Computergrafik SS 2014

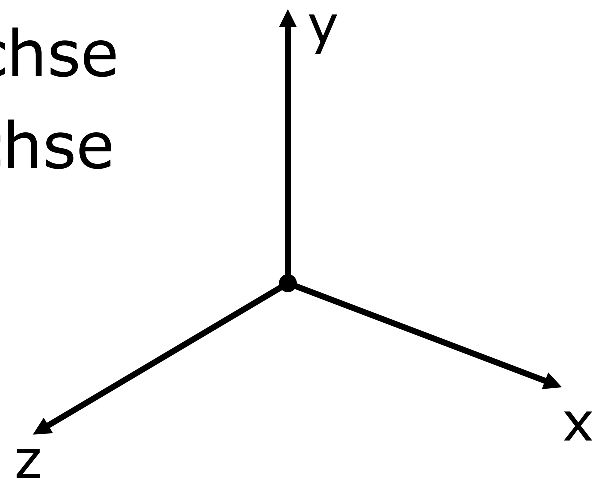
Oliver Vornberger

Kapitel 12:
Mathematische Grundlagen

3D-Koordinatensystem

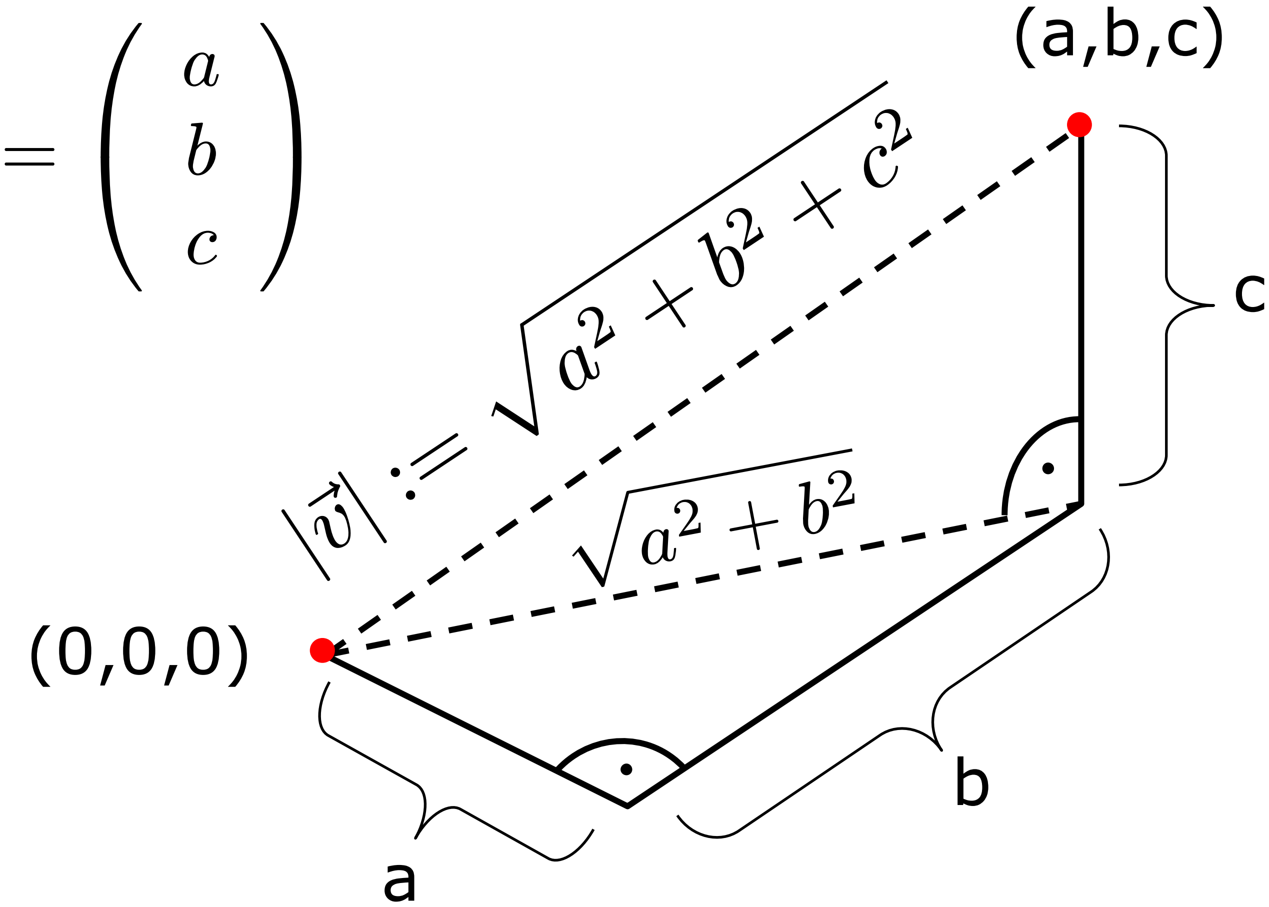
Das kartesische Koordinatensystem
in der rechtshändigen Form:

Daumen:	x-Achse
Zeigefinger:	y-Achse
Mittelfinger:	z-Achse



Länge eines Vektors

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$



Skalarprodukt

$$\vec{v} \cdot \vec{w} := \sum_{i=1}^{n} v_i \cdot w_i$$

$\vec{v}, \vec{w}, \vec{z} \in \mathbb{R}^3, \;\; s \in \mathbb{R}$

Symmetrie: $$\vec{v} \cdot \vec{w} \;=\; \vec{w} \cdot \vec{v}$$

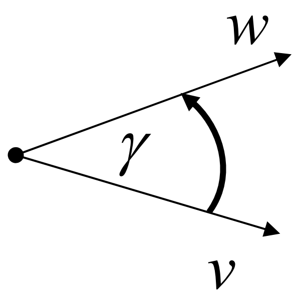
Linearität: $$(\vec{v} + \vec{w}) \cdot \vec{z} \;=\; \vec{v} \cdot \vec{z} + \vec{w} \cdot \vec{z}$$

Homogenität: $$(s\vec{v}) \cdot \vec{w} \;=\; s(\vec{v} \cdot \vec{w})$$

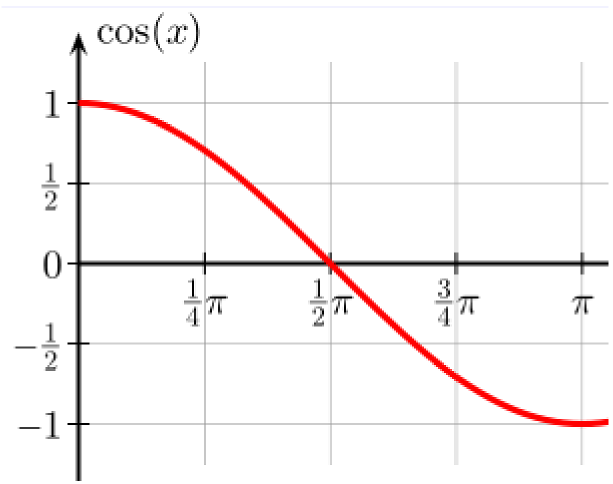
euklidische Norm: $$|\vec{v}| \;=\; \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$$

$$|\vec{v}|^2 \;=\; \vec{v} \cdot \vec{v}$$

Skalarprodukt und Winkel



$$\cos(\gamma) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|}$$

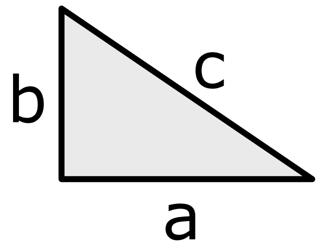


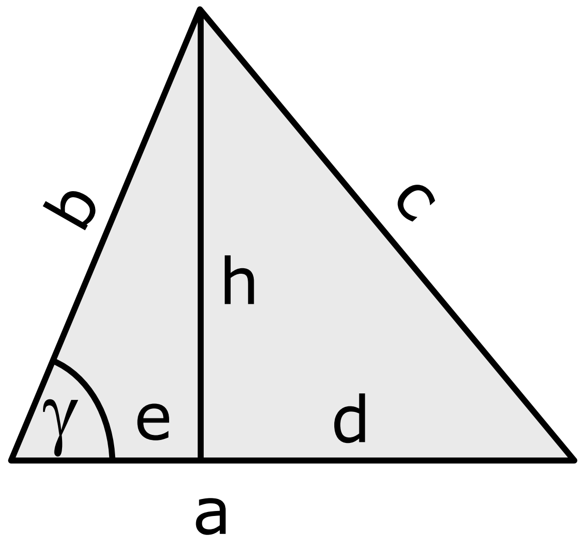
$\vec{v} \cdot \vec{w} > 0$ Winkel < 90°

$\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$ Winkel = 90°

$\vec{v} \cdot \vec{w} < 0$ Winkel > 90°

Kosinussatz





$$h^2 = b^2 - e^2$$

$$d^2 = (a-e)^2 \qquad = a^2 - 2ae + e^2$$

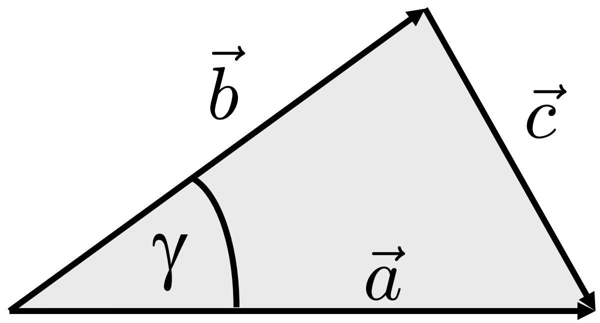
$$c^2 = h^2 + d^2$$

$$c^2 = b^2 - e^2 + a^2 - 2ae + e^2 \quad = a^2 + b^2 - 2ae$$

$$\cos(\gamma) = e/b \quad \Rightarrow e = b \cdot \cos(\gamma)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)$$

Zusammenhang von Winkel und Skalarprodukt



Skalarprodukt

$$|\vec{c}\,|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}| \cdot \cos(\gamma)$$

