Institut für Informatik
Henning Wenke, M.Sc.
Nico Marniok, B.Sc.
Sascha Kolodzey, B.Sc.

Universität Osnabrück, 08.05.2012
`http://www-lehre.inf.uos.de/~cg`
Testat bis 16.05.2012, 15:00 Uhr

Übungen zu Computergrafik

Sommersemester 2012

Blatt 3

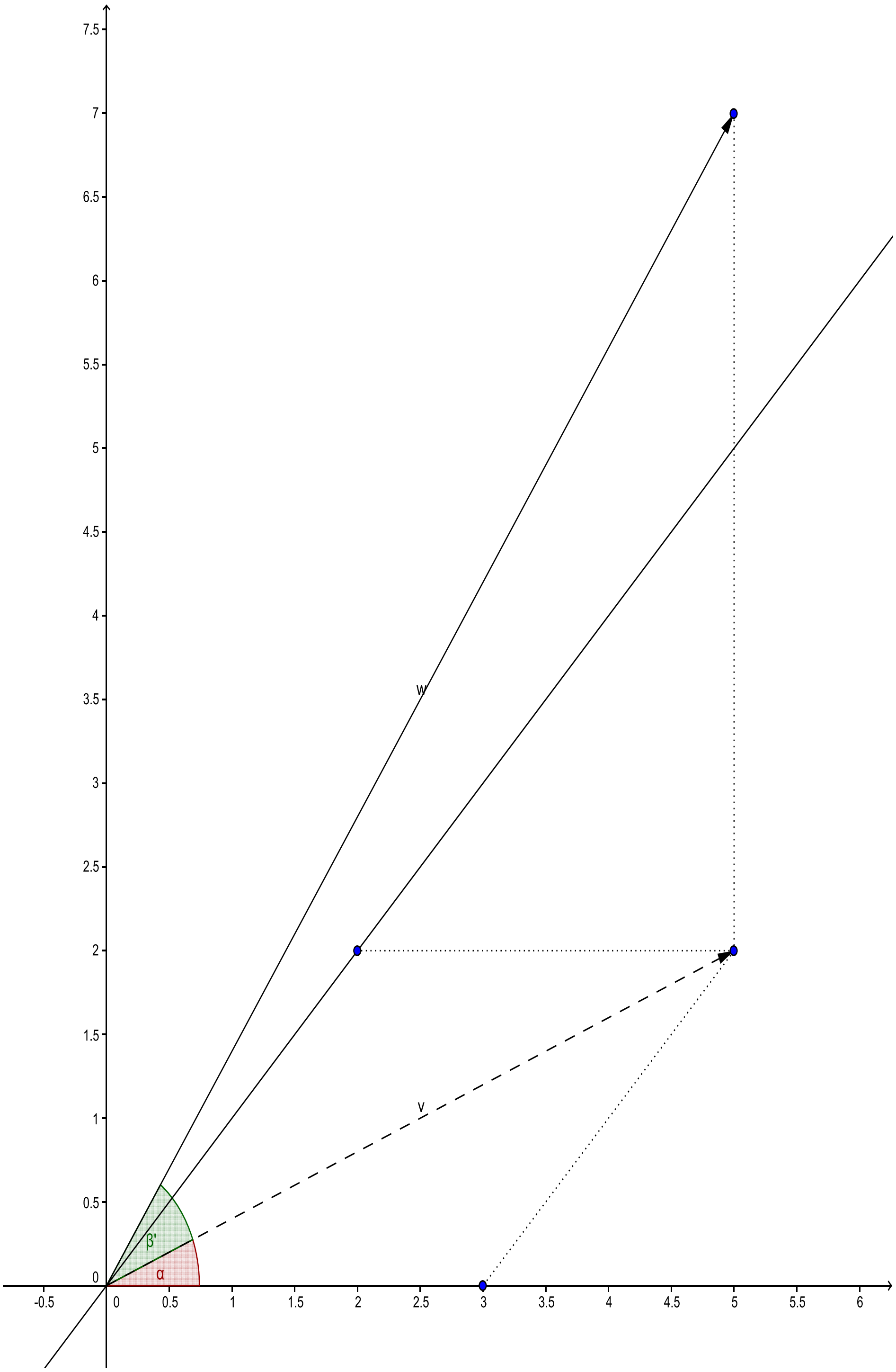
Aufgabe 3.1 (40 Punkte)

