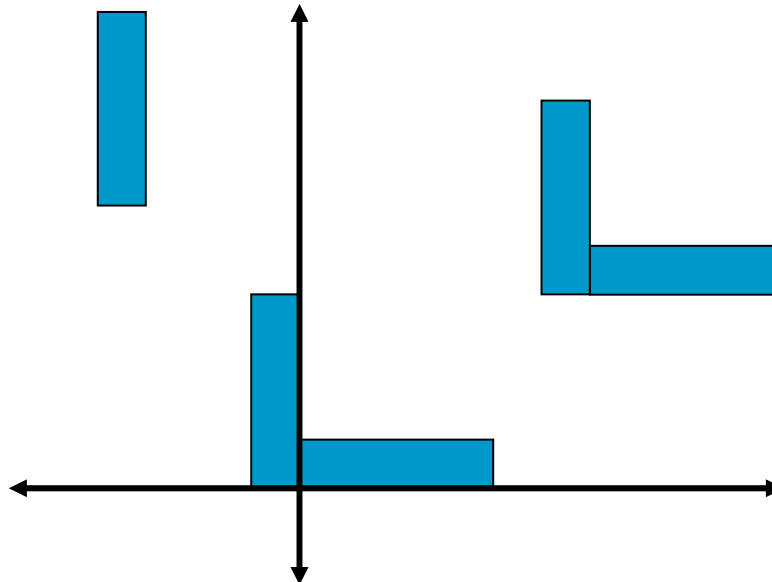


# Matrix für Rotation

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) & 0 \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

# Verknüpfung von Transformationen

- assoziativ:  $A \cdot B \cdot C = (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
- nicht kommutativ:  $A \cdot B \neq B \cdot A$
- Drehung um  $90^\circ$  + Verschieben um  $(4,3) \neq$   
Verschieben um  $(4,3)$  + Drehung um  $90^\circ$



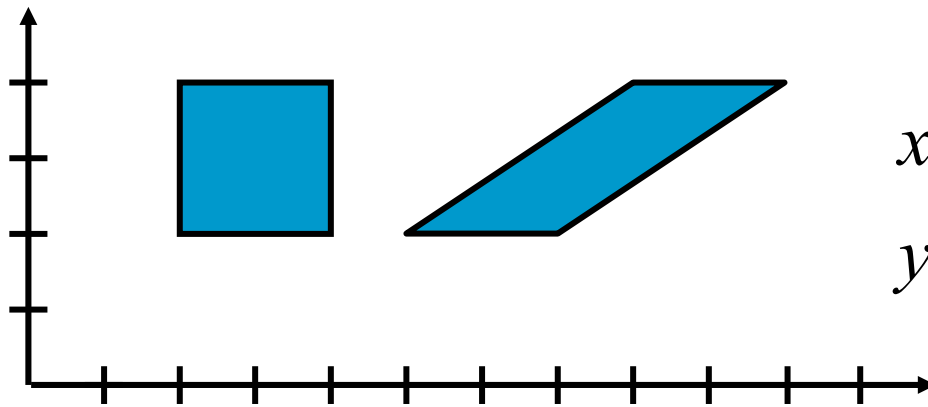
Rotation bzgl (3,5) um  $60^\circ$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0.5000000 & -0.8660254 & 0.0000000 \\ 0.8660254 & 0.5000000 & 0.0000000 \\ 0.0000000 & 0.0000000 & 1.0000000 \end{pmatrix}$$

$$D = C \cdot B \cdot A = \begin{pmatrix} 0.5000000 & -0.8660254 & 2.8301270 \\ 0.8660254 & 0.5000000 & -0.0980762 \\ 0.0000000 & 0.0000000 & 1.0000000 \end{pmatrix}$$

# Matrix für Scherung in x-Richtung

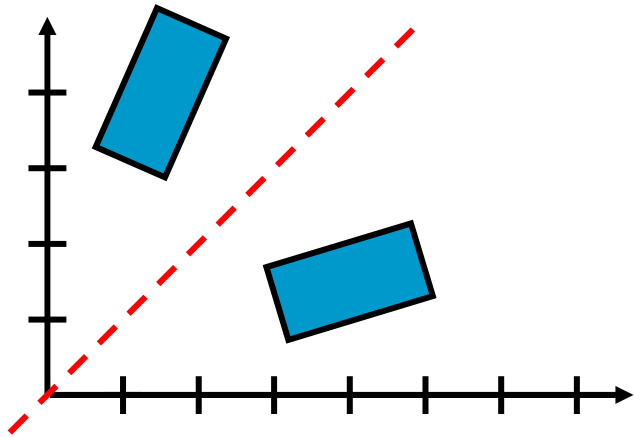


$$x' := x + Sch_x \cdot y$$

$$y' := y$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 & Sch_x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

