Kapitel 13

3D-Transformationen

Wie im zweidimensionalen Fall, werden die Definitionspunkte der Objekte als Spaltenvektoren mit homogener Koordinate geschrieben. Die notwendigen Transformationen werden wieder durch Matrizen realisiert. Im dreidimensionalen Fall handelt es sich um 4×4-Matrizen.

13.1 Translation

Mit homogenen Koordinaten läßt sich der um den Translationsvektor $\vec{t} = (t_x \; t_y \; t_z)^T$ verschobene Punkt $P = (x,y,z)$

$$(x',y',z') := (x+t_x, y+t_y, z+t_z)$$

in der folgenden Form darstellen:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = T(t_x,t_y,t_z) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit

$$T(t_x,t_y,t_z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

13.2 Skalierung

Gegeben: Drei Skalierungsfaktoren $s_x \neq 0$, $s_y \neq 0$ und $s_z \neq 0$.

Es liege der Fixpunkt im Ursprung:

$$(x',y',z') := (x \cdot s_x, y \cdot s_y, z \cdot s_z)$$

Die daraus resultierende Transformationsmatrix lautet:

$$S(s_x, s_y, s_z) = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es liege der Fixpunkt bei (Z_x, Z_y, Z_z):

1. Translation um $(-Z_x, -Z_y, -Z_z)$,
2. Skalierung um (s_x, s_y, s_z),
3. Translation um (Z_x, Z_y, Z_z).

Die Transformationsmatrix lautet:

$$T(Z_x, Z_y, Z_z) \cdot S(s_x, s_y, s_z) \cdot T(-Z_x, -Z_y, -Z_z)$$

13.3 Rotation

Rotation um die *z*-Achse

$$\begin{aligned} x' &:= x \cdot \cos(\delta) - y \cdot \sin(\delta) \\ y' &:= x \cdot \sin(\delta) + y \cdot \cos(\delta) \\ z' &:= z \end{aligned}$$

Die daraus resultierende Transformationsmatrix lautet:

$$R_z(\delta) = \begin{pmatrix} \cos(\delta) & -\sin(\delta) & 0 & 0 \\ \sin(\delta) & \cos(\delta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotation um die *x*-Achse

$$\begin{aligned} x' &:= x \\ y' &:= y \cdot \cos(\delta) - z \cdot \sin(\delta) \\ z' &:= y \cdot \sin(\delta) + z \cdot \cos(\delta) \end{aligned}$$

Die daraus resultierende Transformationsmatrix lautet:

$$R_x(\delta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\delta) & -\sin(\delta) & 0 \\ 0 & \sin(\delta) & \cos(\delta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotation um die y-Achse

$$\begin{aligned} x' &:= z \cdot \sin(\delta) + x \cdot \cos(\delta) \\ y' &:= y \\ z' &:= z \cdot \cos(\delta) - x \cdot \sin(\delta) \end{aligned}$$

Die daraus resultierende Transformationsmatrix lautet:

$$R_y(\delta) = \begin{pmatrix} \cos(\delta) & 0 & \sin(\delta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\delta) & 0 & \cos(\delta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotation um eine beliebige Achse

Voraussetzung: Die Rotationsachse stimme nicht mit einer der Koordinatenachsen überein.

Idee: Transformiere Rotationsachse und Objekt so, daß die Rotationsachse mit der z-Achse übereinstimmt, rotiere um vorgegebenen Winkel δ, transformiere zurück.

1. Translation von Rotationsachse (und Objekt), so daß die Rotationsachse durch den Ursprung läuft.
2. Rotation der Rotationsachse um die x-Achse in die xz-Ebene.
3. Rotation der Rotationsachse um die y-Achse in die z-Achse.
4. Rotation des Objekts um die z-Achse mit Winkel δ.
5. Rücktransformation des gedrehten Objekts durch Anwendung der inversen Transformationen der Schritte (3), (2) und (1).

