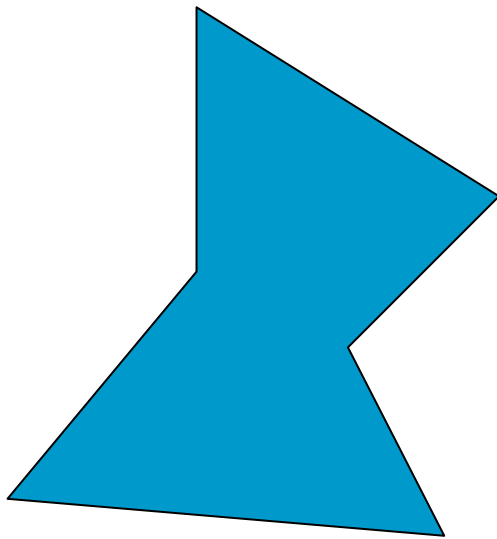


Computergrafik SS 2014

Oliver Vornberger

Kapitel 6:  
2D-Transformationen

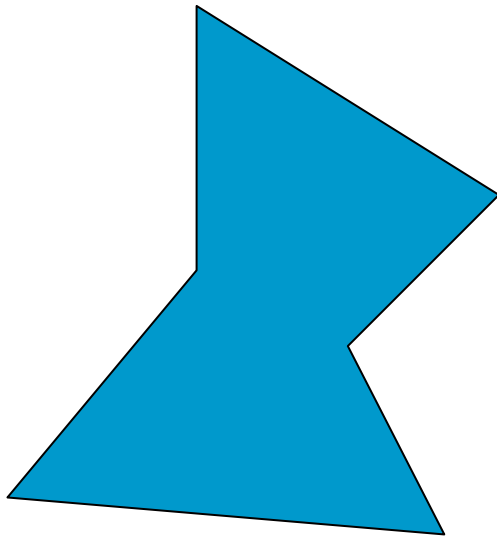
# Translation



$$x := x + t_x$$

$$y := y + t_y$$

# Skalierung



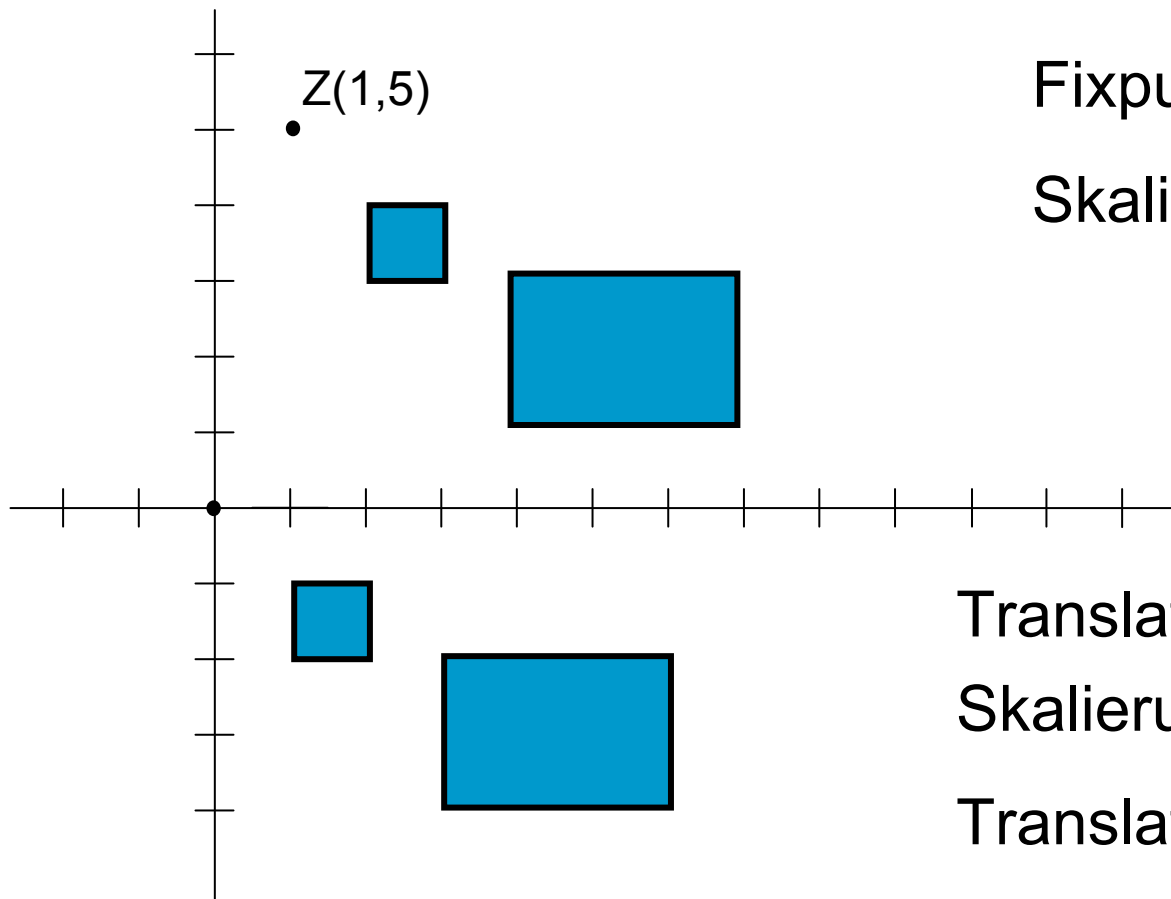
$$x := x \cdot s_x$$

$$y := y \cdot s_y$$

$s_x = s_y$  uniforme Skalierung

$s_x \neq s_y$  Verzerrung

# Skalierung bzgl. Fixpunkt



Fixpunkt  $Z_x=1, Z_y=5$

