

# Kapitel 16: 3D-Repräsentation

# Repräsentation + Darstellung

- Repräsentation:  
Datenstruktur zur Beschreibung der Szene
- Lichtquellen
- Darstellung:  
das daraus berechnete 2D-Pixelbild

# Repräsentationshierarchie

- Elementarobjekt  
(Kugel, Würfel, Kegel, Pyramide,...)
- Drahtmodell  
(Punkte, Kanten)
- Flächenmodell  
(Punkte, Kanten, Flächen, Normalen)
- Constructive Solid Geometry  
(Körpergeometrie)

# Darstellungshierarchie

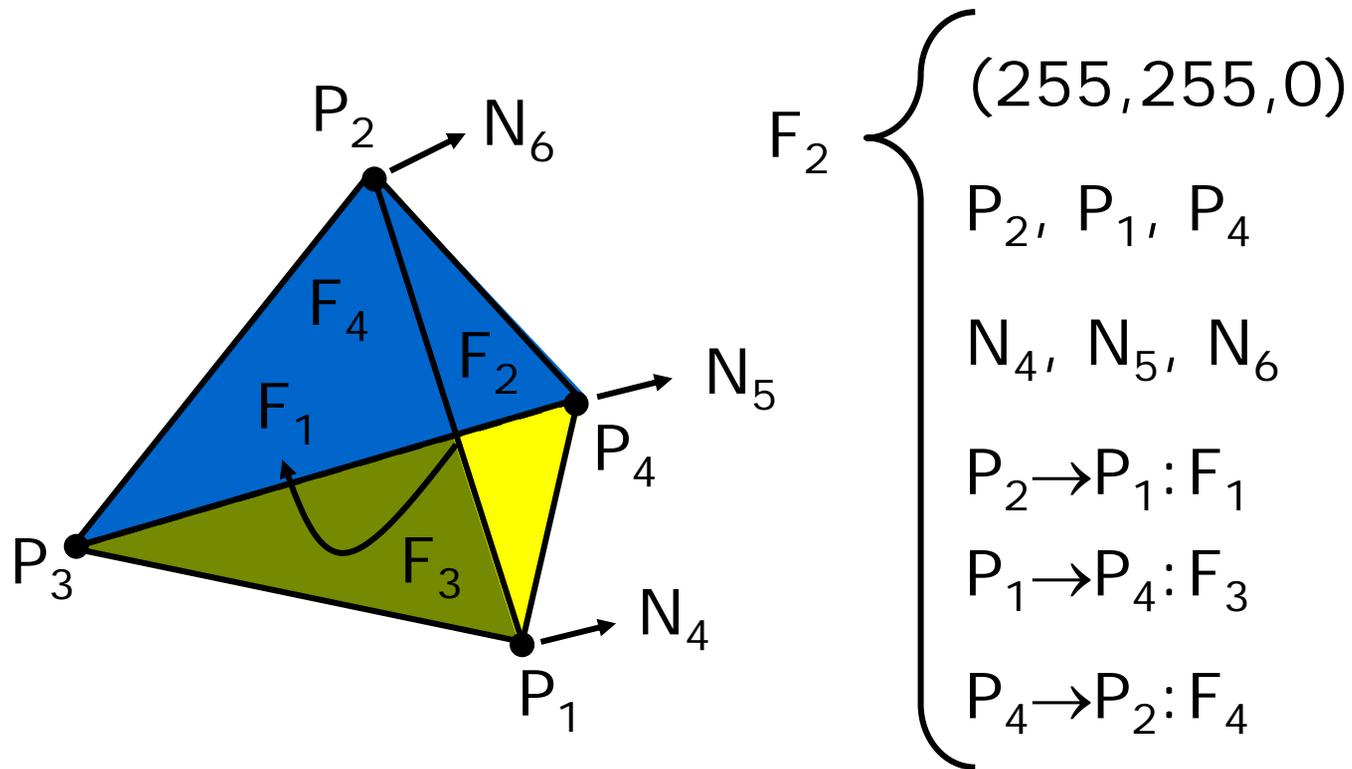
- Punktmodell
- Drahtmodell
- Drahtmodell, verdeckte Kanten entfernt
- Flächenmodell, ohne abgewandte Flächen
- Flächenmodell, verdeckte Flächen entfernt
- Flächenmodell mit Beleuchtung
- Flächenmodell mit Beleuchtung + Schatten
- Flächenmodell mit Spiegelung + Brechung
- Volumenmodell

# Datenstruktur für Polyeder

- Punkte
- Kanten
- Flächen
- Normale
- Farbe
- Materialeigenschaften
- Textur
- Bump Map

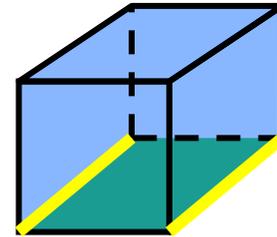
# Beispiel: Tetraeder

Farbe, Punkte, Kanten, Flächen, Normalen

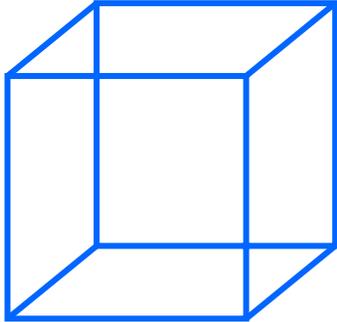


# Drahtgitterdarstellung

```
für jede Fläche F tue {  
  für jede Kante E von F tue {  
    falls !bearbeitet(E) {  
      falls sichtbar(F)  
        zeichne E solide;  
      falls !sichtbar(F) {  
        falls sichtbar(Nachbarfläche(F))  
          zeichne E solide;  
        falls !sichtbar(Nachbarfläche(F))  
          zeichne E gestrichelt;  
      }  
    }  
    markiere E als bearbeitet;  
  }  
}
```



# Würfel



Kantenlänge 1  
Schwerpunkt im  
Ursprung

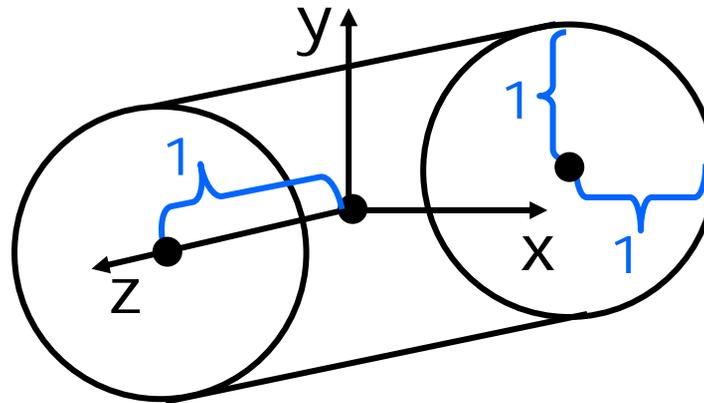
(+0.5, +0.5, +0.5, 1.0)  
(+0.5, -0.5, +0.5, 1.0)  
(-0.5, +0.5, +0.5, 1.0)  
(-0.5, -0.5, +0.5, 1.0)  
(+0.5, +0.5, -0.5, 1.0)  
(+0.5, -0.5, -0.5, 1.0)  
(-0.5, +0.5, -0.5, 1.0)  
(-0.5, -0.5, -0.5, 1.0)