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}| \cdot \cos(\gamma)$$

$$(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} - 2|\vec{a}||\vec{b}| \cdot \cos(\gamma)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} - 2|\vec{a}||\vec{b}| \cdot \cos(\gamma)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cdot \cos(\gamma)$$

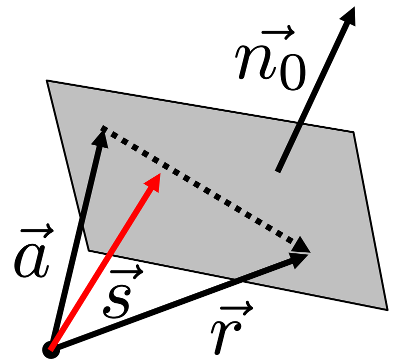
$$\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = cos(\gamma)$$

Skalarprodukt und Ebene

Sei Ebene gegeben

… durch normierten Normalenvektor:

… durch Punkt $\vec{a}$ auf der Ebene:



Für alle Punkte $\vec{r}$ auf der Ebene gilt:

$$(\vec{r} - \vec{a}) \cdot \vec{n_0} = 0$$

$$\vec{r} \cdot \vec{n_0} - \vec{a} \cdot \vec{n_0} = 0$$

$$\vec{r} \cdot \vec{n_0} - D = 0 \qquad D \in \mathbb{R}$$

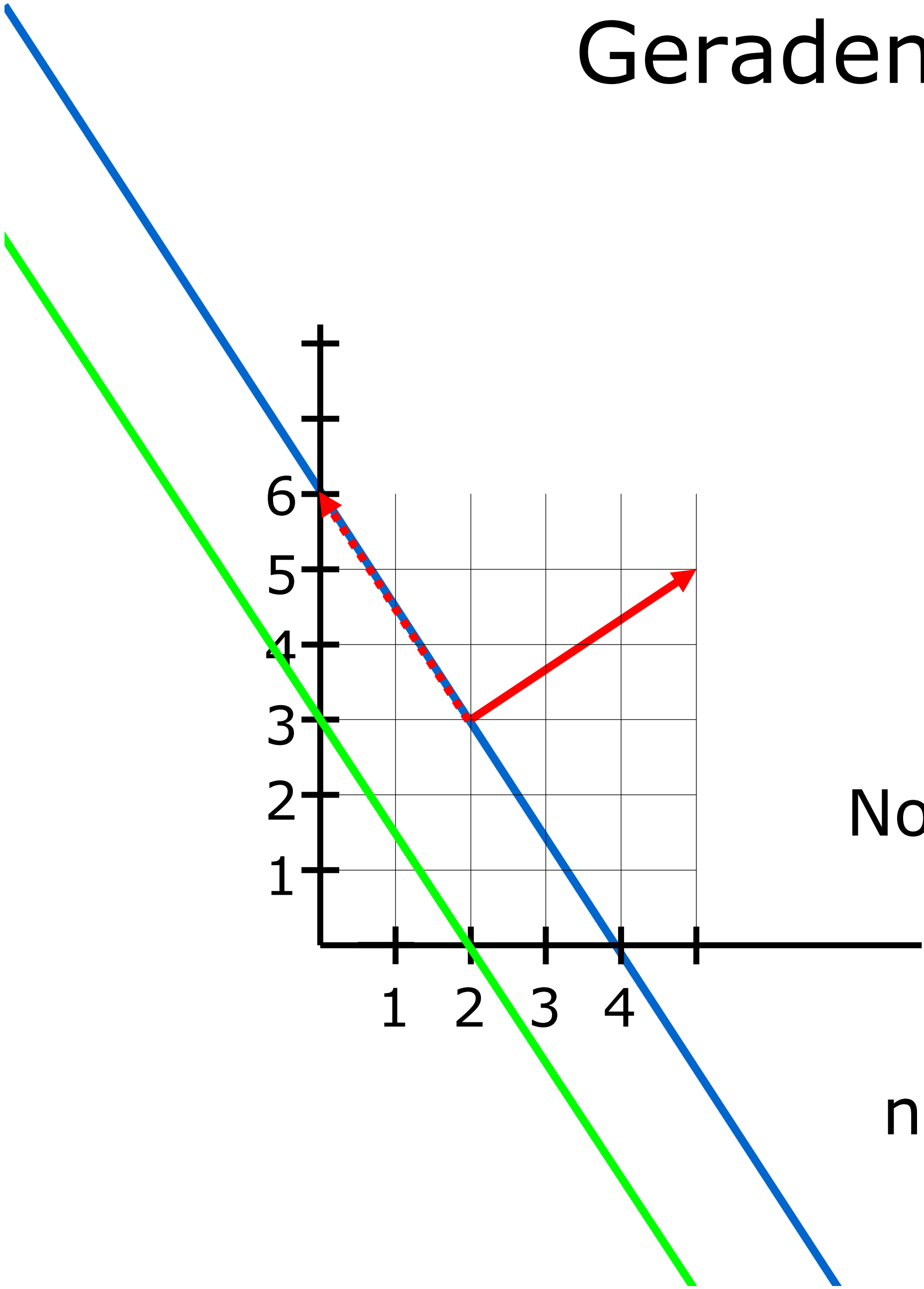
$$\vec{s} \cdot \vec{n_0} = D$$

Bez. zwischen Winkel und Skalarprodukt

$$= |\vec{s}| \cdot |\vec{n_0}| \cdot \cos(\gamma) = |\vec{s}|$$

D = Entfernung der Ebene zum Ursprung

Geradengleichung



$$y = -\frac{3}{2}x + 6$$

$$\frac{3}{2}x + y - 6 = 0$$

$$3x + 2y - 12 = 0$$

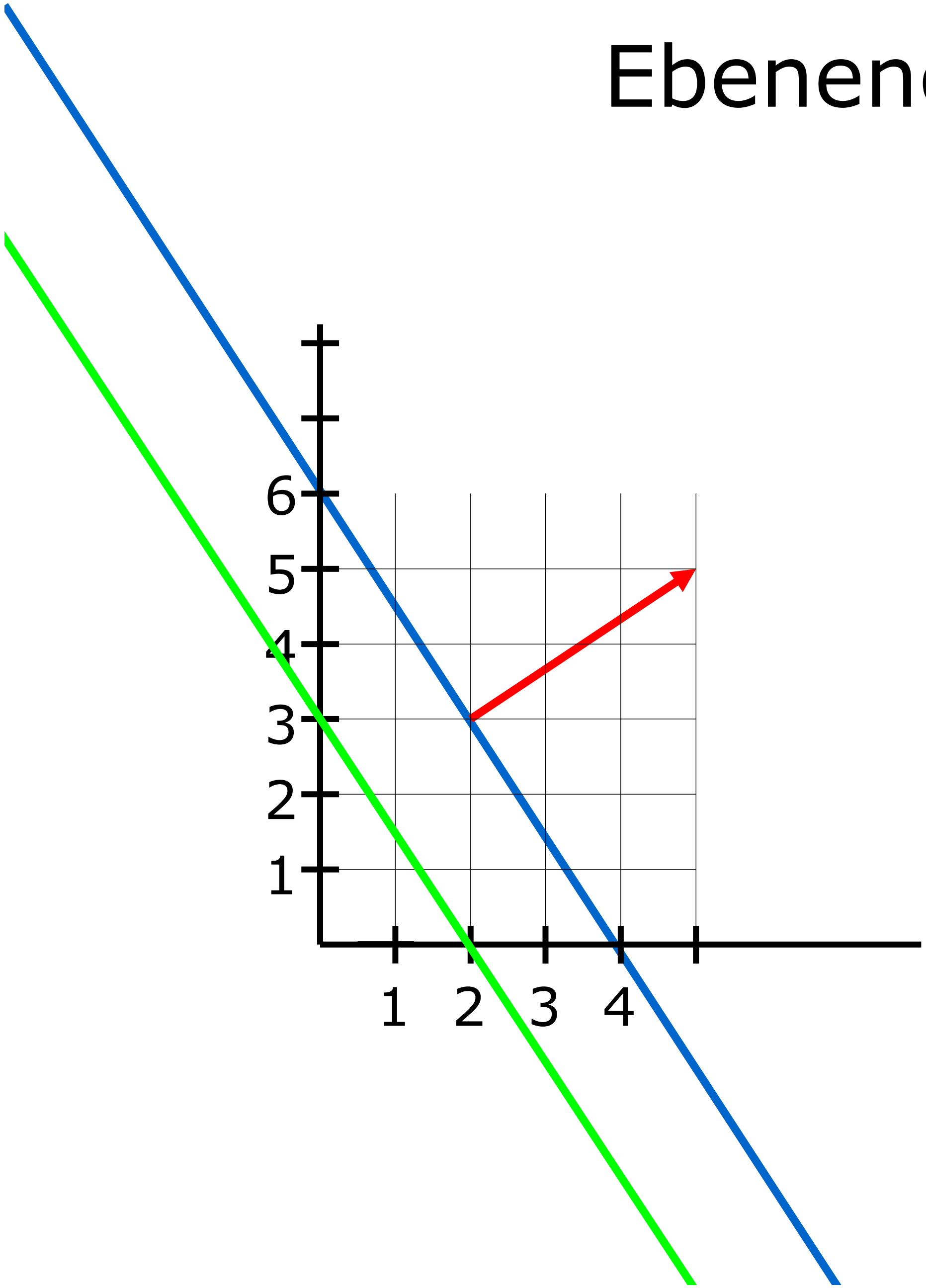
$$3x + 2y - 6 = 0$$

Normalenvektor: $\vec{v} = \left(\begin{array}{c} 3 \\ 2 \end{array} \right)$

$$|\vec{v}| = 3.605$$

normiert: $\vec{v} = \left(\begin{array}{c} 0.832 \\ 0.554 \end{array} \right)$

Ebenengleichung



$$3x + 2y - 12 = 0$$

$$3x + 2y - 12 + 6 = 0$$

$$3x + 2y - 12 + 6z = 0$$

Normalenvektor:

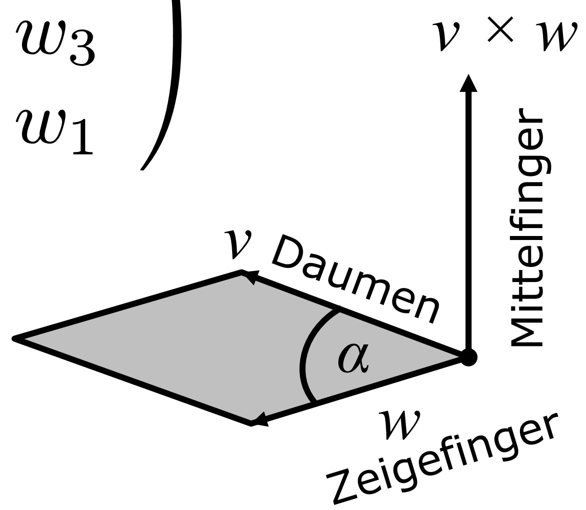
$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Kreuzprodukt

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \qquad \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

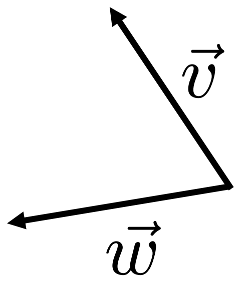
$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} v_2 \cdot w_3 - v_3 \cdot w_2 \\ v_3 \cdot w_1 - v_1 \cdot w_3 \\ v_1 \cdot w_2 - v_2 \cdot w_1 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{v} \times \vec{w}| = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \sin(\alpha)$$



~cg/2014/skript/Applets/CrossProduct/

antikommutativ

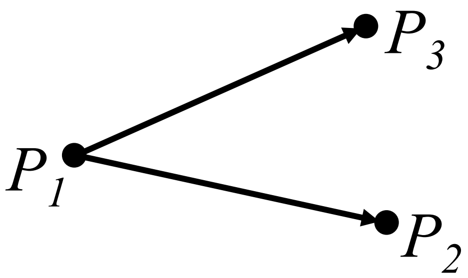


$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} v_2 \cdot w_3 - v_3 \cdot w_2 \\ v_3 \cdot w_1 - v_1 \cdot w_3 \\ v_1 \cdot w_2 - v_2 \cdot w_1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{w} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} w_2 \cdot v_3 - w_3 \cdot v_2 \\ w_3 \cdot v_1 - w_1 \cdot v_3 \\ w_1 \cdot v_2 - w_2 \cdot v_1 \end{pmatrix}$$

$$(\vec{v} \times \vec{w}) \ = \ -(\vec{w} \times \vec{v})$$

Kreuzprodukt und Ebene



$$\overrightarrow{P_2 - P_1} \times \overrightarrow{P_3 - P_1} \qquad \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$$

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

aus Normalenvektor + Punkteinsetzen $\Rightarrow$ ***D***
$\Rightarrow$ Ebenengleichung

aus Ebenengleichung $\Rightarrow$ Normalenvektor

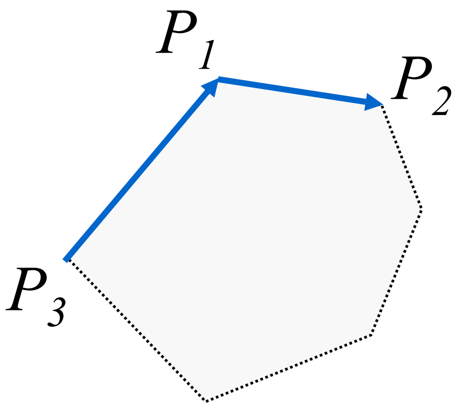
(x, y, z) liegt

...in der Ebene, falls $Ax + By + Cz + D = 0$

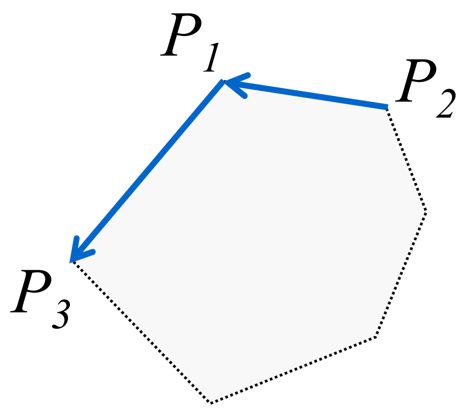
... oberhalb, falls $Ax + By + Cz + D > 0$

... unterhalb, falls $Ax + By + Cz + D < 0$

Kreuzprodukt und Polygon



$$n_{\vec{cw}} = (P_1 \vec{-} P_3) \times (P_2 \vec{-} P_1)$$



$$n_{\vec{ccw}} = (P_1 \vec{-} P_2) \times (P_3 \vec{-} P_1)$$

$$n_{\vec{cw}} = -n_{\vec{ccw}}$$

im konvexen Polygon
gegen Uhrzeiger (aus Sicht des Betrachters):

$\Rightarrow$ Normale zum Betrachter

Beispiel

Ebene gegeben durch 3 Punkte $$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \; P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \; P_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Normalenvektor $$(P_2 \vec{-} P_1) \times (P_3 \vec{-} P_1) \quad = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Länge des Normalenvektors $$\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} \quad = \sqrt{3}$$