Skalierung  $s_x=3, s_y=2$

Translation um  $(-Z_x, -Z_y)$

Skalierung mit  $(s_x, s_y)$

Translation um  $(Z_x, Z_y)$

## Skalierungsformel

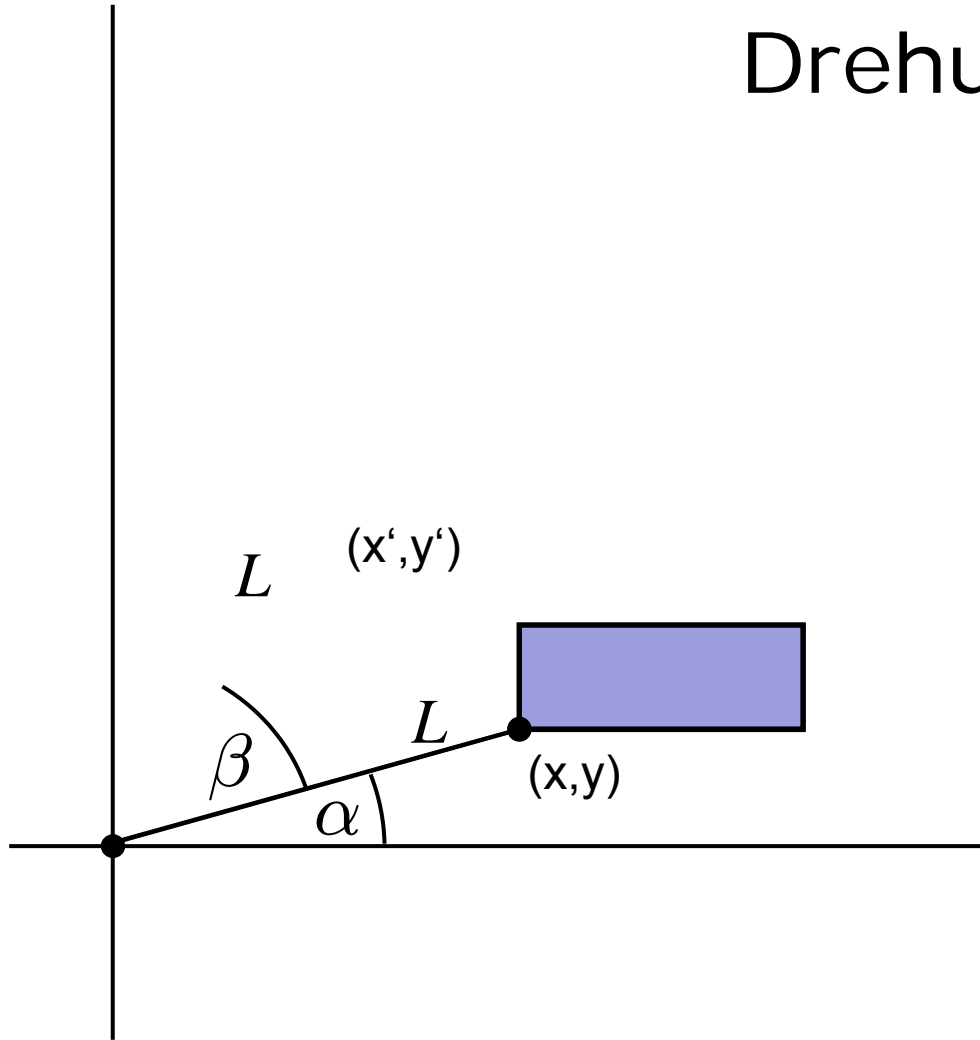
$$x' = (x - Z_x) \cdot s_x + Z_x$$

$$y' = (y - Z_y) \cdot s_y + Z_y$$

$$x' = x \cdot s_x - \underbrace{Z_x \cdot s_x + Z_x}_{d_x}$$

$$y' = y \cdot s_y - \underbrace{Z_y \cdot s_y + Z_y}_{d_y}$$

# Drehung



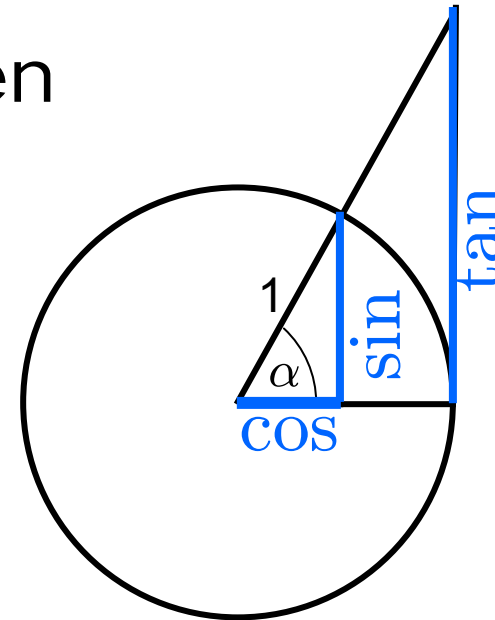