# Zylinder

Schwerpunkt im Ursprung

Zwei Deckflächen mit Radius 1

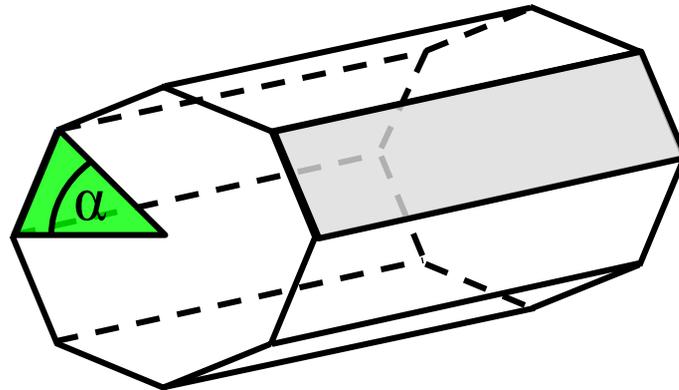
Eine Mantelfläche der Länge 2



# Approximation eines Zylinders

$$\alpha = 2 \cdot \pi / n$$

$$\varphi = i \cdot \alpha, i = 0, \dots, n-1$$



Eckpunkte:

$$[\cos(\varphi), \sin(\varphi), +1, 1]$$

$$[\cos(\varphi + \alpha), \sin(\varphi + \alpha), +1, 1]$$

$$[\cos(\varphi + \alpha), \sin(\varphi + \alpha), -1, 1]$$

$$[\cos(\varphi), \sin(\varphi), -1, 1]$$

Normalen:

$$[\cos(\varphi), \sin(\varphi), 0, 0]$$

$$[\cos(\varphi + \alpha), \sin(\varphi + \alpha), 0, 0]$$

$$[\cos(\varphi + \alpha), \sin(\varphi + \alpha), 0, 0]$$

$$[\cos(\varphi), \sin(\varphi), 0, 0]$$

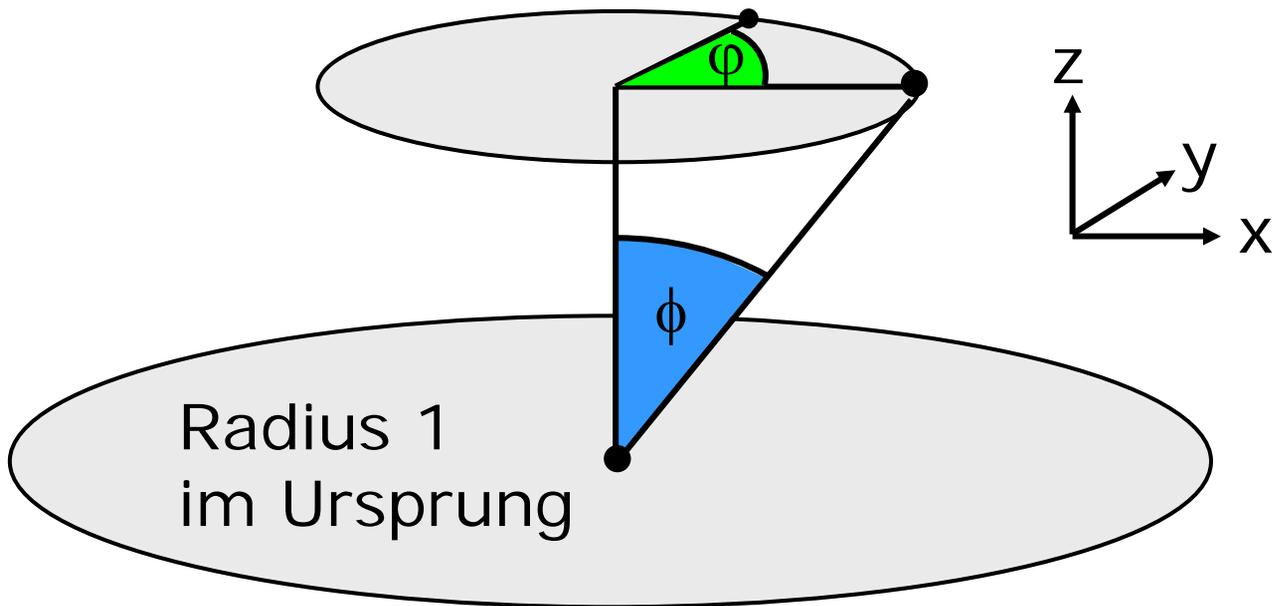
# Kugel

$$(\sin(\varphi) \cdot \cos(\phi), \sin(\varphi) \cdot \sin(\phi), \cos(\varphi), 1)$$

$$0 \leq \varphi < 2 \cdot \pi$$

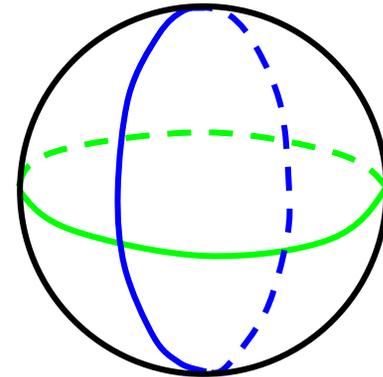


$$0 \leq \phi < \pi$$



# Approximation einer Kugel

- wähle  $n$  gerade
- bilde  $n/2$  Längenkreise  
(alle gleich groß)
- bilde  $n/2 - 1$  Breitenkreise  
(verschieden groß)