Seien die Punkte $P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 13 \\ 4 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ gegeben. Konstruieren Sie eine Matrix M, die den Punkt P_3 um die von P_1 und P_2 definierte Gerade um den Winkel $\varphi = \frac{\pi}{4}$ dreht. Gehen Sie dabei folgendermaßen vor:

1. Geben Sie die Gerade $a(t) = w_0 + t \cdot w$, die durch P_1 und P_2 geht, in Parameterform an, sodass $a(0) = P_1$ und $a(1) = P_2$.
2. Konstruieren Sie die Translationsmatrix T, sodass der Nullpunkt auf der Geraden $T \cdot a(t)$liegt.
3. Konstruieren Sie die Rotationsmatrix $R_y(\alpha)$ um die y-Achse und mit dem Winkel α, sodass die Gerade $R_y(\alpha) \cdot T \cdot a(t)$ in der xy-Ebene liegt.
4. Konstruieren Sie die Rotationsmatrix $R_z(\beta)$ um die z-Achse und mit dem Winkel β, sodass die Gerade $R_z(\beta) \cdot R_y(\alpha) \cdot T \cdot a(t)$ auf der x-Achse liegt.
5. Konstruieren Sie die Rotationsmatrix $R_x(\varphi)$, die einen Punkt P um die x-Achse dreht.
6. Konstruieren Sie die Transformationen $M_L = T^{-1} \cdot R_y(-\alpha) \cdot R_z(-\beta)$ und $M_R = R_z(\beta) \cdot R_y(\alpha) \cdot T$ exakt.
7. Berechnen Sie den Punkt $P_3' = M_L \cdot R_x(\varphi) \cdot M_R \cdot P_3$ mittels der Klasse `Matrix4f`. Erzeugen Sie dazu drei Matrizen, in die Sie die Werte von M_L, M_R und $R_x(\varphi)$ explizit eintragen und berechnen Sie das Produkt mittels der Methode `Matrix4f.mul(...)` und speichern Sie die Ergebnismatrix in einer neuen Variable. Erzeugen Sie anschließend einen `Vector4f` mit den Werten des Punktes P_3 und transformieren Sie diesen mittels der Methode `Matrix4f.transform(...)`. Lassen Sie sich das Ergebnis auf der Konsole ausgeben.

Hinweis: Alle Berechnungen in den Schritten 1. bis 6. haben *exakt* zu sein. Sie müssen ihrem Tutor jeden Schritt klarmachen (am Besten mithilfe einer oder mehrerer Skizzen). Es wird empfohlen, die Matrizen $R_y(-\alpha) \cdot R_z(-\beta)$ und $R_z(\beta) \cdot R_y(\alpha)$ zumächst allgemein aufzustellen und zusammenzurechnen, bevor Sie die Werte explizit einsetzen. Die Winkel α und β müssen zu keinem Zeitpunkt exakt aufgestellt werden.

Musterlösung vom 16.05.2012:



1. Die Geradengleichung ist $a(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix}$. Damit ist $a(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = P_1$ und

$a(1) = \begin{pmatrix} 5 \\ 13 \\ 4 \end{pmatrix} = P_2$. Dann ist $w = \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix}$ und die Projektion v von w auf die xz-Ebene ist $v = \begin{pmatrix} w_x \\ 0 \\ w_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.

2. Wir konstruieren eine Translationsmatrix T, sodass $T \cdot a(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Wir translatieren also um $-\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Damit ist $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Wir rotieren um die y-Achse mit dem Winkel α. Aus der Zeichnung erhalten wir die Zusammenhänge

$$\begin{aligned} \sin\alpha &= \frac{w_z}{|v|} \\ \cos\alpha &= \frac{w_x}{|v|}. \end{aligned}$$

Also lautet die Rotationsmatrix $R_y(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{|v|}\begin{pmatrix} w_x & 0 & w_z & 0 \\ 0 & |v| & 0 & 0 \\ -w_z & 0 & w_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |v| \end{pmatrix}$.