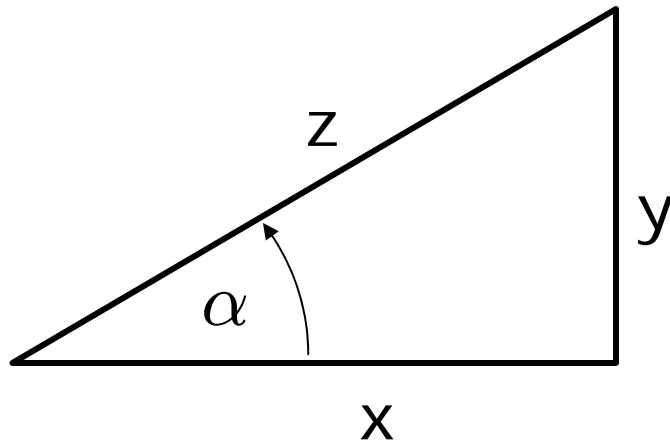
$$\cos(\alpha) = x/L$$

$$\sin(\alpha) = y/L$$

$$\cos(\alpha + \beta) = x'/L$$

$$\sin(\alpha + \beta) = y'/L$$

# Trigonometrische Funktionen



$$\cos(\alpha) = \frac{x}{z}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{y}{z}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{y}{x}$$

$$\cot(\alpha) = \frac{x}{y}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

