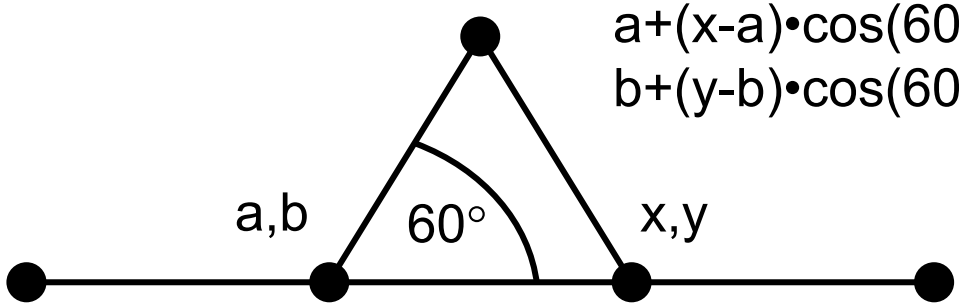
Computergrafik SS 2016
Oliver Vornberger

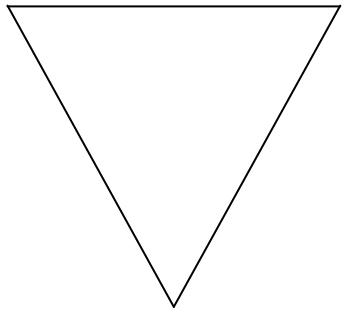
Kapitel 11:
Fraktale

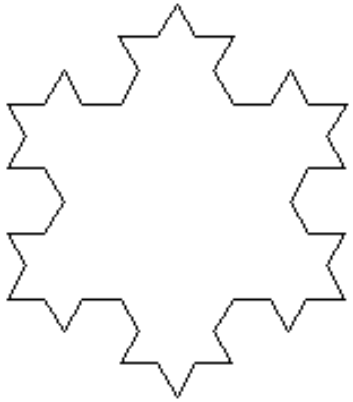
Selbstähnlichkeit

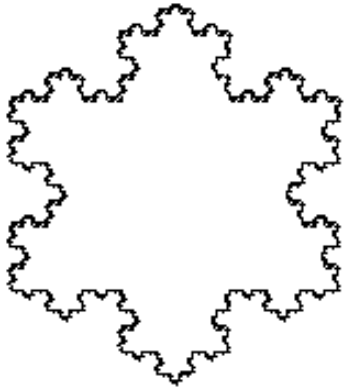
Koch'sche Schneeflocke



$$a+(x-a)\cdot\cos(60°) - (y-b)\cdot\sin(60°)$$
$$b+(y-b)\cdot\cos(60°) + (x-a)\cdot\sin(60°)$$







Fraktale Dimension

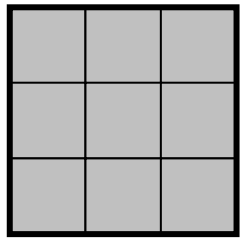
Ein selbstähnliches Objekt hat Dimension D, falls es in N identische Kopien zerfällt, skaliert mit dem Faktor $r = \frac{1}{N^{\frac{1}{D}}}$

Linie hat Dimension 1

N Teilstücke der Länge 1/N

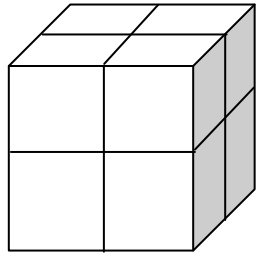
Fläche hat Dimension 2

N Teilflächen mit Kantenlänge $\frac{1}{N^{\frac{1}{2}}}$



Würfel hat Dimension 3

N Teilwürfel mit Kantenlänge $\frac{1}{N^{\frac{1}{3}}}$



Berechnung der Dimension

$$r = \frac{1}{N^{\frac{1}{D}}} \qquad \Rightarrow r \cdot N^{\frac{1}{D}} = 1$$

$$\Rightarrow N^{\frac{1}{D}} = \frac{1}{r} \qquad \Rightarrow \frac{1}{D} \cdot \log(N) = \log(\frac{1}{r})$$

$$\Rightarrow D = \frac{\log(N)}{\log(\frac{1}{r})}$$

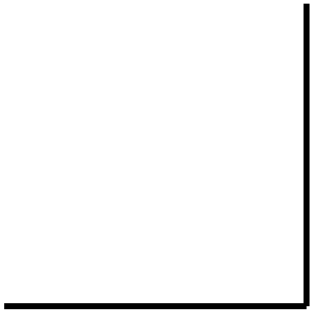
Jede Kante der Koch'schen Schneeflocke zerfällt in N=4 Kopien, skaliert mit r=1/3.