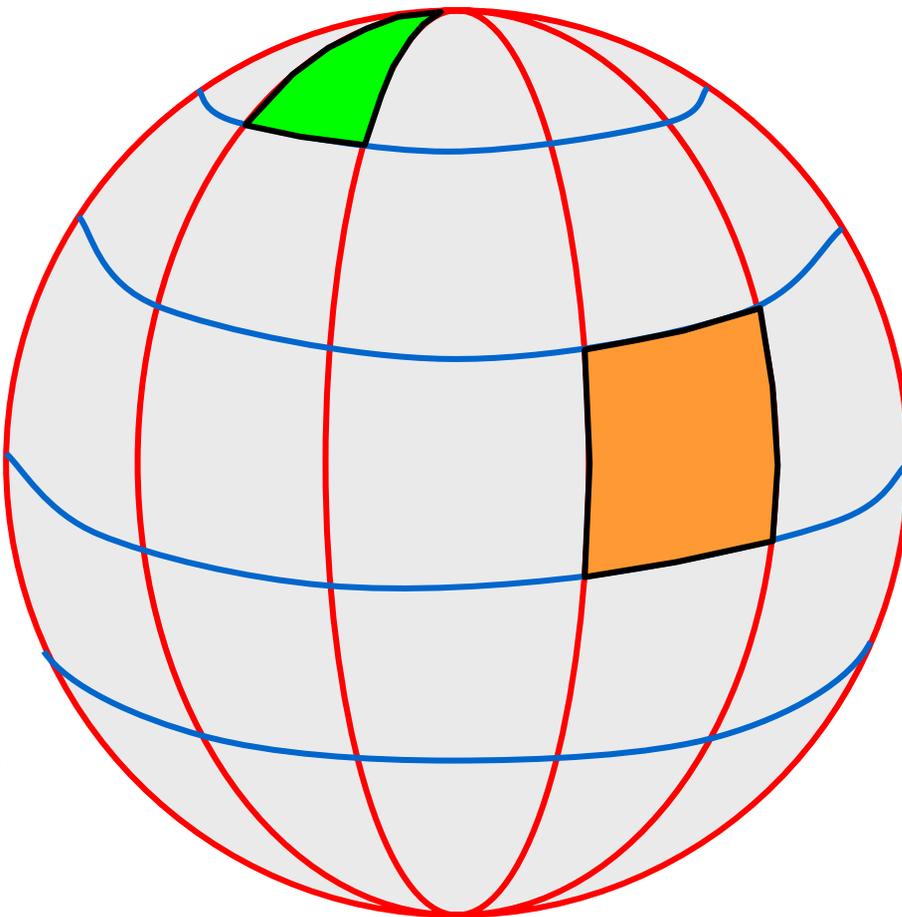
# Kugel für $n=10$

$n/2 = 5$   
Längenkreise

$n/2 - 1 = 4$   
Breitenkreise

$2n = 20$   
Dreiecke

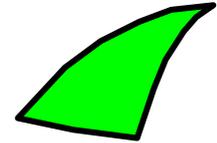
$n \cdot (n/2 - 2) = 30$   
Rechtecke



# Dreiecke von Kugel

$$\alpha = (2\pi)/n, \quad n \in \mathbb{N} \text{ gerade}$$

$$\phi = k \cdot \alpha, \quad k \in \{0, \dots, n - 1\}$$



$$(0, 0, +1, 1),$$

$$(\sin(\alpha) \cos(\phi), \sin(\alpha) \sin(\phi), \cos(\alpha), 1),$$

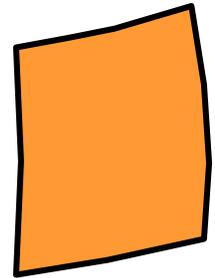
$$(\sin(\alpha) \cos(\phi + \alpha), \sin(\alpha) \sin(\phi + \alpha), \cos(\alpha), 1)$$

# Rechtecke von Kugel

$$\alpha = (2\pi)/n, \quad n \in \mathbb{N} \text{ gerade}$$

$$\phi = k \cdot \alpha, \quad k \in \mathbb{N}, k < n$$

$$\theta = l \cdot \alpha, \quad l \in \mathbb{N}, 0 < l < (n/2 - 1)$$



$$(\sin(\theta) \cos(\phi), \sin(\theta) \sin(\phi), \cos(\theta), 1)$$

$$(\sin(\theta) \cos(\phi + \alpha), \sin(\theta) \sin(\phi + \alpha), \cos(\theta), 1)$$

$$(\sin(\theta + \alpha) \cos(\phi + \alpha), \sin(\theta + \alpha) \sin(\phi + \alpha), \cos(\theta + \alpha), 1)$$

$$(\sin(\theta + \alpha) \cos(\phi), \sin(\theta + \alpha) \sin(\phi), \cos(\theta + \alpha), 1)$$

# Normalen von Kugel

$$\alpha = (2\pi)/n, \quad n \in \mathbb{N} \text{ gerade}$$

$$\phi = k \cdot \alpha, \quad k \in \mathbb{N}, k < n$$

$$\theta = l \cdot \alpha, \quad l \in \mathbb{N}, 0 < l < (n/2 - 1)$$

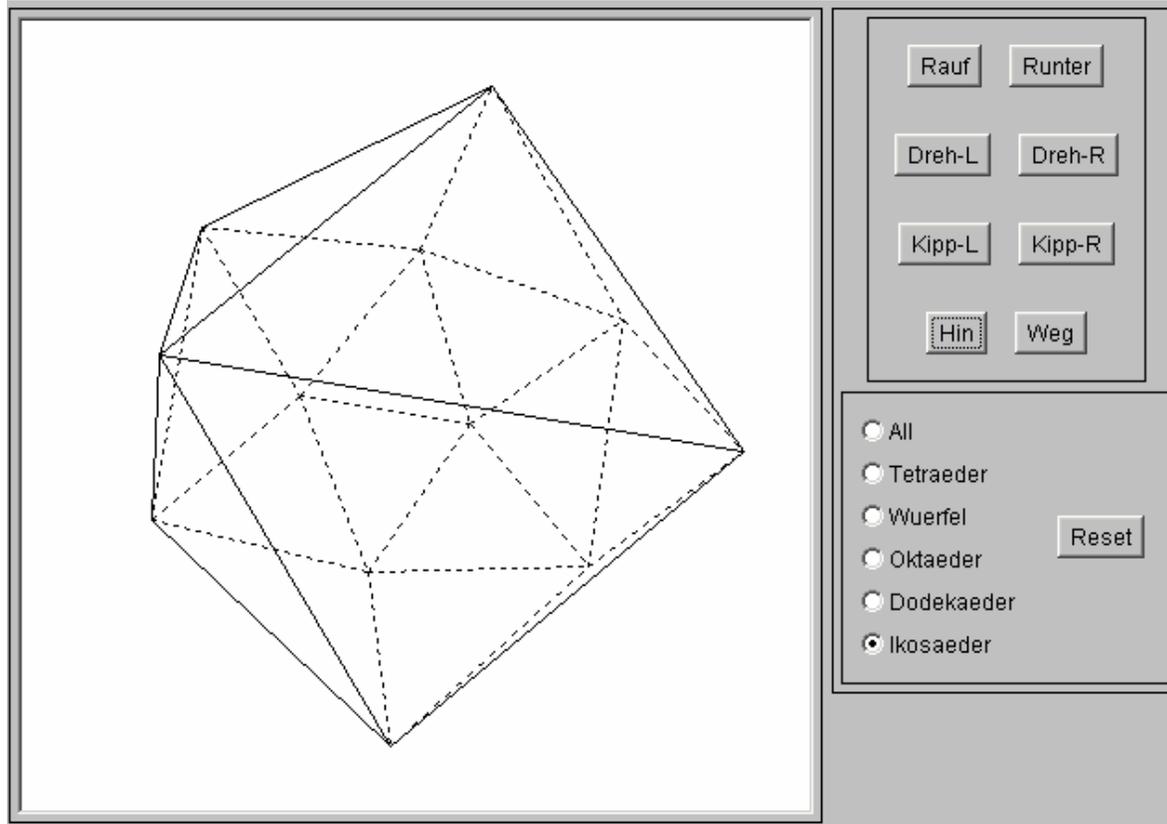
$$(\sin(\theta) \cos(\phi), \sin(\theta) \sin(\phi), \cos(\theta), 0)$$

$$(\sin(\theta) \cos(\phi + \alpha), \sin(\theta) \sin(\phi + \alpha), \cos(\theta), 0)$$

$$(\sin(\theta + \alpha) \cos(\phi + \alpha), \sin(\theta + \alpha) \sin(\phi + \alpha), \cos(\theta + \alpha), 0)$$