4. Wir rotieren um die z-Achse mit dem Winkel $\beta = 2\pi - \beta'$ (da wir mit dem Uhrzeigersinn drehen müssen). Aus der Zeichnung erhalten wir die Zusammenhänge

$$\begin{aligned} \sin\beta' &= \frac{w_y}{|w|} \\ \cos\beta' &= \frac{|v|}{|w|}. \end{aligned}$$

Also lautet die Rotationsmatrix

$$\begin{aligned} R_z(\beta) &= \begin{pmatrix} \cos(2\pi-\beta') & -\sin(2\pi-\beta') & 0 & 0 \\ \sin(2\pi-\beta') & \cos(2\pi-\beta') & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\beta') & \sin(\beta') & 0 & 0 \\ -\sin(\beta') & \cos(\beta') & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{|w|}\begin{pmatrix} |v| & w_y & 0 & 0 \\ -w_y & |v| & 0 & 0 \\ 0 & 0 & |w| & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |w| \end{pmatrix}.$$

5. Wir rotieren um die x-Achse mit dem Winkel $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Wir setzen $\sin\varphi = \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ direkt in die Matrix ein und erhalten $R_x(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Wir konstruieren

$$\begin{aligned}
M_R &= R_z(-\beta)\cdot R_y(\alpha)\cdot T \\
&= \frac{1}{|w|}\begin{pmatrix} |v| & w_y & 0 & 0 \\ -w_y & |v| & 0 & 0 \\ 0 & 0 & |w| & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |w| \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{|v|}\begin{pmatrix} w_x & 0 & w_z & 0 \\ 0 & |v| & 0 & 0 \\ -w_z & 0 & w_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |v| \end{pmatrix}\cdot T \\
&= \frac{1}{|v|\,|w|}\begin{pmatrix} |v|\,w_x & |v|\,w_y & |v|\,w_z & 0 \\ -w_xw_y & |v|^2 & -w_yw_z & 0 \\ -|w|\,w_z & 0 & |w|\,w_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |v|\,|w| \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{|v|\,|w|}\begin{pmatrix} |v|\,w_x & |v|\,w_y & |v|\,w_z & -2\,|v|\,w_x - |v|\,w_y \\ -w_xw_y & |v|^2 & -w_yw_z & 2w_xw_y - |v|^2 \\ -|w|\,w_z & 0 & |w|\,w_x & 2\,|w|\,w_z \\ 0 & 0 & 0 & |v|\,|w| \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Einsetzen von $w_x = 3$, $w_y = 12$, $w_z = 4$, $|w| = 13$ und $|v| = 5$ liefert

$$M_R = \frac{1}{65}\begin{pmatrix} 15 & 60 & 20 & -90 \\ -36 & 25 & -48 & 47 \\ -52 & 0 & 39 & 104 \\ 0 & 0 & 0 & 65 \end{pmatrix}.$$

Für die Inverse Matrix erhalten wir

$$\begin{aligned}
M_R &= T\cdot R_y(-\alpha)\cdot R_z(\beta) \\
&= T\cdot\frac{1}{|v|}\begin{pmatrix} w_x & 0 & -w_z & 0 \\ 0 & |v| & 0 & 0 \\ w_z & 0 & w_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |v| \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{|w|}\begin{pmatrix} |v| & -w_y & 0 & 0 \\ w_y & |v| & 0 & 0 \\ 0 & 0 & |w| & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |w| \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{|v|\,|w|}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} |v|\,w_x & -w_xw_y & -|w|\,w_z & 0 \\ |v|\,w_y & |v|^2 & 0 & 0 \\ |v|\,w_z & -w_yw_z & |w|\,w_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |v|\,|w| \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{|v|\,|w|}\begin{pmatrix} |v|\,w_x & -w_x w_y & -|w|\,w_z & 2\,|v|\,|w| \\ |v|\,w_y & |v|^2 & 0 & |v|\,|w| \\ |v|\,w_z & -w_y w_z & |w|\,w_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |v|\,|w| \end{pmatrix}.$$