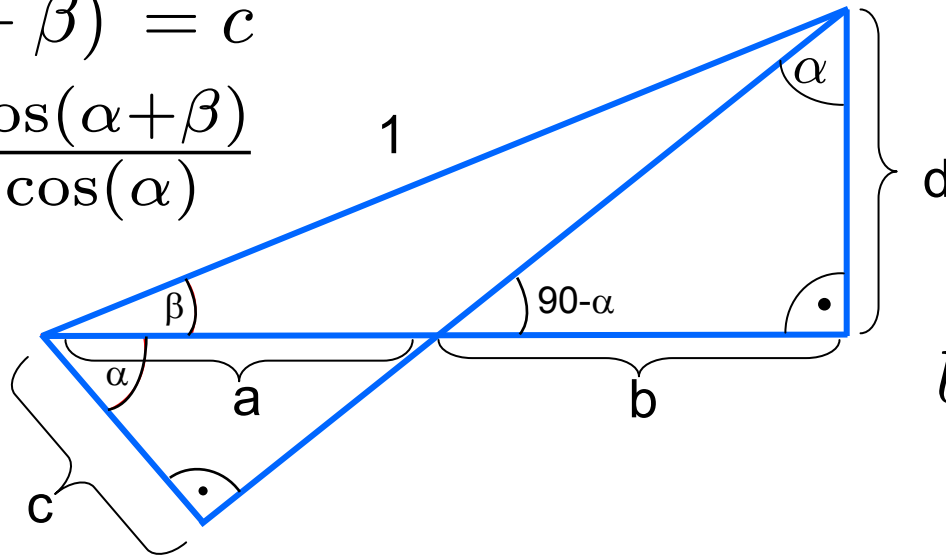
$$\cot(\alpha) = \frac{1}{\tan(\alpha)}$$

# Additionstheorem

$$\cos(\alpha) = c/a$$

$$\cos(\alpha + \beta) = c$$

$$a = \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha)}$$



$$\sin(\beta) = d$$

$$\tan(\alpha) = b/d$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

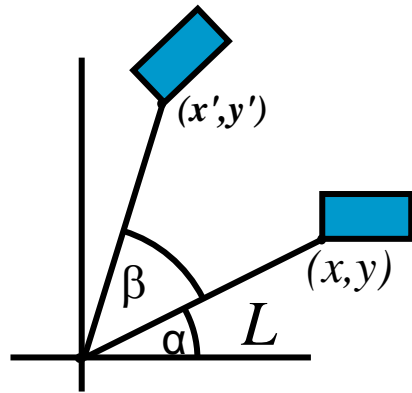
$$b = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \cdot \sin(\beta)$$

$$a + b = \cos(\beta) = \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha)} + \sin(\beta) \cdot \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

$$\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) = \cos(\alpha + \beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$





## Formel für Drehung

$$\cos(\alpha) = x/L$$

$$\sin(\alpha) = y/L$$

$$\cos(\alpha + \beta) = x'/L \quad \sin(\alpha + \beta) = y'/L$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos(\beta) \cdot \sin(\alpha) + \sin(\beta) \cdot \cos(\alpha)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\beta) \cdot \cos(\alpha) - \sin(\beta) \cdot \sin(\alpha)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = x'/L = \cos(\beta) \cdot \cos(\alpha) - \sin(\beta) \cdot \sin(\alpha)$$