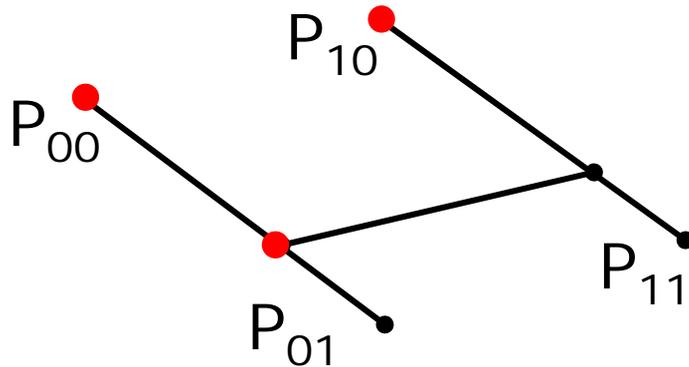
$$(\sin(\theta + \alpha) \cos(\phi), \sin(\theta + \alpha) \sin(\phi), \cos(\theta + \alpha), 0)$$

# Java-Applet zur Wireframe-Projektion

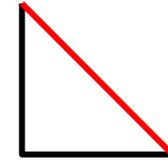


[~cg/2006/skript/Applets/3D-wire/App.html](http://~cg/2006/skript/Applets/3D-wire/App.html)

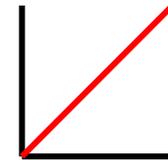
# parametrisierte Fläche



$$f_0(t) = 1 - t$$



$$f_1(t) = t$$



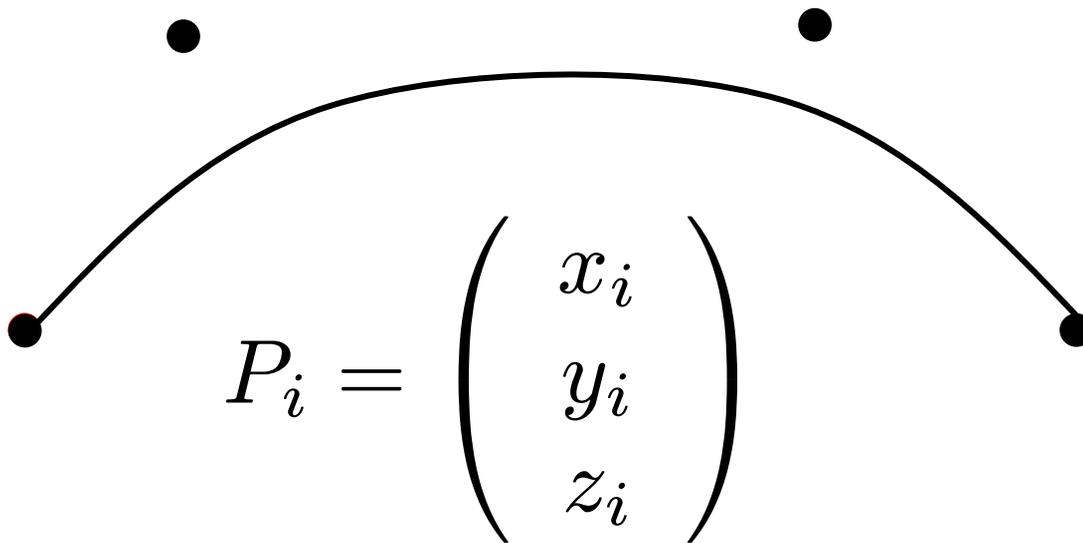
$$(1-u) \cdot [(1-v) \cdot P_{00} + v \cdot P_{01}] + u \cdot [(1-v) \cdot P_{10} + v \cdot P_{11}]$$

$$f_0(u) f_0(v) P_{00} + f_0(u) f_1(v) P_{01} \\ + f_1(u) f_0(v) P_{10} + f_1(u) f_1(v) P_{11}$$

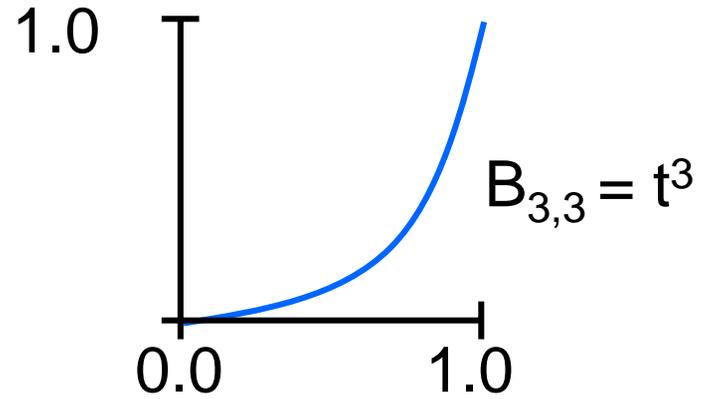
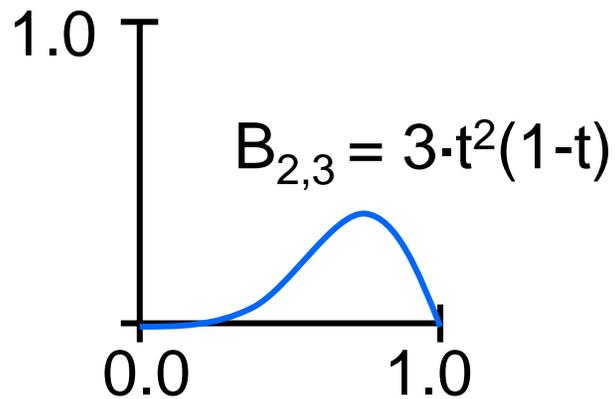
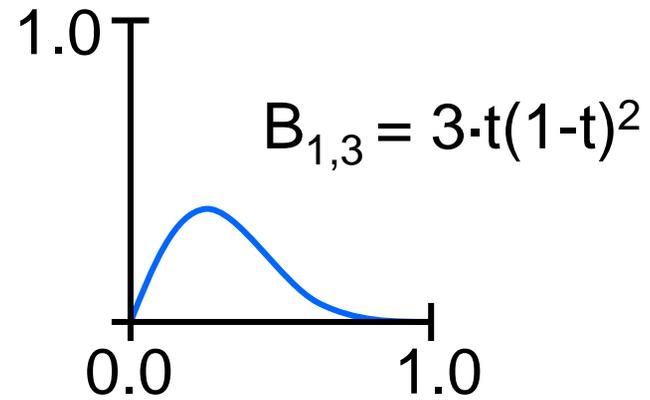
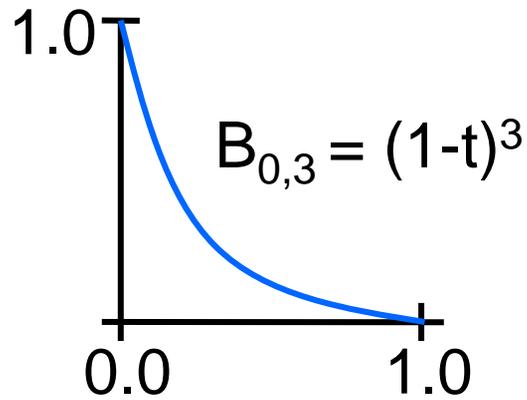
$$P(u, v) = \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 f_i(u) \cdot f_j(v) \cdot P_{i,j}$$