$$D = \frac{\log(4)}{\log(3)} = 1.2618$$

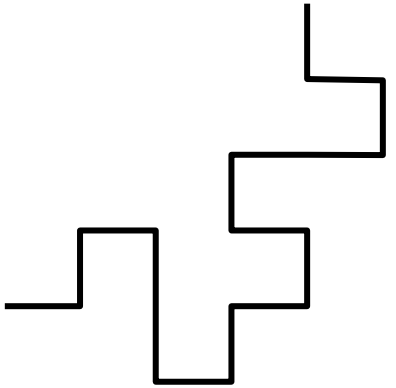
Lindenmayer-Systeme

Alphabet Σ = {**r,u,l,d**}

Regeln f = { **r** $\rightarrow$ **rurddrur**,
u $\rightarrow$ **ulurrulu**,
l $\rightarrow$ **ldluuldl**,
d $\rightarrow$ **drdlldrd**}



ru

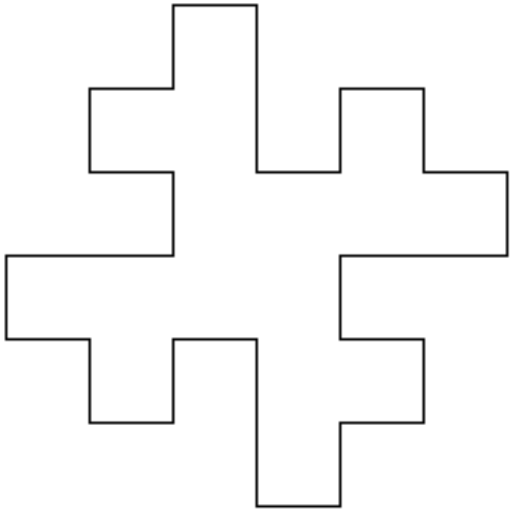


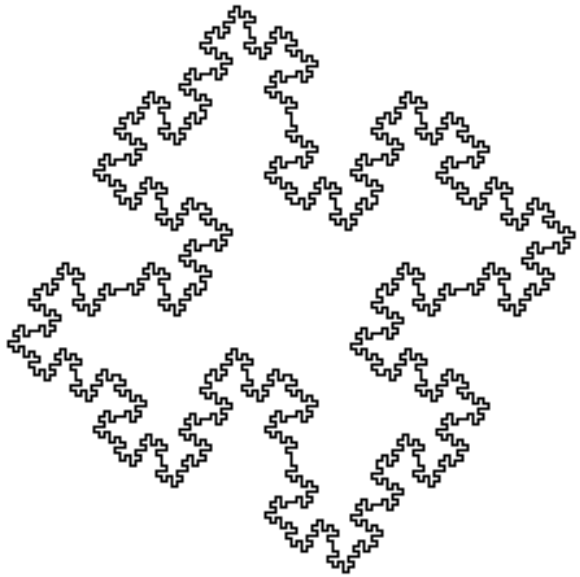
rurddrurulurrulu

Quadratische Koch-Kurve

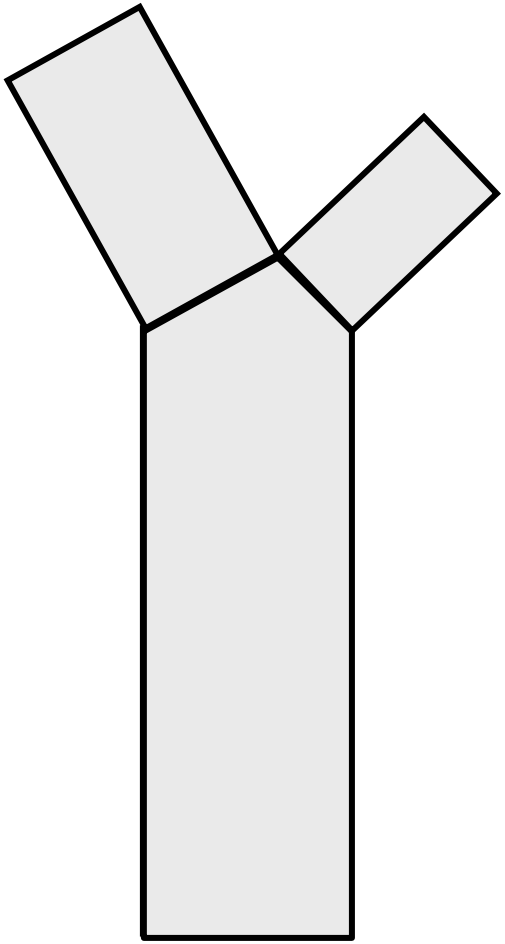
Jeder Kantenzug besteht aus 8 Kopien,
skaliert mit Faktor 1/4