Einsetzen liefert

$$M_L = \frac{1}{65}\begin{pmatrix} 15 & -36 & -52 & 130 \\ 60 & 25 & 0 & 65 \\ 20 & -48 & 39 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 65 \end{pmatrix}.$$

7. `/home/cg/2012/Uebung/Blatt3/Lsg/CG12Blatt3.zip`

Aufgabe 3.2 (25 Punkte)

Seien wieder die Punkte $P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 13 \\ 4 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ gegeben. Konstruieren Sie wieder eine Matrix M, die den Punkt P_3 um die von P_1 und P_2 definierte Gerade um den Winkel $\varphi = \frac{\pi}{4}$ dreht. Gehen Sie diesmal folgendermaßen vor:

1. Geben Sie die Gerade $a(t) = w_0 + t \cdot w$, die durch P_1 und P_2 geht, in Parameterform an, sodass $a(0) = P_1$ und $a(1) = P_2$.

2. Konstruieren Sie einen Vektor $u \neq 0$, sodass $u \cdot w = 0$, d.h. w steht orthogonal auf u und den Vektor $v = u \times w$.

3. Konstruieren Sie die Basentransformationsmatrix $M_{B\to E}$, die einen Punkt P^B, beschrieben in dem Koordinatensystem $B\left\{P_1, \frac{u}{|u|}, \frac{v}{|v|}, \frac{w}{|w|}\right\}$, in einen Punkt P^E, beschrieben in dem Standardkoordinatensystem $E\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$, überführt.

4. Konstruieren Sie die Rotationsmatrix $R_z(-\varphi)$, die einen Punkt P um die z-Achse mit dem Winkel $-\varphi = -\frac{\pi}{4}$ dreht.

5. Berechnen Sie $M_{E\to B} = M_{B\to E}^{-1}$ mit der von `Matrix4f` bereitgestellten Methode und führen Sie Punkt 7. der vorherigen Aufgabe mit den folgenden Matrizen durch:

   (a) $M_L \mapsto M_{B\to E}$

   (b) $M_R \mapsto M_{E\to B}$

   (c) $R_x(\varphi) \mapsto R_z(-\varphi)$

6. Warum erhalten Sie (sofern Sie keinen Fehler gemacht haben) dasselbe Ergebnis wie in Aufgabe 1?

Hinweis: Alle Berechnungen in den Schritten 1. bis 4. haben *exakt* zu sein.

Musterlösung vom 16.05.2012:

1. s. Aufgabe 1.1
2. Sei $u = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. Damit gilt $u \cdot w = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix} = -12 + 0 + 12 = 0$ und $v = u \times w = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 4 - 3 \cdot 12 \\ 3 \cdot 3 - (-4) \cdot 4 \\ (-4) \cdot 12 - 0 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -36 \\ 25 \\ -48 \end{pmatrix}$.
3. Die Transformationsmatrix erhalten wir, indem wir die Basisvektoren als Spalten der Matrix schreiben und in die vierte Spalte den Urpsrung des Koordinatensystem, also P_1. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
M_{B\to E} &= \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{u}{|u|} & \frac{v}{|v|} & \frac{w}{|w|} & P_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{-4}{5} & \frac{-36}{65} & \frac{3}{13} & 2 \\ 0 & \frac{25}{65} & \frac{12}{13} & 1 \\ \frac{3}{5} & \frac{-48}{65} & \frac{4}{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{65} \begin{pmatrix} -52 & -36 & 15 & 130 \\ 0 & 25 & 60 & 65 \\ 39 & -48 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 65 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

   Exkurs Lineare Algebra: Eine solche Matrix ist besonders leicht zu invertieren, da sie die Gestalt $M_{B\to E} = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u' & v' & w' & p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ hat, wobei die Vektoren u', v' und w' eine Orthonormalbasis sind und p ein beliebiger Punkt. Die Inverse ist dann $M_{B\to E}^{-1} = M_{E\to B} = \begin{pmatrix} \cdots & u' & \cdots & -p \cdot u' \\ \cdots & v' & \cdots & -p \cdot v' \\ \cdots & w' & \cdots & -p \cdot w' \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. In unserem Fall ist also $M_{E\to B} = \begin{pmatrix} \frac{-4}{5} & 0 & \frac{3}{5} & \frac{8}{5} \\ \frac{-36}{65} & \frac{25}{65} & \frac{-48}{65} & \frac{47}{65} \\ \frac{3}{13} & \frac{12}{13} & \frac{4}{13} & -\frac{18}{13} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
4. Für die Rotationsmatrix erhalten wir einfach $R_z(-\varphi) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
5. `/home/cg/2012/Uebung/Blatt3/Lsg/CG12Blatt3.zip`