# Bezier-Kurve

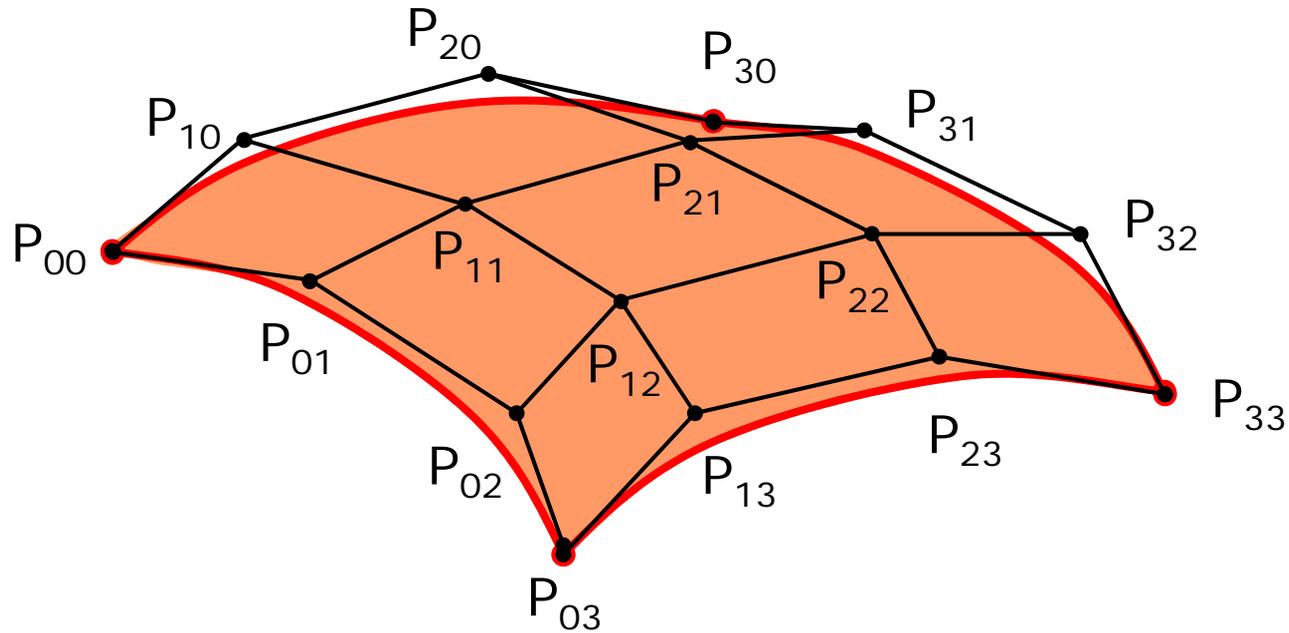
$$P(t) = \sum_{i=0}^3 B_{i,3}(t) \cdot P_i$$



# kubische Bernstein-Polynome



# Gekrümmte Fläche

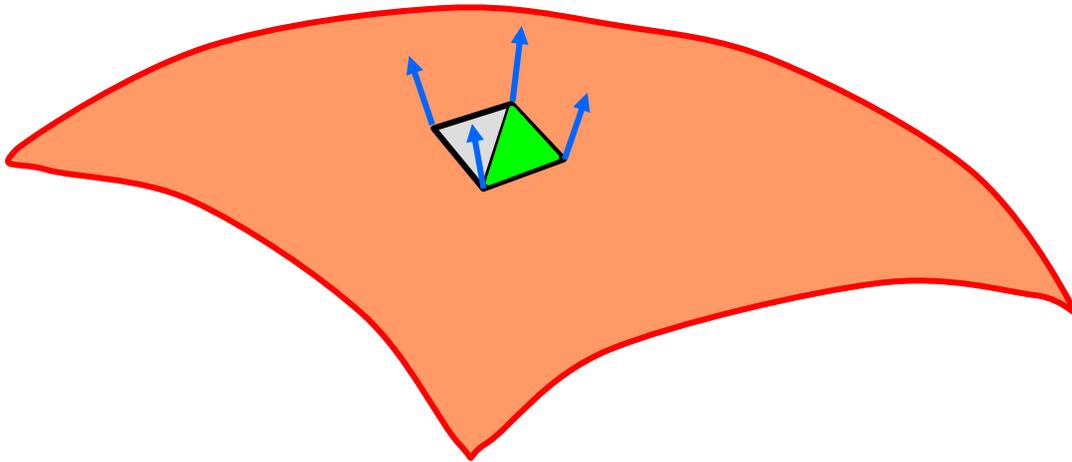


$$P(u, v) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 \cdot B_{i,3}(u) \cdot B_{j,3}(v) \cdot P_{i,j}$$

# Drahtgitterdarstellung

```
for (u=0.0; u<=1.0; u=u+0.1){
  for (v=0.0; v<=1.0; v=v+0.1){
    p = new Punkt();
    for (i=0; i<=3; i++){
      for (j=0; j<=3; j++){
        p = add(p, Bi,3(u) • Bj,3(v) • Pi,j);
      }
    }
    // Punkt p verarbeiten
  }
}
```

# Flächendarstellung



Zerlege Rechteck in 2 Dreiecke  
berechne Normalenvektoren  
färbe Dreiecke ein

# Normalen berechnen

- im Approximationspunkt  
Bezierkurve ableiten nach  $u$

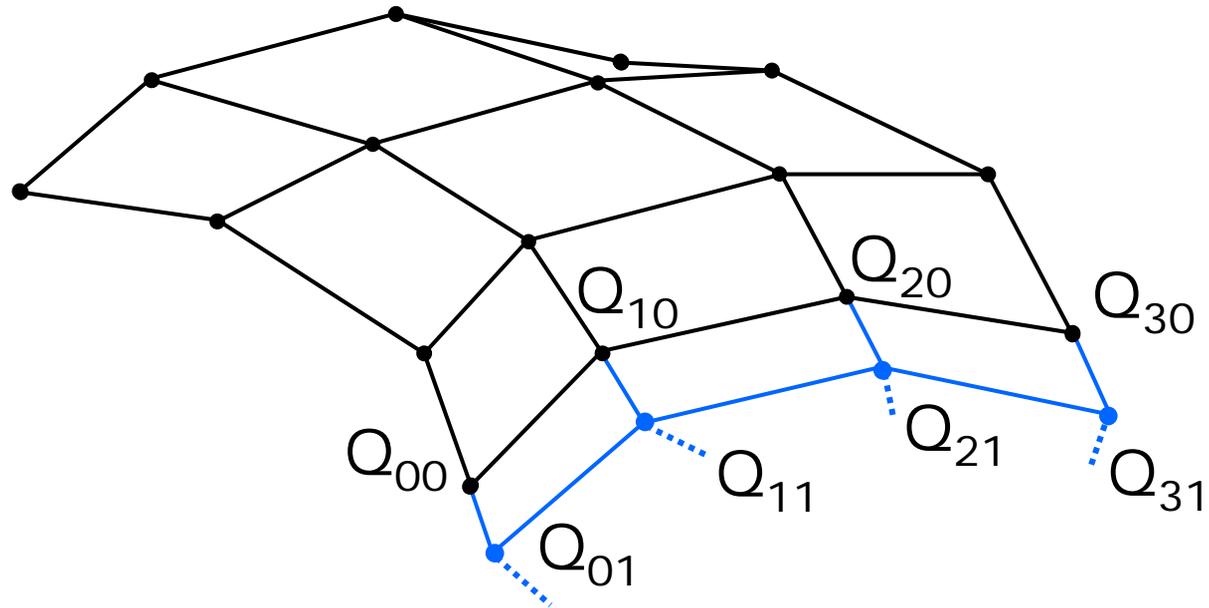
$$\frac{\partial P(u, v)}{\partial u} = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 B'_{i,3}(u) \cdot B_{j,3}(v) \cdot P_{i,j}$$