# Matrix für Spiegelung

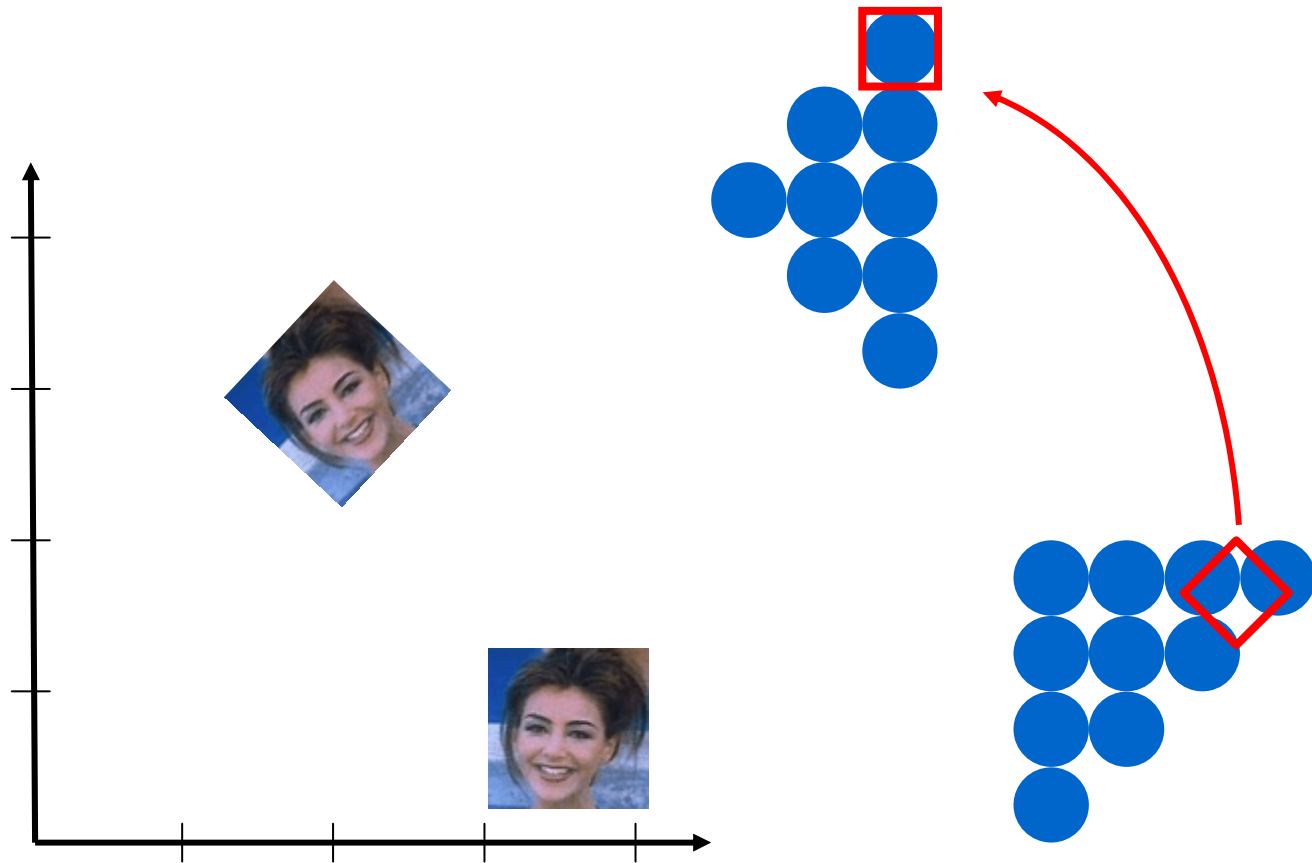


$$x' := y$$

$$y' := x$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

# Pixel-Transformation



# Transformations-Implementation

Java-Applet:

[~cg/2006/skript/Applets/2D-trafo/App.html](#)