Institut für Informatik
Henning Wenke, M.Sc.
Nico Marniok, B.Sc.
Sascha Kolodzey, B.Sc.

Universität Osnabrück, 24.04.2012
`http://www-lehre.inf.uos.de/~cg`
Testat bis 02.05.2012, 15:00 Uhr

Übungen zu Computergrafik

Sommersemester 2012

Blatt 1

Übungsbetrieb

In der Vorlesung am Dienstag wird ein Aufgabenblatt verteilt, das bis einschließlich Mittwoch (letztes Testat um 15:00 Uhr) der darauffolgenden Woche zu bearbeiten ist. Die Aufgabenblätter finden sich auch auf der Veranstaltungswebseite (`http://www-lehre.inf.uos.de/cg`) sowie in Stud.IP.

Die Übungen finden Donnerstags von 14:15 - 15:45 Uhr und Freitags von 12:15 - 13:45 Uhr in Raum 31/449a statt. In den Übungen wird das neue Aufgabenblatt durchgesprochen und die Lösung zum alten Aufgabenblatt diskutiert.

Testatbetrieb

Begleitend zur Veranstaltung finden wöchentliche, 30-minütige Testate bei den Tutoren der Veranstaltung statt. Das aktuelle Aufgabenblatt ist bis zum Testattermin zu bearbeiten und dem jeweiligen Tutor zum entsprechenden Termin in Raum 31/369 vorzulegen sowie in das unten genannte Web-System hochzuladen.

Achten Sie bei der Bearbeitung der Aufgaben darauf, diese *vor* dem Testat einmal auf dem Zielrechner getestet zu haben und außerdem natürlich auf sinnvolle **Kommentierung**.

Die Testate erfolgen in Zweierteams.

Mailingliste

Jeder Teilnehmer der Veranstaltung sollte sich in die entsprechende Mailingliste unter `http://list.serv.uni-osnabrueck.de/mailman/listinfo/cg12` eintragen, da hier Änderungen im Vorlesungs- oder Übungsbetrieb, sowie eventuelle Fehlerkorrekturen der Aufgabenblätter mitgeteilt werden. Zudem soll sie als Hilfestellung dienen, damit Probleme untereinander diskutiert werden können.

Scheinvergabe

Um die Zulassung zur Klausur zu erhalten, müssen alle bis auf eins der ausgegebenen Übungsblätter erfolgreich bearbeitet (mindestens 50% der Punkte) und dem Tutor vorgeführt werden. Zum Abschluss der Veranstaltung entscheidet eine Klausur über die Scheinvergabe.

b.w.⇒

Aufgabe 1.1 (30 Punkte)

Sei das Dreieck $D \subset \mathbb{R}^3$ defniert durch die Eckpunkte

$$A\,(1\,,0\,,1)\,,B\,(2\,,1\,,3)\;\text{und}\,C\,(0\,,1\,,2)\,.$$

a. Geben Sie die Ebene E, die das Dreieck enthält mittels Hessescher Normalenform und Parameterdarstellung an.

b. Bestimmen Sie jeweils die Abstände d_1, bzw. d_2 der Punkte $P_1\,(0\,,2\,,1)$, bzw. $P_2\,(-1\,,0\,,0)$ zu der Ebene E. Wählen Sie zur Berechnung eine der in (a) ermittelten Darstellungen und erläutern Sie ihre Wahl.

c. Entscheiden Sie für die drei Punkte $P_3\left(1\,,\frac{1}{2}\,,\frac{7}{4}\right)$, $P_4\left(\frac{11}{4}\,,\frac{3}{4}.3\right)$ und $P_5\left(\frac{2}{3}\,,-\frac{1}{6}\,,3\right)$ jeweils, ob sie sich auf der Ebene E befinden.

Musterlösung vom 02.05.2012:

a. Man berechnet zunächst die (nichtnormalisierte) Normale

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= (\mathbf{B}-\mathbf{A})\times(\mathbf{C}-\mathbf{A}) \\ \mathbf{n} &= (-1,-3,2)^T \end{aligned}$$

und erhält durch Normieren die Normale

$$\begin{aligned} |\mathbf{n}| = \sqrt{(-1)^2+(-3)^2+2^2} &= \sqrt{14} \\ \mathbf{n}_0 = \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} &= \left(\frac{-1}{\sqrt{14}},\frac{-3}{\sqrt{14}},\frac{2}{\sqrt{14}}\right)^T. \end{aligned}$$

Der Abstand d zum Ursprung ist also

$$d = \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}_0 = \frac{1}{\sqrt{14}},$$