- im Approximationspunkt  
Bezierkurve ableiten nach  $v$

$$\frac{\partial P(u, v)}{\partial v} = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 B_{i,3}(u) \cdot B'_{j,3}(v) \cdot P_{i,j}$$

- Kreuzprodukt der Tangenten berechnen

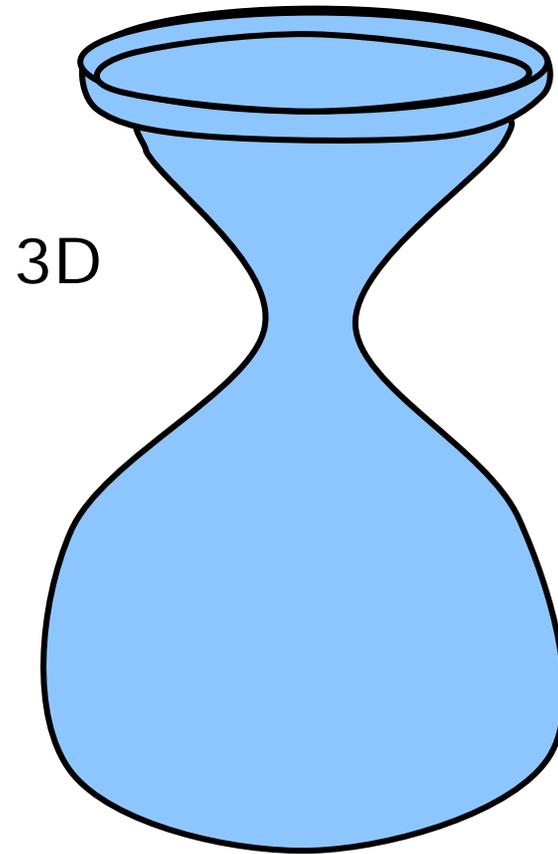
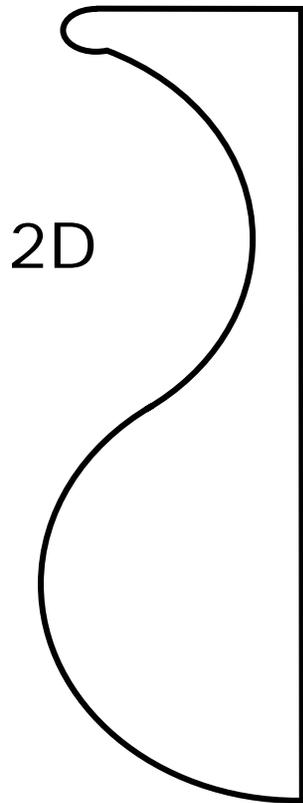
# Bezier-Flächen anstückeln