Ist die Rotationsachse durch die Punkte P_1, P_2 gegeben, so gilt

$$\vec{v} = P_2 - P_1 = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}.$$

Die Länge dieses Vektors lautet

$$|\vec{v}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Die Komponenten des zugehörigen Einheitsvektors

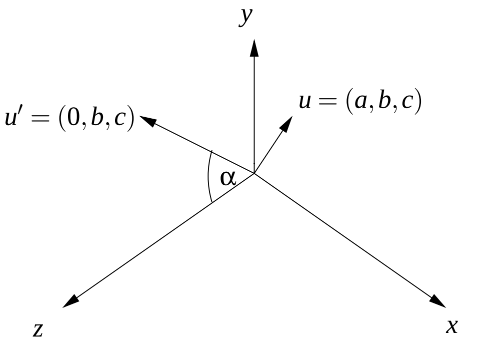
$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, |\vec{u}| = 1$$

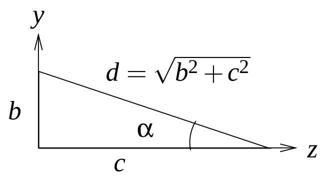
lauten daher

$$a = \frac{x_2 - x_1}{|\vec{v}|},\ b = \frac{y_2 - y_1}{|\vec{v}|},\ c = \frac{z_2 - z_1}{|\vec{v}|}.$$

Schritt 1 läßt sich durch die Translation $T(-x_1, -y_1, -z_1)$ durchführen. Dadurch wird P_1, Ausgangspunkt des Einheitsvektors $\vec{u}$, in den Ursprung verschoben.

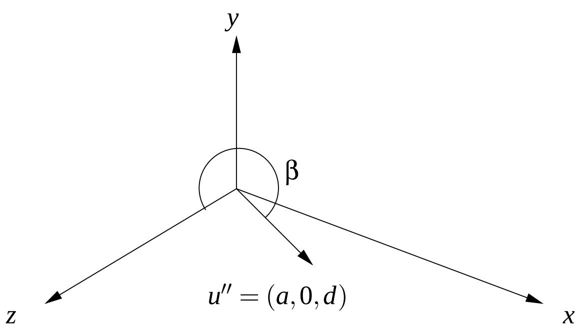
Für Schritt 2 sind Sinus und Cosinus des Rotationswinkels α erforderlich, der zwischen der Projektion $\vec{u}'$ von $\vec{u}$ auf die yz-Fläche und der z-Achse, repräsentiert durch den Vektor $\vec{u_z} = (0\ 0\ 1)^T$, liegt.



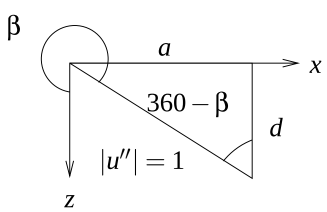


$\Rightarrow \cos(\alpha) = \frac{c}{d}$
$\Rightarrow \sin(\alpha) = \frac{b}{d}$

Nach Schritt 2 befindet sich der ursprüngliche Vektor $\vec{u}$ als $\vec{u}''$ in der xz-Ebene:



Für Schritt 3 (Rotation um y-Achse) benötigt man Sinus und Cosinus des Rotationswinkels β. Positive Winkel ergeben eine Rotation gegen den Uhrzeigersinn, wenn man aus Richtung der Positiven y-Achse auf die xz-Ebene schaut:



$\Rightarrow \cos(\beta) = \cos(360° - \beta) = d$
$\Rightarrow \sin(\beta) = -\sin(360° - \beta) = -a$

Nach den ersten drei Schritten ist die Drehachse mit der z-Achse identisch, so daß Schritt (4) mit der Rotationsmatrix $R_z(\delta)$ durchgeführt werden kann. Schritt (5) beinhaltet die Anwendung der inversen Transformationen.

Die Rotation um die Achse $\vec{v} = \overline{P_1P_2}$ um den Winkel δ läßt sich daher wie folgt darstellen:

$$R(\vec{v},\delta) = T(P_1)R_x^{-1}(\alpha) \cdot R_y^{-1}(\beta) \cdot R_z(\delta) \cdot R_y(\beta) \cdot R_x(\alpha) \cdot T(-P_1) \cdot$$

13.4 Wechsel eines Koordinatensystems

Wenn wir ein Koordinatensystem wählen, um die Punkte des $\mathbb{R}^3$ zu beschreiben, dann wählen wir damit auch eine Basis, die den Vektorraum aufspannt. Die Basisvektoren sind die Einheitsvektoren in Richtung der Koordinatenachsen. Zwei verschiedene Koordinatensysteme haben zwei verschiedene Basen.