Normierter Normalenvektor $$\vec{n_0} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Abstand vom Ursprung $$\vec{a} \cdot \vec{n_0} \quad = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} = 0.5773$$

Determinante

ordnet einer quadratischen Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

eine Zahl zu: $det(A)$ $|A|$

$|A|$ determiniert, ob A invertierbar ist

$\neq 0$

Gleichungssystem

$$a \cdot x = b$$

$$x = b/a$$ falls a ≠ 0

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

$$\vec{x} = \vec{b}/A$$

$$\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$$ falls A invertierbar

Inversion einer Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

gesucht A^{-1} mit $A \cdot A^{-1} = E = A^{-1} \cdot A$

möglich, falls Determinante von $A \neq 0$

Definition der Determinante

$$det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} (sgn(\sigma) \Pi_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)})$$

alle Permutationen

$sgn(\sigma)$ = Vorzeichen der Permutation

+ bei gerader Zahl von Vertauschungen

- bei ungerader Zahl von Vertauschungen

$\Rightarrow$ n! Summanden

Determinante für n=2 und 3

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} + \; a_{11} \cdot a_{22} \\ - \; a_{12} \cdot a_{21} \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} + \; a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \\ - \; a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} \\ - \; a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} \\ + \; a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} \\ + \; a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} \\ - \; a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} \end{array}$$

rekursive Definition der Determinante

für beliebiges i:

Matrix A
ohne Zeile i
ohne Spalte j

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \cdot \underbrace{(-1)^{i+j} \cdot det(U_{i,j}(A))}_{\text{Adjunkte}}$$

Adjunkte A_{ij}

A_{ij} := $(-1)^{i+j}$ · Unterdeterminante bzgl i,j

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & \boxed{a_{23}} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

$$A_{23} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} \begin{aligned} &= -[+a_{11}(a_{32}a_{44} - a_{34}a_{42}) \\ &\quad -a_{12}(a_{31}a_{44} - a_{34}a_{41}) \\ &\quad +a_{14}(a_{31}a_{42} - a_{32}a_{41})] \end{aligned}$$

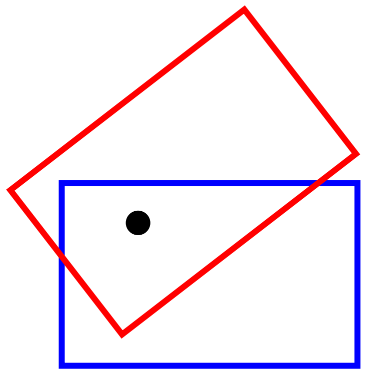
Berechnung der Matrix-Inversion

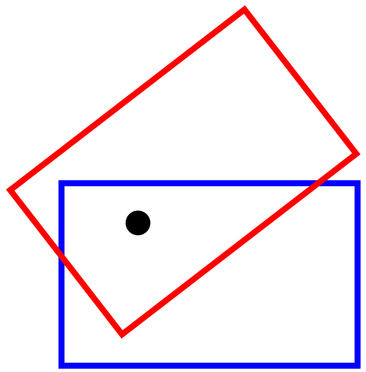
Wähle Zeile i

$$\det(\mathrm{A}) = \sum_{k=1}^{4} a_{ik} A_{ik}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & A_{41} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & A_{42} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{43} \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} \end{pmatrix}$$