Anschlusspunkte  $P_{i2}, P_{i3} = Q_{i0}, Q_{i1}$  collinear

Verhältnis der Abstände  $\frac{|P_{i3} - P_{i2}|}{|Q_{i1} - Q_{i0}|}$  konstant

# Rotationskörper

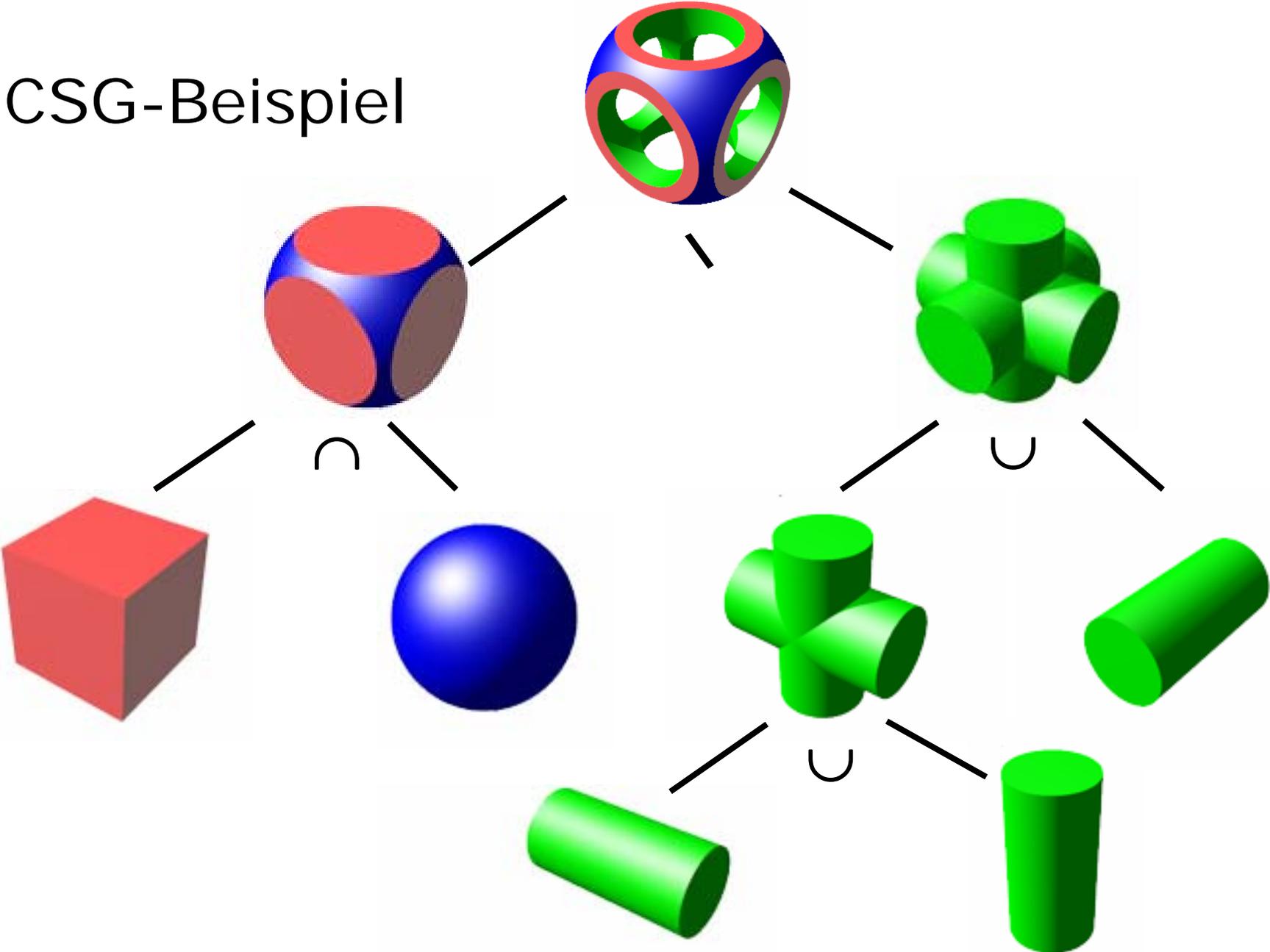


# CSG

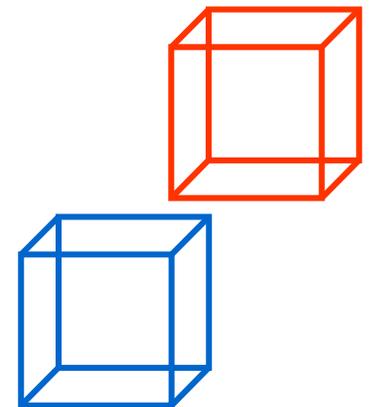
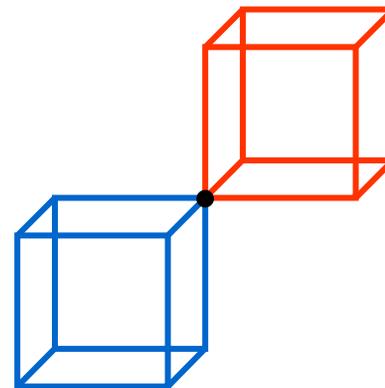
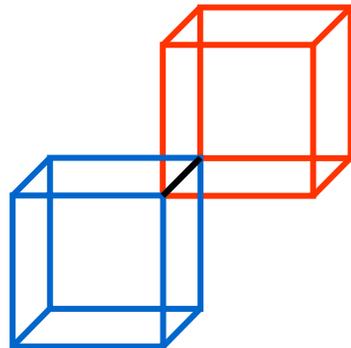
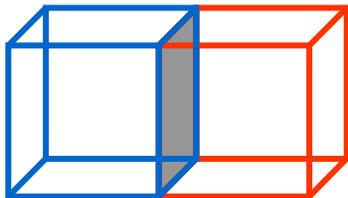
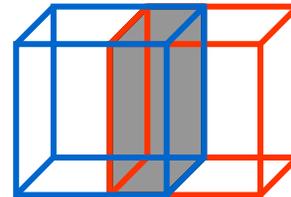
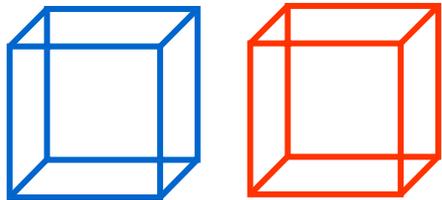
## Constructive Solid Geometry

- Objekte sollen physikalisch realisierbar sein
- Objekte haben Volumen, Gewicht
- Objekte lassen sich maschinell herstellen