6. Die Transformation $M_{E\to B}$ sorgt dafür, dass alle Punkte bezüglich des Koordinatensystems beschrieben werden, dessen z-Achse genau der Gerade entspricht. Daher führt eine Rotation des Punktes um die z-Achse und anschließendes Zurücktransformieren mittels $M_{B\to E}$ zu der gleichen Operation.

Aufgabe 3.3 (15 Punkte)

Laden Sie sich das Projekt von `/home/cg/2012/Uebung/Blatt3/Aufg/CG12Blatt3.zip` herunter und richten Sie es in Ihrer bevorzugten Entwicklungsumgebung ein. Implementieren Sie in der Klasse `SimpleTriangle.java` die Methode `createShaderProgram()`, die folgende Schritte durchführen soll:

- Erzeugen eines Shaderprogramms
- Erzeugen eines Vertex- und Fragmentshaders
- Anhängen der erzeugten Shader an das erzeugte Shaderprogramm
- Lesen der Dateiinhalte von `shader/MainVS.glsl` und `shader/MainFS.glsl` mittels der Methode `Util.getFileContents(...)`
- Zuweisen des Sourcecodes an die entsprechenden Shader
- Kompilieren beider Shader
- Ausgabe evtl. erzeugter Fehler auf der Konsole
- Linken des Shaderprogramms

Hinweis: Sie benötigen die folgenden OpenGL Methoden: `glCreateProgram`, `glCreateShader`, `glAttachShader`, `glShaderSource`, `glCompileShader`, `glGetShaderInfoLog`, `glLinkProgram`. Diese befinden sich in der Klasse `opengl.GL` und nur diese dürfen verwendet werden.

Musterlösung vom 16.05.2012:

`/home/cg/2012/Uebung/Blatt3/Lsg/CG12Blatt3.zip`

Aufgabe 3.4 (20 Punkte)

Beantworten Sie folgende Aufgaben schriftlich und, falls erforderlich, erläutern Sie die Antworten Ihrem Tutor.

- Beschreiben Sie die Aufgaben von OpenGL und GLSL. Gehen Sie auch auf Syntax und Besonderheiten bei der Programmierung ein.
- Erläutern Sie den Aufgaben Bereich des OpenGL Client und OpenGL Server.

- Warum wird ein OpenGL Befehl nicht unbedingt unmittelbar nach seinem Aufruf ausgeführt? Wodurch kann ein sofortiger Aufruf erzwungen werden?
- Gegeben Sie folgendes chronologisches Szenario:
  1. Eine OpenGL Funktion generiert einen GL_INVALID_ENUM Fehler.
  2. Eine OpenGL Funktion generiert einen GL_INVALID_VALUE Fehler.
  3. User ruft glGetError() auf.
  4. Eine OpenGL Funktion generiert einen GL_INVALID_OPERATION Fehler.

  Welches Error Flag würde glGetError() im derzeitigen Zustand zurückliefern?
  Welches Error Flag würde glGetError() unmittelbar nach einem weiteren Aufruf liefern?
- Gegeben sei $vec3\,a = vec3(1,2,3)\,und\,vec3\,b = vec3(3,2,1)$. Berechnen Sie $a*b$. Wobei das Symbol $'*'$ die dazugehörige Vektorverknüpfung aus GLSL darstellt.
- Gegeben sei $vec3\,a = vec3(1,5,-1)$. Welchen Wert und welchen Datentyp würde der Aufruf $a.xz$ zurückliefern?
- Gegeben sei $vec3\,a = vec3(7)\,und\,vec4\,b = vec4(100)$. Welchen Wert liefert die Operation $a-b$?