$$x' = L \cdot \cos(\beta) \cdot x/L - \sin(\beta) \cdot y/L \cdot L$$

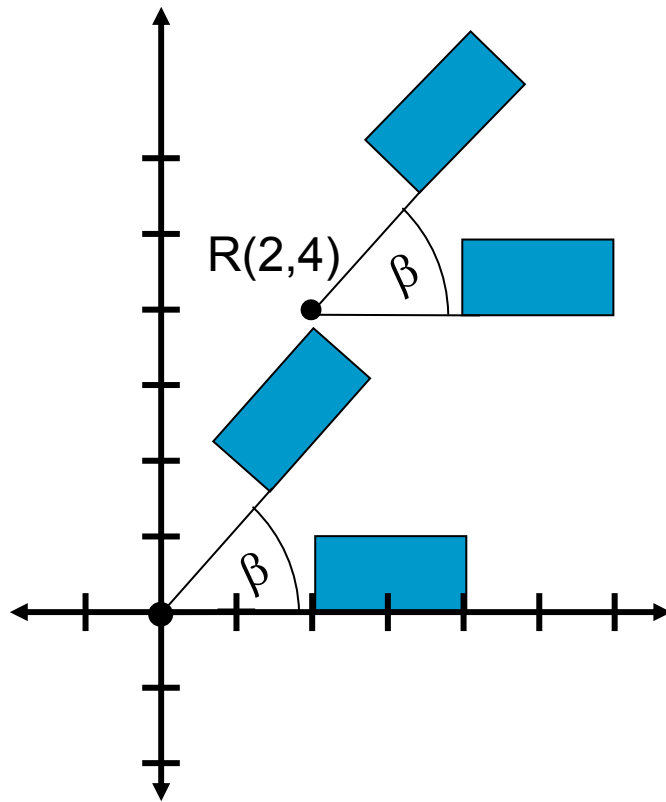
$$x' = x \cdot \cos(\beta) - y \cdot \sin(\beta)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = y'/L = \cos(\beta) \cdot \sin(\alpha) + \sin(\beta) \cdot \cos(\alpha)$$

$$y' = L \cdot \cos(\beta) \cdot y/L + L \cdot \sin(\beta) \cdot x/L$$

$$y' = x \cdot \sin(\beta) + y \cdot \cos(\beta)$$

# Rotation bzgl. Rotationszentrum



Translation um  $(-R_x, -R_y)$

Rotation um  $\beta$  bzgl.  $(0,0)$

Translation um  $(R_x, R_y)$

## Matrix für Rotation

$$x' := x \cdot \cos(\beta) - y \cdot \sin(\beta)$$

$$y' := x \cdot \sin(\beta) + y \cdot \cos(\beta)$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$(x' \ y') := (x \ y) \cdot \begin{pmatrix} \cos(\beta) & \sin(\beta) \\ -\sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = (B^T \cdot A^T)^T$$

# Matrix für Skalierung

$$x' := x \cdot s_x$$

$$y' := y \cdot s_y$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

# Matrix für Translation

$$x' := x + t_x$$

$$y' := y + t_y$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

# Homogene Koordinaten

$P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  hat homogene Koordinaten  $\begin{pmatrix} x \cdot w \\ y \cdot w \\ w \end{pmatrix}$  mit  $w \neq 0$

Zu den homogenen Koordinaten  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ w \end{pmatrix}$  gehört  $P = \begin{pmatrix} x/w \\ y/w \end{pmatrix}$

Richtungsvektor  $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  hat homogene Koordinaten  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$

Zum Punkt  $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$  gehört die Ursprungsgerade  $\begin{pmatrix} 3 \cdot w \\ 4 \cdot w \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

# Matrix für Translation

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$:= \begin{pmatrix} x + t_x \\ y + t_y \\ 1 \end{pmatrix}$$

## Beispiel für Translation

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 21 \\ 24 \\ 3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 18 \\ 3 \end{pmatrix}$$



# Matrix für Skalierung

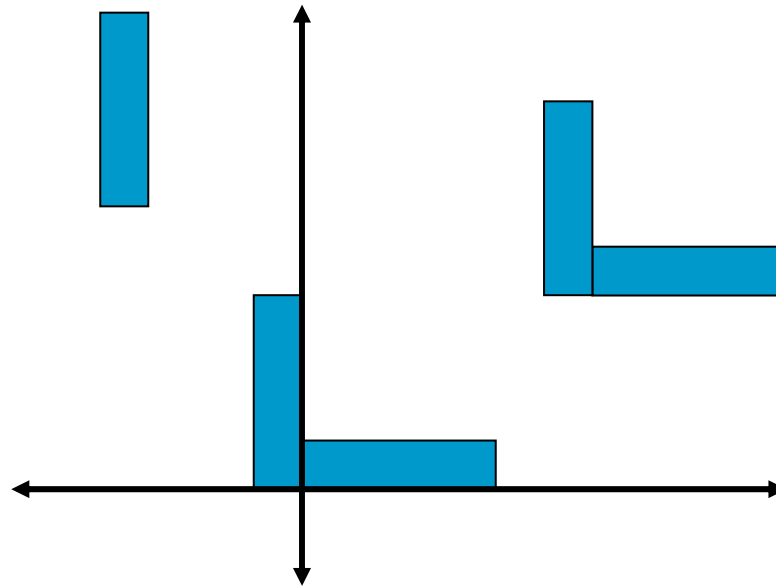
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