# CSG-Beispiel



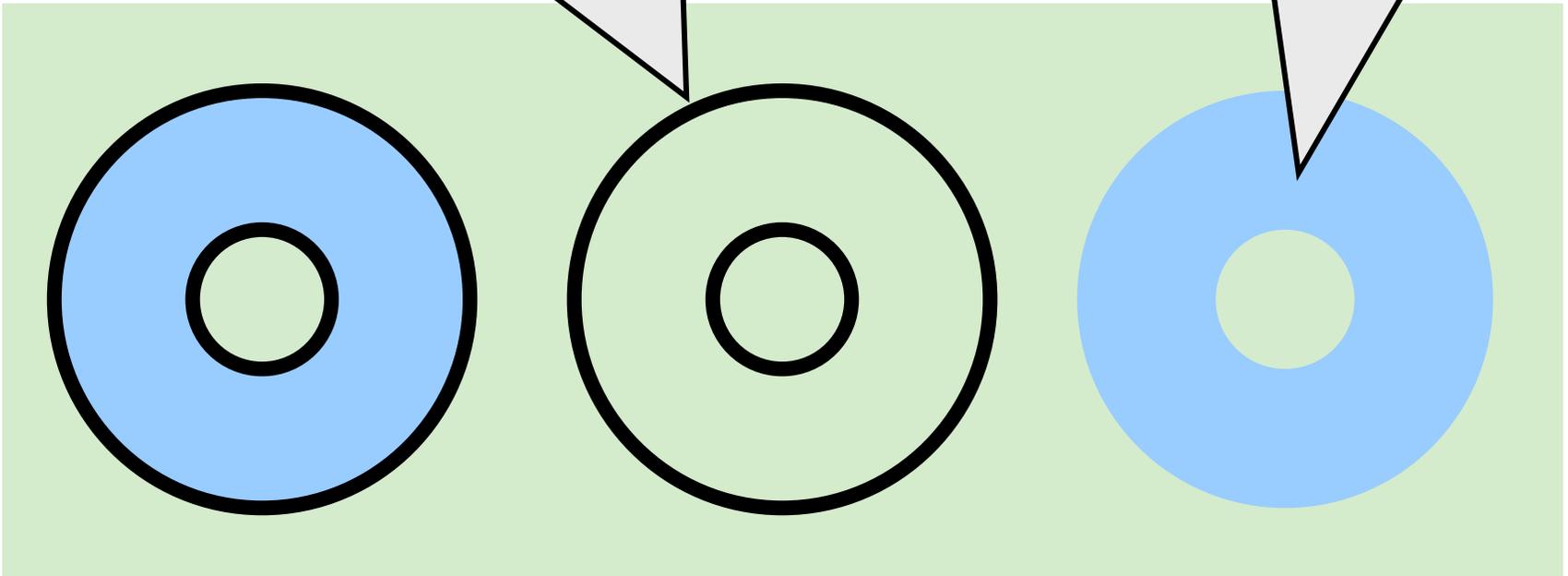
# Schnittmengen



# Innen und außen

Abstand = 0 vom Objekt und vom Komplement des Objekts

Komplement von Boundary bzgl. des Objekts



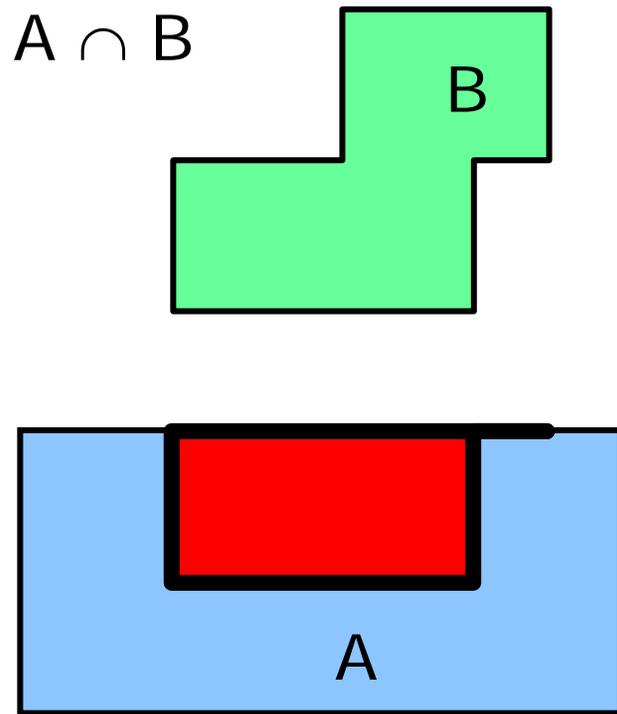
Objekt

Boundary

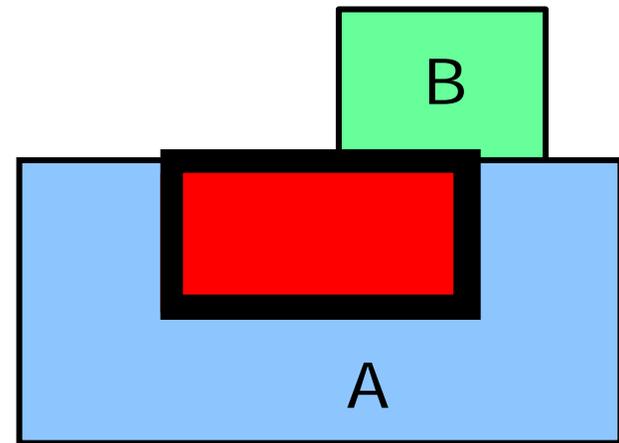
Interior

# Regularisierte Verknüpfung

$$A \cap^* B = \text{closure}(\text{interior}(A \cap B))$$

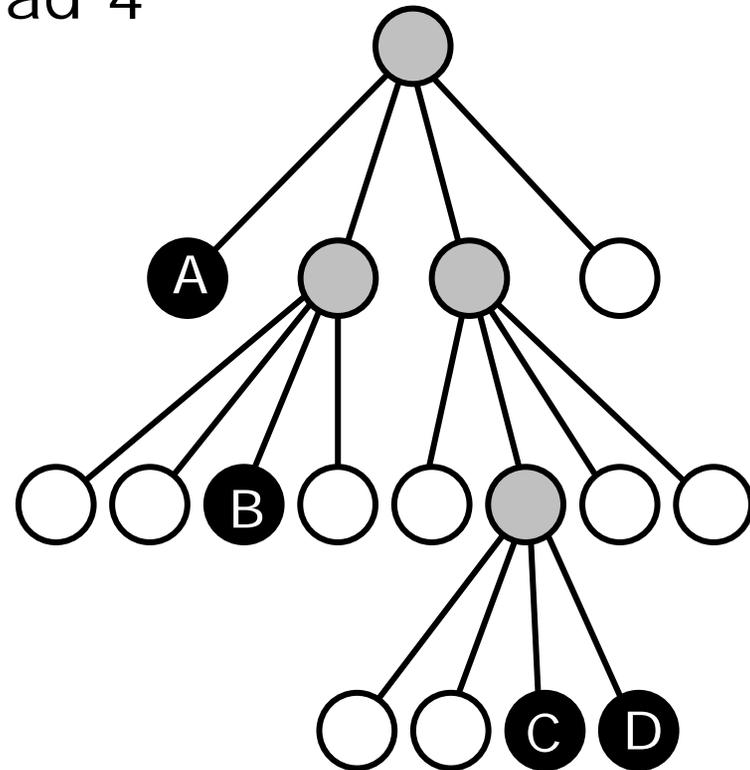
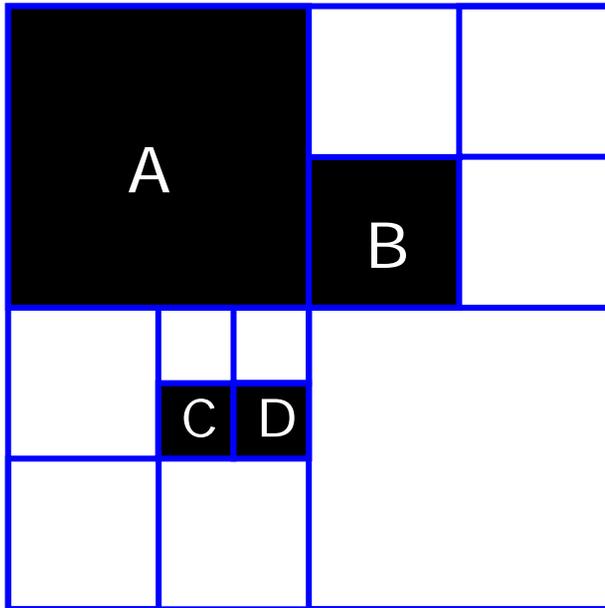


$A_i \cap B_i$	$A_b \cap B_i$
$A_i \cap B_b$	$A_b \cap B_b$ same



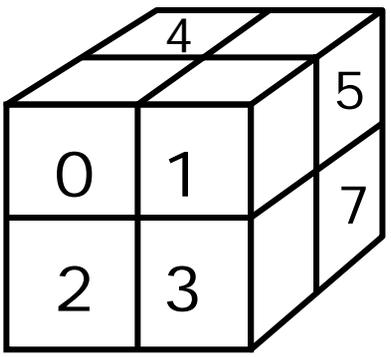
# Quadtree

strukturiere 2D-Fläche  
durch Baum vom Grad 4

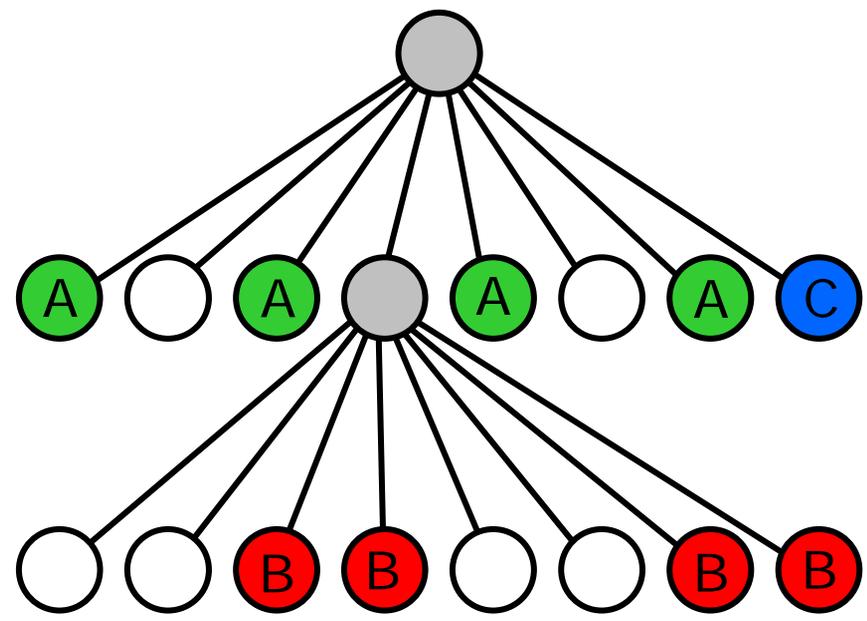
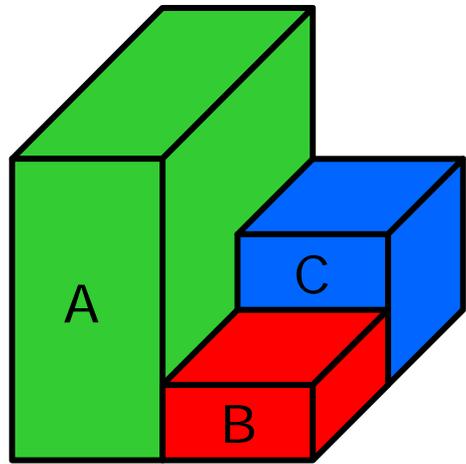


Effientes  $\cup \cap \setminus$  durch Traversieren

# Octree



strukturiere 3D-Raum durch Baum vom Grad 8



Effientes  $\cup \cap \setminus$  durch Traversieren