Die Transformation von einem Koordinatensystem in ein anderes bedeutet also einen Basiswechsel. Gegeben sei ein Koordinatensystem A (z.B. das Kartesische Koordinatensystem) mit zugehöriger Basis $\mathcal{A}$. Z.B. die kanonische Basis (in Matrixschreibweise mit Spaltenvektoren):

$$\mathcal{A}_{kart} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

In homogenen Koordinaten werden als vierter Spaltenvektor die Koordinaten des Ursprungs von Koordinatensystem A, beschrieben bzgl. Basis $\mathcal{A}$ (hier also: $(0\ 0\ 0\ 1)^T$), hinzugenommen:

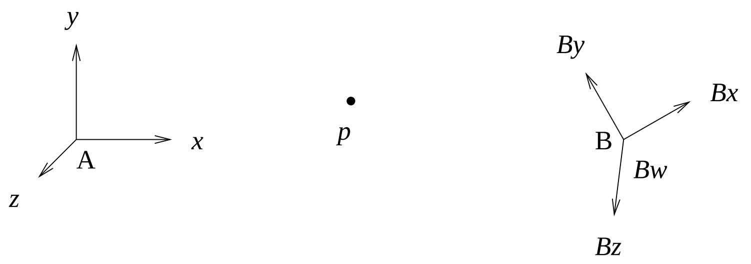
$$\mathcal{A}_{kart} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Weiterhin sei ein zweites - von A verschiedenes - Koordinatensystem B gegeben. Auch dieses Koordinatensystem spezifiziert 4 ausgezeichnete Elemente: Seinen Ursprungspunkt B_w und die drei Einheitsvektoren $\vec{B}_x$, $\vec{B}_y$, $\vec{B}_z$.

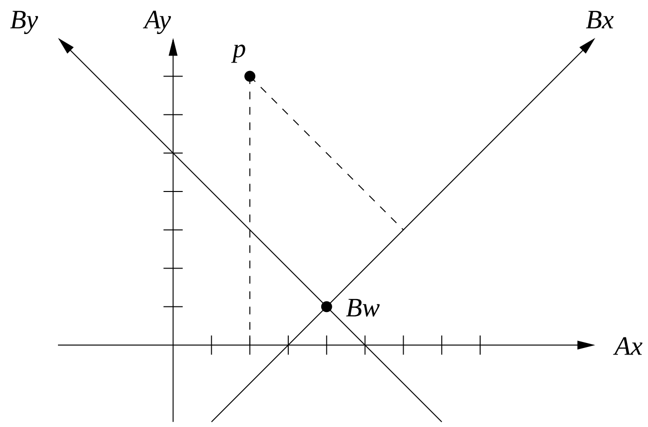
Diese Elemente lassen sich sowohl bzgl. der Basis $\mathcal{A}$ als auch bzgl. der Basis $\mathcal{B}$ darstellen. Um von einer Darstellung in die andere zu kommen, muß die gegebene Darstellung nur mit der im Folgenden beschriebenen Matrix multipliziert werden.

Wenn man die homogenen Koordinatenvektoren in Spaltenschreibweise nebeneinander anordnet ergeben sie die Matrix $M_{\mathcal{B}\to\mathcal{A}}$, die den Übergang von Basis $\mathcal{B}$ zur Basis $\mathcal{A}$ beschreibt:

$$M_{\mathcal{B}\to\mathcal{A}} = \left(\vec{B}_x\ \vec{B}_y\ \vec{B}_z\ B_w\right)$$



Beispiel (für den 2-dimensionalen Fall):



x-Achse:	$\vec{B}_x$	lautet	$(\sqrt{\frac{1}{2}}\ \sqrt{\frac{1}{2}}\ 0)^T$
y-Achse:	$\vec{B}_y$	lautet	$(-\sqrt{\frac{1}{2}}\ \sqrt{\frac{1}{2}}\ 0)^T$
Ursprung:	B_w	lautet	$(4,1,1)$
Punkt:	$P_{\mathcal{B}}$	lautet	$(2\cdot\sqrt{2}, 4\cdot\sqrt{2}, 1)$

Der Aufbau der Matrix $M_{\mathcal{B}\to\mathcal{A}}$ repräsentiert die erforderliche Drehung und Verschiebung, um einen aus der Sicht von Koordinatensystem B (also bzgl. Basis $\mathcal{B}$ beschriebenen Punkt P aus der Sicht von Koordinatensystem A (also bzgl. $\mathcal{A}$) zu beschreiben. Im zwei-dimensionalen Fall wird zunächst der Punkt P um den Winkel α gedreht, der sich zwischen den Achsen der Koordinatensysteme A und B befindet. Dann wird eine Translation durchgeführt mit dem Wert der Ursprungsposition von B. Cosinus und Sinus des Drehwinkels α ergeben sich gerade aus den Werten a bzw. b, wobei die Einheitsvektoren $(a\ b)^T$ und $(-b\ a)^T$ die Basis für Koordinatensystem B darstellen.