# Matrix für Rotation

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) & 0 \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

# Verknüpfung von Transformationen

- assoziativ:  $A \cdot B \cdot C = (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
- nicht kommutativ:  $A \cdot B \neq B \cdot A$
- Drehung um  $90^\circ$  + Verschieben um  $(4,3) \neq$   
Verschieben um  $(4,3)$  + Drehung um  $90^\circ$



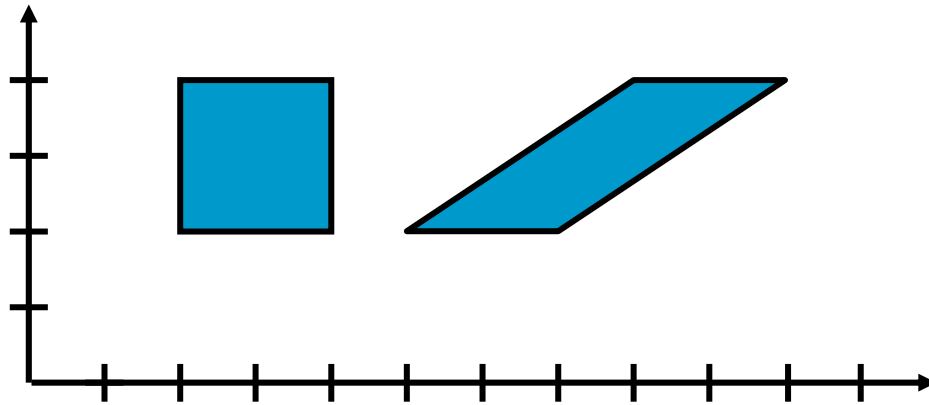
Rotation bzgl (3,5) um  $60^\circ$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0.5000000 & -0.8660254 & 0.0000000 \\ 0.8660254 & 0.5000000 & 0.0000000 \\ 0.0000000 & 0.0000000 & 1.0000000 \end{pmatrix}$$

$$D = C \cdot B \cdot A = \begin{pmatrix} 0.5000000 & -0.8660254 & 2.8301270 \\ 0.8660254 & 0.5000000 & -0.0980762 \\ 0.0000000 & 0.0000000 & 1.0000000 \end{pmatrix}$$

# Matrix für Scherung in x-Richtung

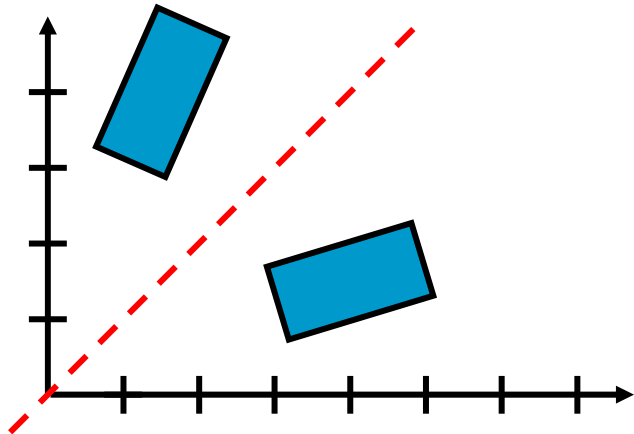


$$x' := x + m \cdot y$$

$$y' := y$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 & m & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

# Matrix für Spiegelung an Hauptdiagonale



$$x' := y$$

$$y' := x$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

# Pixeltransformation