Und die HNF somit

$$\mathrm{E}:(x,y,z)^T\cdot\left(\frac{-1}{\sqrt{14}},\frac{-3}{\sqrt{14}},\frac{2}{\sqrt{14}}\right)^T-\frac{1}{\sqrt{14}} = 0$$

Die Parameterdarstellung hat allgemein die Form

$$f\,(s,t) = \mathbf{p}+s\cdot\mathbf{u}+t\cdot\mathbf{v}.$$

Wir wählen $\mathbf{p}=\mathbf{A}$ und die Richtungsvektoren ergeben sich aus

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{B}-\mathbf{A}=(1,1,2)^T \\ \mathbf{v} &= \mathbf{C}-\mathbf{A}=(-1,1,1)^T. \end{aligned}$$

Also lautet die Parameterdarstellung

$$f(s,t) = (1,0,1)^T+s\cdot(1,1,2)^T+t\cdot-(1,1,1)^T.$$

b. Wir wählen die HNF zur Berechnung des Abstandes, da sich dieser durch Einsetzen der Punkte unmittelbar ergibt.

$$\begin{aligned} d_1 &= (0,2,1)\cdot\left(\frac{-1}{\sqrt{14}},\frac{-3}{\sqrt{14}},\frac{2}{\sqrt{14}}\right)^T-\frac{1}{\sqrt{14}}=-\frac{5}{\sqrt{14}}\neq 0 \\ d_2 &= (-1,0,0\cdot)\left(\frac{-1}{\sqrt{14}},\frac{-3}{\sqrt{14}},\frac{2}{\sqrt{14}}\right)^T-\frac{1}{\sqrt{14}}=0 \end{aligned}$$

Der Punkt P_1 liegt also nicht in der Ebene, aber Punkt P_2.

c. Wir setzen wieder in die HNF ein und testen, ob das Ergebnis 0 ist.

$$\begin{aligned} \left(1,\frac{1}{2},\frac{7}{4}\right)\cdot\left(\frac{-1}{\sqrt{14}},\frac{-3}{\sqrt{14}},\frac{2}{\sqrt{14}}\right)^T-\frac{1}{\sqrt{14}} &= 0 \\ \left(\frac{11}{4},\frac{3}{4},3\right)\cdot\left(\frac{-1}{\sqrt{14}},\frac{-3}{\sqrt{14}},\frac{2}{\sqrt{14}}\right)^T-\frac{1}{\sqrt{14}} &= 0 \\ \left(\frac{2}{3},-\frac{1}{6},3\right)\cdot\left(\frac{-1}{\sqrt{14}},\frac{-3}{\sqrt{14}},\frac{2}{\sqrt{14}}\right)^T-\frac{1}{\sqrt{14}} &= \frac{-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+6}{\sqrt{14}}=\frac{\frac{35}{6}}{\sqrt{14}}\neq 0 \end{aligned}$$

Die Punkte P_3 und P_4 befinden sich also auf der Ebene und P_5 nicht.

Aufgabe 1.2 (30 Punkte)

Seien die Punkte $A,B\in\mathbb{R}^2$ durch

$$A\,(1\,,\,3)\ \text{und}\,B\,(2\,,\,-1)$$

gegeben.

a. Geben Sie die Gerade g, die durch A und B geht mittels impliziter Darstellung, Parameterdarstellung und Hessescher Normalenform an und zeichnen Sie sie.

b. Konstruieren Sie eine Gerade h, die die Gerade g im Punkt $S\,(4\,,\,-9)$ in einem Winkel von $\alpha=\frac{\pi}{4}\,(=45^\circ)$ schneidet und erweitern Sie ihre Zeichnung aus (a). Geben Sie die Gerade h mittels der Parameterdarstellung an.

c. Gegeben sei nun zusätzlich der Punkt $C\,(5\,,\,2)$. Entscheiden Sie jeweils rechnerisch für die Punkte $P_1\left(\frac{13}{4}\,,\,\frac{5}{2}\right)$ und $P_2\left(\frac{1}{6}\,,\,\frac{2}{3}\right)$ ob diese sich innerhalb des von A, B und C definierten Dreiecks befinden.