Also läßt sich in obigem Beispiel der Punkt p wie folgt transformieren:

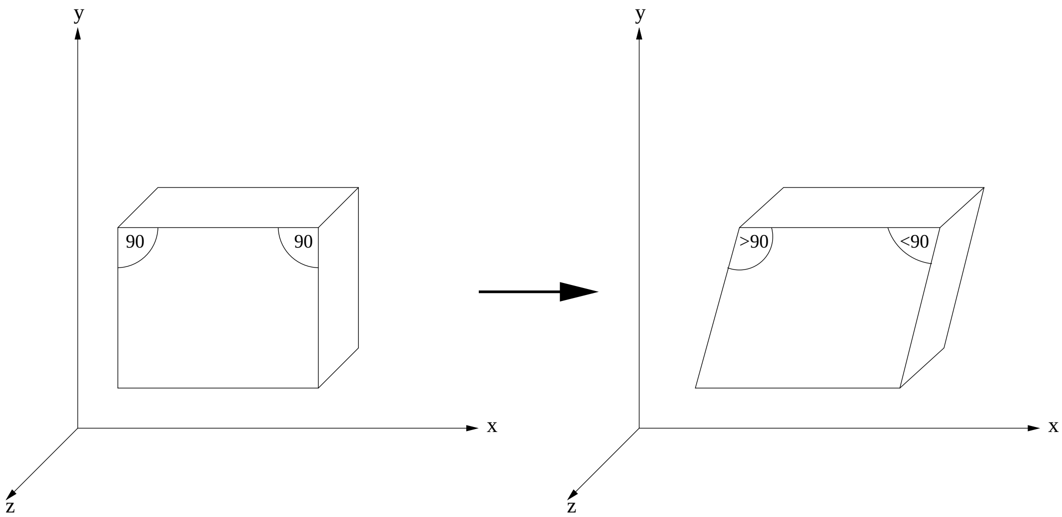
$$\begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{2}} & -\sqrt{\frac{1}{2}} & 4 \\ \sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{2}} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2\cdot\sqrt{2} \\ 4\cdot\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Um einen Punkt $P_{\mathcal{A}}$ im Koordinatensystem A bzgl. des Koordinatensystems B zu spezifizieren, verwendet man die inverse Matrix zu $M_{\mathcal{B}\to\mathcal{A}}$:

$$\begin{aligned} & M_{\mathcal{B}\to\mathcal{A}} \cdot \vec{p}_{\mathcal{B}} = \vec{p}_{\mathcal{A}} \\ \Leftrightarrow \quad & \vec{p}_{\mathcal{B}} = M^{-1}_{\mathcal{B}\to\mathcal{A}} \cdot \vec{p}_{\mathcal{A}} \end{aligned}$$

13.5 Transformation der Normalenvektoren

Die Normalenvektoren müssen bei der Transformation von Objektpunkten ebenfalls abgebildet werden. Wenn diese Transformation z.B. eine nicht-uniforme Skalierung ist, dann bleiben die Winkel zwischen einzelnen Flächen nicht erhalten.



Winkeluntreue unter nicht uniformer Skalierung

Wenn die Normale $\vec{n}$ mit derselben Matrix M transformiert wird, wie die Objektpunkte einer Fläche F, ist $\vec{n}$ anschließend evtl. nicht mehr senkrecht zu F.

Wie muß $\vec{n}$ transformiert werden?

Seien P_1, P_2 zwei Punkte der Ebene mit Normalenvektor $\vec{n}$. Sei $\vec{r} = P_2 - P_1$.

Offenbar gilt

$$\vec{n}^T \cdot \vec{r} = 0$$

Daraus folgt

$$\Rightarrow \vec{n}^T \cdot M^{-1} M \cdot \vec{r} = 0$$

Durch zweimaliges Transponieren erhält man

$$((M^{-1})^T \cdot \vec{n})^T \vec{r'} = 0$$

Für den transformierten Vektor $\vec{n'}$ muss offenbar gelten

$$\vec{n'}^T \cdot \vec{r'} = 0$$

Aus den beiden Gleichungen folgt daher

$$(M^{-1})^T \cdot \vec{n} = \vec{n'}$$

Also muss bei einer Fläche der Normalenvektor $\vec{n}$ mit der transponierten Inversen der Transformationsmatrix M transformiert werden.