Institut für Informatik
Henning Wenke, M.Sc.
Nico Marniok, B.Sc.
Sascha Kolodzey, B.Sc.

Universität Osnabrück, 30.04.2012
`http://www-lehre.inf.uos.de/~cg`
Testat bis 09.05.2012, 15:00 Uhr

Übungen zu Computergrafik

Sommersemester 2012

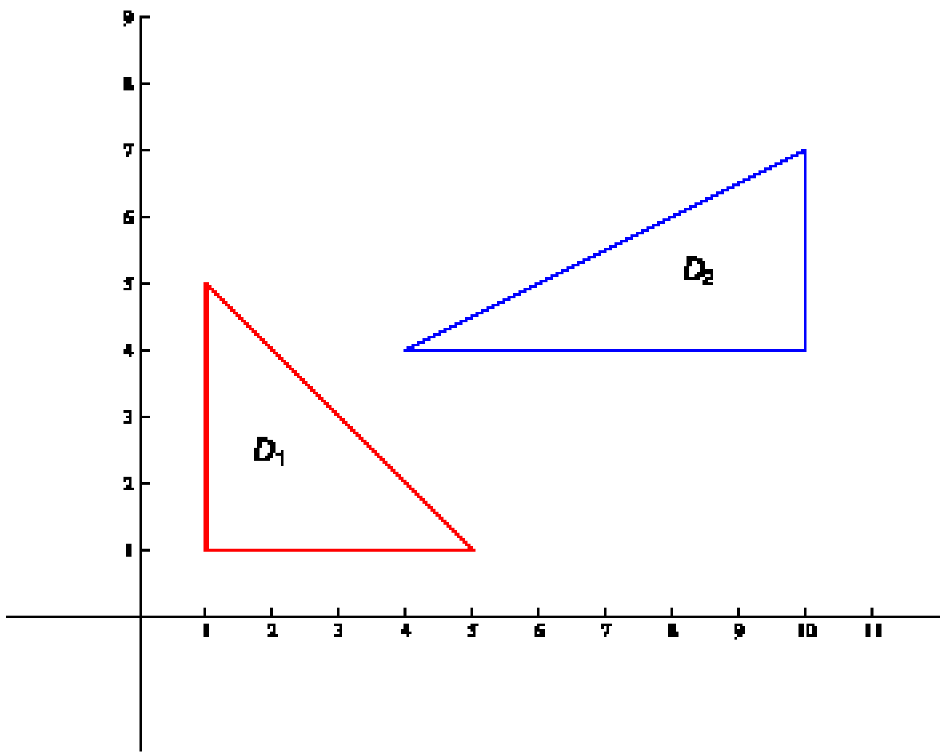
Blatt 2

Aufgabe 2.1 (20 Punkte)

Seien die Dreiecke D_1 durch die Eckpunkte $P_1\,(1,1)$, $P_2\,(5,1)$ und $P_3\,(1,5)$ und D_2 durch die Eckpunkte $P_1'\,(10,4)$, $P_2'\,(10,7)$ und $P_3'\,(4,4)$ gegeben.

1. Zeichnen Sie die Dreiecke D_1 und D_2.
2. Geben Sie Transformationen T, R und S an, sodass $M = T \cdot R \cdot S$ den Punkt P_i in den Punkt P_i' für $i \in \{1,2,3\}$ überführt. Hierbei soll T eine Translation, R eine Rotation und S eine Skalierung sein.
3. Stellen Sie die Matrix M auf und zeigen Sie durch Nachrechnen, dass sie die Voraussetzungen erfüllt.

Musterlösung vom 09.05.2012:

1. 