Musterlösung vom 02.05.2012:

a. Für die HNF berechnen wir zunächst den Richtungsvektor $AB=B-A=\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$ der Geraden und erhalten für die nicht normierte Normale $n=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$. Schließlich erhalten wir nach dem

Normieren die gesuchte Normale $n_0 = \frac{n}{|n|} = \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. Für den Abstand d setzen wir den Punkt B in die HNF ein und erhalten $d = B \cdot n_0 = \frac{7}{\sqrt{17}}$. Damit erhalten wir die HNF

$$G_{\text{HNF}} : \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot r - \frac{7}{\sqrt{17}} = 0.$$

Eine implizite Darstellung erhält man durch das Setzen von $r = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, anschließendes Ausmultiplizieren und Multiplikation mit $\sqrt{17}$.

$$G_{\text{Impl}} : 4x + y - 7 = 0$$

Die Parameterdarstellung lautet einfach

$$\begin{aligned} g(t) &= A + t \cdot (B - A) \\ g(t) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

b. Gesucht ist eine Gerade $h(t) = \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \end{pmatrix} + t \cdot w$, die die Gerade $g(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ in einem Winkel von $\alpha = \frac{\pi}{4}$ schneidet. Dies ist genau dann der Fall, wenn der Richtingsvektor w von $h(t)$ mit dem Richtungsvektor $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ einen Winkel von α einschließt. Eine Formel für den Winkel α zwischen zwei Vektoren v und w lautet z.B.

$$\cos\alpha = \frac{v \cdot w}{|v| \cdot |w|}.$$

Wir setzen nun ein und erhalten

$$\begin{aligned} \cos\frac{\pi}{4} &= \frac{\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \end{pmatrix}}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{w_x^2 + w_y^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} &= \frac{-w_x + 4w_y}{\sqrt{17 \cdot (w_x^2 + w_y^2)}} \\ \frac{1}{2} &= \frac{(-w_x + 4w_y)^2}{17 \cdot (w_x^2 + w_y^2)} \\ \frac{17}{2} \cdot (w_x^2 + w_y^2) &= w_x^2 - 8w_x w_y + 16w_y^2 \\ 0 &= \frac{15}{2} w_x^2 + 8w_x w_y - \frac{15}{2} w_y^2 \\ 0 &= w_x^2 + \frac{16}{15} \cdot w_x w_y - w_y^2. \end{aligned}$$

Es sei angemerkt, dass der Vektor w nicht eindeutig definiert ist. Erfüllt nämlich ein Vektor w' die Bedingung, so natürlich auch jeder Vektor $r \cdot w'$ mit $r \neq 0$. Wir setzen also die Koordinate

$w_y = 15$ und erhalten

$$\begin{aligned} 0 &= w_x^2 + 16w_x - 225 \\ w_x^{1,2} &= -8 \pm \sqrt{64+225} \\ &= -8 \pm \sqrt{289} \\ &= -8 \pm 17. \\ \text{also} \quad & w_x^1 = 9 \,\text{und}\, w_x^2 = -25 \end{aligned}$$

Wir erhalten also die beiden Lösungen $w_1 = \begin{pmatrix} 9 \\ 15 \end{pmatrix}$ und $w_2 = \begin{pmatrix} -25 \\ 15 \end{pmatrix}$, die zwei verschiedene Geraden $h_1(t)$ und $h_2(t)$ repräsentieren, die die Gerade $g(t)$ im Winkel von $\alpha = \frac{\pi}{4}$ schneiden. Es ergeben sich also die beiden Lösungen

$$\begin{aligned} h_1(t) &= \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 15 \end{pmatrix} \\ h_2(t) &= \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -25 \\ 15 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Alternative: Da wir hier den Winkel $\alpha = \frac{\pi}{4} \widehat{=} 45^\circ$ gegeben haben, lässt sich die zu konstruierende Gerade h als Winkelhalbierende zwischen dem Richtungsvektor $B-A$ von g und der Normale n von g interpretieren. Diese erhält man durch Addition der beiden Vektoren, also $w = (B-A) + n = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$. **Vorsicht:** Hierzu müssen beide Vektoren die gleiche Länge haben.

c. Um zu bestimmen, ob ein Punkt innerhalb eines Dreiecks ist, hat man mehrere Möglichkeiten. **Möglichkeit 1 (Algorithmus: Punkt in konvexem Polygon).** Wir stellen zunächst die impliziten Darstellungen der drei Geraden auf, die durch die Seiten des Dreiecks definiert werden. Anhand von der Kante AB wird dies explizit durchgeführt. Zunächst berechnen wir den Richtungsvektor $AB = B - A = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$. Wir erhalten die Normale durch Vertauschen der Einträge und Negieren des oberen Eintrages, also $n = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dadurch lautet eine implizite Darstellung

$$G_{AB} : 4x + y + C = 0.$$

Wir berechnen $C = -7$ durch Einsetzen des Punktes $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, erhalten also insgesamt

$$G_{AB} : 4x + y - 7 = 0.$$

Analog berechnen wir

$$\begin{aligned} G_{BC} &: \quad -3x + 3y + 9 = 0 \\ G_{CA} &: \quad -x - 4y + 13 = 0. \end{aligned}$$