Koordinatensysteme





Gegeben: blaues + rotes Koordinatensystem

Gegeben:
P beschrieben in Blau

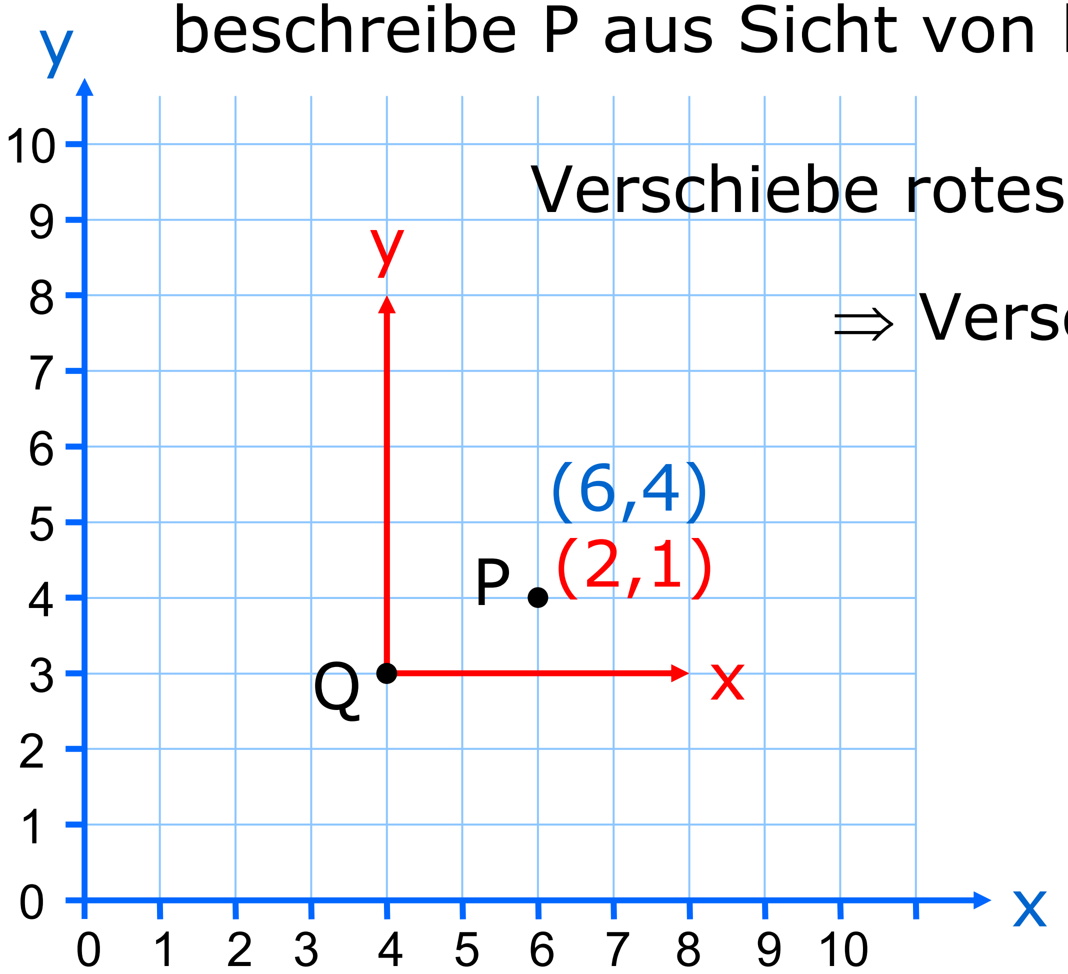
Gesucht:
P beschrieben in Rot

Gegeben:
P beschrieben in Rot

Gesucht:
P beschrieben in Blau

Koordinatensystemwechsel, die 1.

beschreibe P aus Sicht von blau



Verschiebe rotes System um -Q

$\Rightarrow$ Verschiebe P um +Q

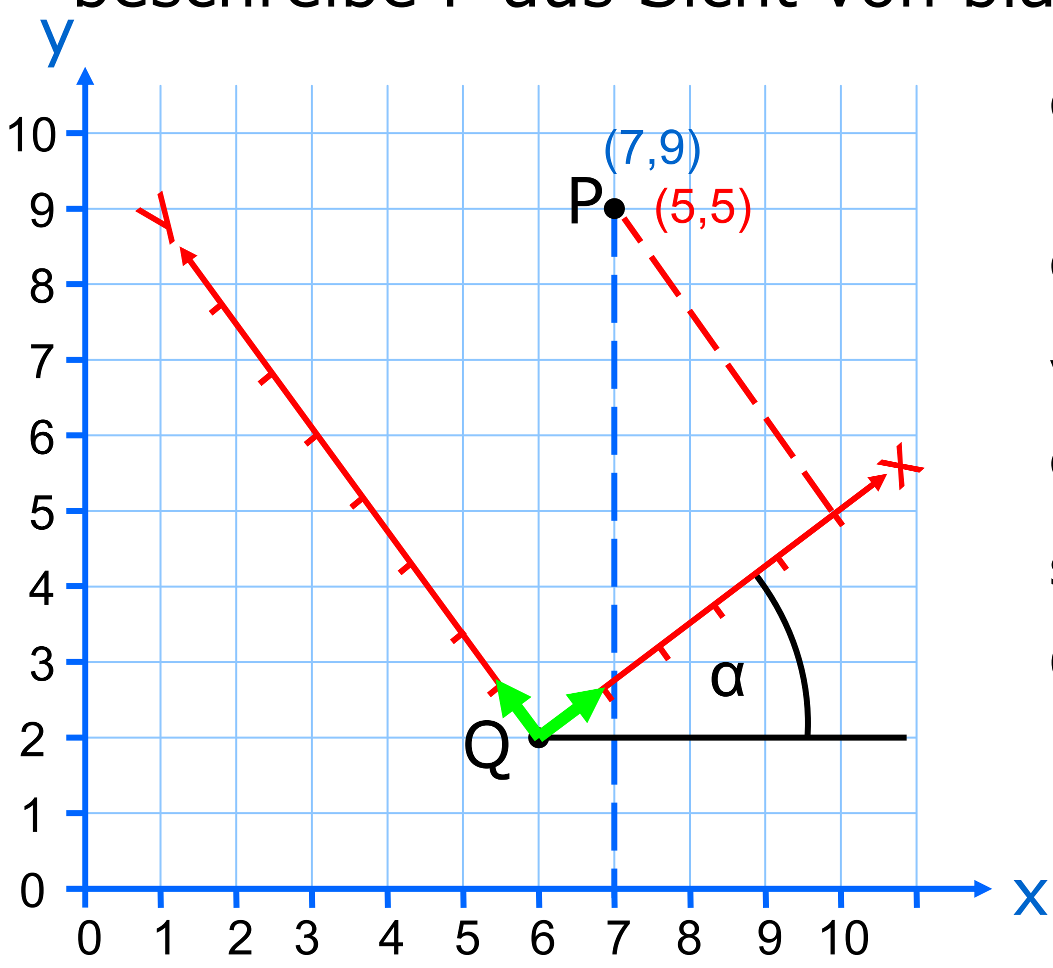
Q = (4,3)