2. Aus der Zeichnung wird deutlich, dass D_1 um $\frac{\pi}{2}$ gegen den Uhrzeigersinn (CCW) gedreht werden muss. Die vorher durchgeführte Skalierung muss darauf Rücksicht nehmen. Die Ausdehnung von D_1 ist jeweils 4 Einheiten in x- und y-Richtung. Die Ausdehnung von D_2 ist 6 in x- und 3 in y-Richtung. Es ergibt sich die Skalierungsmatrix

$$S = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Rotationsmatrix R hat wegen $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ und $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ die Gestalt

$$R = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & 0 \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mit diesen beiden Transformationen hat das Dreieck die gewünschte Form. Um es an die richtige Stelle zu verschieben, berechnen wir zunächst mit Hilfe von S und R den transformierten Punkt P_1 (für die Matrixmultiplikation wird $z = 1$ ergänzt).

$$R \cdot S \cdot P_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{2} & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix} \mathrel{\hat{=}} \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

Um $R \cdot S \cdot P_1$ in den Punkt P_1' zu verschieben, müssen wir also $P_1' - R \cdot S \cdot P_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{23}{2} \\ \frac{13}{4} \end{pmatrix}$ als Translationsvektor nehmen. Wir erhalten für die Translationsmatrix also

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{23}{2} \\ 0 & 1 & \frac{13}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Die Gesamtmatrix ist

$$M = T \cdot R \cdot S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{23}{2} \\ 0 & 1 & \frac{13}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{2} & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{2} & \frac{23}{2} \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{13}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2.2 (20 Punkte)

Richten Sie in Ihrer bevorzugten Entwicklungsumgebung ein neues Projekt **CG12_Blatt2** ein. Importieren Sie die Dateien aus dem Archiv `/home/cg/2012/Uebung/Blatt2/Aufg/CG12Blatt2.zip` und sorgen Sie dafür, dass das Projekt ordnungsgemäß ausgeführt werden kann. Demonstrieren Sie den ordnungsgemäßen Start Ihrem Tutor. **Hinweis:** Die genaue Vorgehensweise zum Einrichten des Projekts wird Ihnen in der Übung demonstriert.

Aufgabe 2.3 (40 Punkte)

Sei das Dreieck D_1 durch die Punkte $P_1\,(0,1,3)$, $P_2\,(1,-1,2)$ und $P_3\,(-1,2,1)$ und die folgenden Transformationen in $\mathbb{R}^{4\times 4}$ gegeben.

- Rotation R_x um $\alpha_x = \frac{2\pi}{3}$ um die x-Achse,
- Rotation R_y um $\alpha_y = -\frac{2\pi}{6}$ um die y-Achse,
- Skalierung S um den Faktor $\left(1, -\frac{1}{2}, 2\right)$ und
- Translation T um den Vektor $(-1,-2,2)$.

1. Stellen Sie die einzelnen Transformationsmatrizen exakt auf und berechnen Sie das Produkt $M = T \cdot S \cdot R_y \cdot R_x$ ebenfalls exakt.
2. Berechnen Sie das Dreieck D_2, welches durch das Anwenden der Gesamttransformation M auf das Dreieck D_1 entsteht.
3. Berechnen Sie die inverse Transformation M^{-1} zu M exakt.
4. Erweitern Sie das Projekt aus Aufgabe 2 und schreiben Sie eine Javaklasse `Transformation`, in deren `main`-Methode das Dreieck D_2 mithilfe der Klassen `Vector4f` und `Matrix4f` aus dem Package `org.lwjgl.util.vector` berechnet wird.

Musterlösung vom 09.05.2012:

1. Für die Rotationen ergeben sich die Matrizen

$$R_x\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) & 0 \\ 0 & \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$R_y\left(-\frac{2\pi}{6}\right) = \begin{pmatrix} \cos\left(-\frac{2\pi}{6}\right) & 0 & \sin\left(-\frac{2\pi}{6}\right) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\left(-\frac{2\pi}{6}\right) & 0 & \cos\left(-\frac{2\pi}{6}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für die Skalierung S und die Translation T ergeben sich die Matrizen

$$S\left(1, -\frac{1}{2}, 2\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$T(-1,-2,2)=\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&-2\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Die Multiplikation der beiden Rotationen ergibt

$$R_y\cdot R_x=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&-\frac{\sqrt{3}}{2}&0\\0&1&0&0\\\frac{\sqrt{3}}{2}&0&\frac{1}{2}&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}&0\\0&\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{3}{4}&\frac{\sqrt{3}}{4}&0\\0&-\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}&0\\\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{\sqrt{3}}{4}&-\frac{1}{4}&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Die Multiplikation der Translation mit der Skalierung ergibt