Jetzt setzen wir den Punkt P_1 in die drei Gleichungen ein.

$$G_{AB} \quad : \quad 4 \cdot \frac{13}{4} + \frac{5}{2} - 7 > 0$$

$$
\begin{aligned}
G_{BC} &: \quad -3\cdot\frac{13}{4}+3\cdot\frac{5}{2}+9>0\\
G_{CA} &: \quad -\frac{13}{4}-4\cdot\frac{5}{2}+13<0
\end{aligned}
$$

Da wir zwei unterschiedliche Vorzeichen haben, liegt P_1 außerhalb des Dreiecks. Einsetzen von P_2 liefert

$$
\begin{aligned}
G_{AB} &: \quad 4\cdot\frac{1}{6}+\frac{2}{3}-7<0\\
G_{BC} &: \quad -3\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{2}{3}+9>0\\
G_{CA} &: \quad -\frac{1}{6}-4\cdot\frac{2}{3}+13>0.
\end{aligned}
$$

Auch hier erhalten wir zwei unterschiedliche Vorzeichen, womit auch P_2 nicht im Dreieck liegt.
Möglichkeit 2 (Baryzentrische Koordinaten). Wir stellen die Formel für die baryzentrischen Koordinaten mit A als Stützvektor, sowie $B-A$ und $C-A$ als Richtungsvektoren. Damit erhalten wir

$$
g(s,t)=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}.
$$

Wir berechnen für P_1 die Parameter s_1 und t_1, sodass $g(s_1,t_1)=P_1$ mittels einem linearen Gleichungssystems. Wenn die Parameter den Bedingungen

$$
\begin{aligned}
(i) &\quad s_1\in[0,1]\\
(ii) &\quad t_1\in[0,1]\\
(iii) &\quad s_1+t_1\in[0,1]
\end{aligned}
$$

genügen, liegt der Punkt im Dreieck. Wir erhalten also das LGS

$$
\begin{array}{rrrcr}
(i) & 1\cdot s_1 & +4\cdot t_1 & = & \frac{9}{4}\\
(ii) & -4\cdot s_1 & -1\cdot t_1 & = & -\frac{1}{2}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrrcr}
(i) & 1\cdot s_1 & +4\cdot t_1 & = & \frac{9}{4}\\
(ii) & & 15\cdot t_1 & = & \frac{17}{2}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrrcr}
(i) & 1\cdot s_1 & & = & -\frac{1}{60}\\
(ii) & & 1\cdot t_1 & = & \frac{17}{30}.
\end{array}
$$

Da $s_1=-\frac{1}{60}<0$ liegt P_1 nicht in dem Dreieck. Für P_2 erhalten wir das LGS

$$
\begin{array}{rrrcr}
(i) & 1\cdot s_2 & +4\cdot t_2 & = & -\frac{5}{6}\\
(ii) & -4\cdot s_2 & -1\cdot t_2 & = & -\frac{7}{3}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrrcr}
(i) & 1\cdot s_2 & +4\cdot t_2 & = & -\frac{5}{6}\\
(ii) & & 15\cdot t_2 & = & -\frac{17}{3}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrrcr}
(i) & 1\cdot s_2 & & = & \frac{61}{90}\\
(ii) & & 1\cdot t_2 & = & -\frac{17}{45}.
\end{array}
$$

Da $t_2=-\frac{17}{45}<0$ liegt P_2 nicht in dem Dreieck.

Aufgabe 1.3 (20 Punkte)

Gegeben seien die Matrizen

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & -7 & 2 & 3 \\ 7 & 3 & 3 & 1 \\ 9 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4},$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 4} \text{ und}$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 1}$$

Berechnen Sie alle möglichen Produkte der 3 Matrizen. **Hinweis:** Es sind 4 Multiplikationen möglich.
Musterlösung vom 02.05.2012:

$$M_1 \cdot M_1 = \begin{pmatrix} -12 & -3 & 12 & 5 \\ 41 & 52 & -8 & -19 \\ 37 & 1 & 29 & -9 \\ 9 & 25 & 16 & -30 \end{pmatrix}$$

$$M_2 \cdot M_1 = \begin{pmatrix} 22 & -17 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_1 \cdot M_3 = \begin{pmatrix} -7 \\ 20 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$M_3 \cdot M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & -4 & 8 \\ 0 & 3 & -6 & 12 \end{pmatrix}$$

$$M_2 \cdot M_3 = (7)$$

Aufgabe 1.4 (20 Punkte)

Beantworten Sie Ihrem Tutor Fragen zur Vorlesung.