2+4= 6

1+3= 4

Koordinatensystemwechsel, die 2.

beschreibe P aus Sicht von blau



drehe rotes System
um α nach rechts ⇒

drehe P um α nach links

verschiebe um Q

cos(α)=4/5=0.8

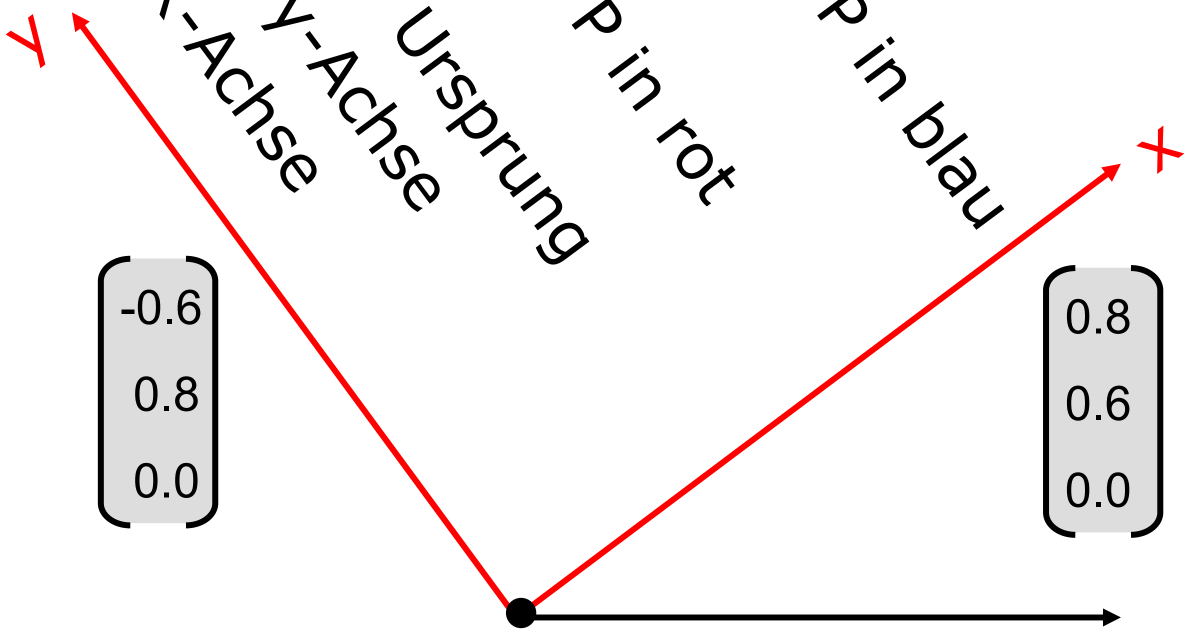
sin(α)=3/5=0.6

Q = (6,2)

$$\begin{pmatrix} 0.8 & -0.6 & 6.0 \\ 0.6 & 0.8 & 2.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{pmatrix}$$

Koordinatensystemwechsel, die 3.

$$
\begin{array}{ccccccc}
M_{B\to A} & \begin{pmatrix} 0.8 & -0.6 & 6.0 \\ 0.6 & 0.8 & 2.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{pmatrix} & \cdot & \begin{pmatrix} 5.0 \\ 5.0 \\ 1.0 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 7.0 \\ 9.0 \\ 1.0 \end{pmatrix} \\
 & \begin{array}{ccc} \text{x-Achse} & \text{y-Achse} & \text{Ursprung} \end{array} & & \text{P in rot} & & \text{P in blau}
\end{array}
$$



Koordinatensystemwechsel, die 4.

$$M_{\mathcal{B}\rightarrow\mathcal{A}} \quad \cdot \quad \vec{p}_{\mathcal{B}} \;=\; \vec{p}_{\mathcal{A}}$$

$$\begin{pmatrix} X_x^A & Y_x^A & Z_x^A & Q_x^A \\ X_y^A & Y_y^A & Z_y^A & Q_y^A \\ X_z^A & Y_z^A & Z_z^A & Q_z^A \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_x^B \\ p_y^B \\ p_z^B \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x^A \\ p_y^A \\ p_z^A \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\text{x-Achse von B} \quad \text{y-Achse von B} \quad \text{z-Achse von B} \quad \text{Ursprung von B}}_{\text{Beschrieben im Koordinatensystem von A}}$$

Koordinatensystemwechsel, die 5.

Gegeben Punkt P_A, beschrieben in A

Gesucht Punkt P_B, beschrieben in B

$$M_{\mathcal{B}\rightarrow\mathcal{A}} \cdot \vec{p}_{\mathcal{B}} = \vec{p}_{\mathcal{A}}$$

$$\vec{p}_{\mathcal{B}} = M^{-1}_{\mathcal{B}\rightarrow\mathcal{A}} \cdot \vec{p}_{\mathcal{A}}$$

Multipliziere P_A mit der Inversen von $M_{B\rightarrow A}$