$$T\cdot S=\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&-2\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-\frac{1}{2}&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&-\frac{1}{2}&0&-2\\0&0&2&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Und somit ist die gesamte Transformation

$$\begin{aligned}M&=(T\cdot S)\cdot(R_y\cdot R_x)\\&=\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&-\frac{1}{2}&0&-2\\0&0&2&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{3}{4}&\frac{\sqrt{3}}{4}&0\\0&-\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}&0\\\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{\sqrt{3}}{4}&-\frac{1}{4}&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{3}{4}&\frac{\sqrt{3}}{4}&-1\\0&\frac{1}{4}&\frac{\sqrt{3}}{4}&-2\\\sqrt{3}&\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

2. Um das Dreieck D_1 in das transformierte Dreieck zu überführen, müssen die einzelnen Punkte mit der Matrix M multipliziert werden. Um die Multiplikation ausführen zu können, müssen die Vektoren natürlich um die homogene Koordinate $w=1$ erweitert werden.

$$Q_1=M\cdot P_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{3}{4}&\frac{\sqrt{3}}{4}&-1\\0&\frac{1}{4}&\frac{\sqrt{3}}{4}&-2\\\sqrt{3}&\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{4}+\frac{3\cdot\sqrt{3}}{4}-1\\\frac{1}{4}+\frac{3\cdot\sqrt{3}}{4}-2\\\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}+2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3\cdot\sqrt{3}-7}{4}\\\frac{3\cdot\sqrt{3}-7}{4}\\\frac{\sqrt{3}+1}{2}\\1\end{pmatrix}$$

$$Q_2=M\cdot P_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{3}{4}&\frac{\sqrt{3}}{4}&-1\\0&\frac{1}{4}&\frac{\sqrt{3}}{4}&-2\\\sqrt{3}&\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}-1\\-\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}-2\\\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}-1+2\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{2\cdot\sqrt{3}+1}{4}\\\frac{2\cdot\sqrt{3}-9}{4}\\\frac{\sqrt{3}+2}{2}\\1\end{pmatrix}$$

$$Q_3 = M\cdot P_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & -1 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & -2 \\ \sqrt{3} & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} - 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} - 2 \\ -\sqrt{3} + \sqrt{3} - \frac{1}{2} + 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}-12}{4} \\ \frac{\sqrt{3}-6}{4} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Das Dreieck D_2 setzt sich dann aus den Punkten Q_1, Q_2 und Q_3 zusammen.

3. Um die Transformation M zu invertieren, werden ihre Bestandteile jeweils invertiert und dann in umgekehrter Reihenfolge zusammengefügt.

$$R_x\left(\frac{2}{3}\pi\right)^{-1} = R_x\left(-\frac{2}{3}\pi\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_y\left(-\frac{2}{6}\pi\right)^{-1} = R_y\left(\frac{2}{6}\pi\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S\left(1, -\frac{1}{2}, 2\right)^{-1} = S\left(1, -2, \frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T(-1,-2,2)^{-1} = T(1,2,-2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_x^{-1}\cdot R_y^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{4} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S^{-1}\cdot T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Und damit erhalten wir schließlich die Gesamttransformation

$$\begin{aligned} M^{-1} &= \left(R_x^{-1}\cdot R_y^{-1}\right)\cdot\left(S^{-1}\cdot T^{-1}\right). \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{3}{4} & 1 & \frac{\sqrt{3}}{8} & -\frac{3}{4} + 2 - \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \sqrt{3} & -\frac{1}{8} & \frac{\sqrt{3}}{4} + 2\cdot\sqrt{3} + \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{3}{4} & 1 & \frac{\sqrt{3}}{8} & \frac{5-\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \sqrt{3} & -\frac{1}{8} & \frac{1+9\cdot\sqrt{3}}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

`/home/cg/2012/Uebung/Blatt2/Aufg/Transformation.java`

Aufgabe 2.4 (20 Punkte)

Beantworten Sie Ihrem Tutor Fragen zur Vorlesung.