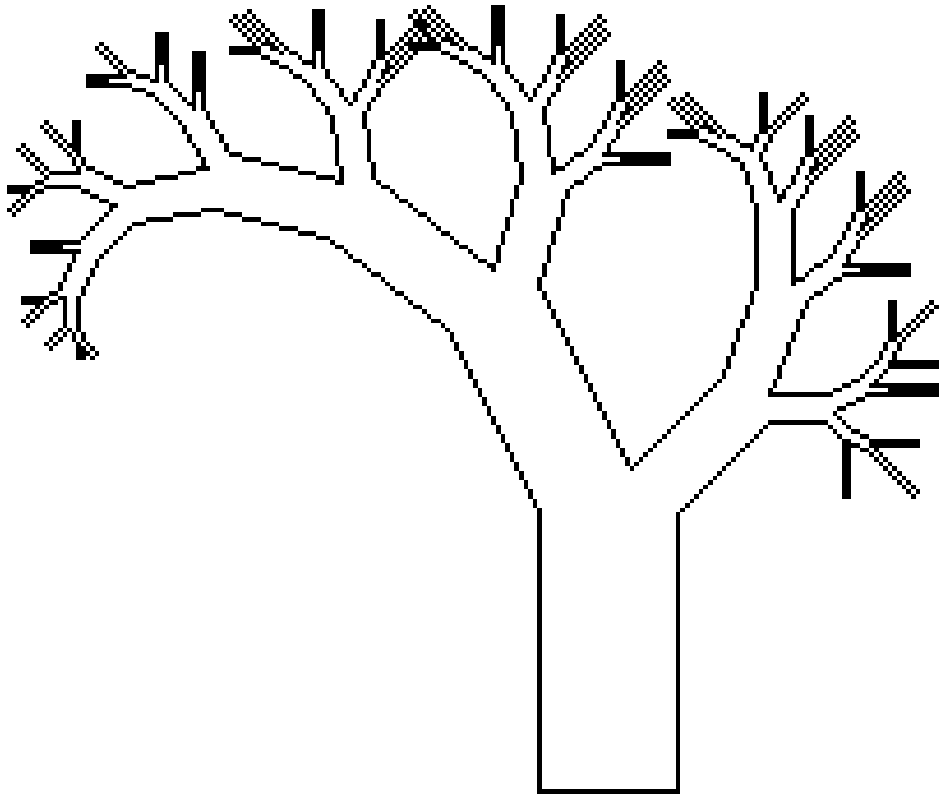
$$D = \frac{\log(8)}{\log(4)} = 1.5$$





Bäume





Implementationen zu Lindenmayer

~cg/2016/skript/Applets/Fraktale2/App.html

~cg/2016/Flash/recursiontree.html

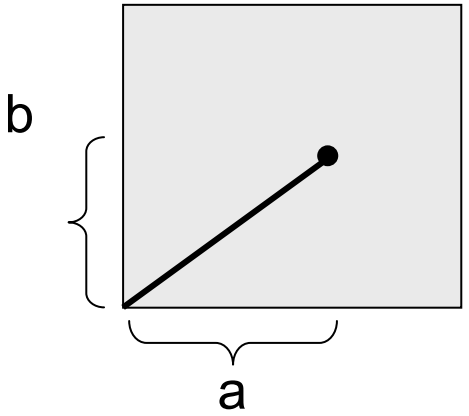
Komplexe Zahlen

Komplexe Zahl $z = a + bi$ $\qquad i^2 = -1$

Realteil a

Imaginärteil b

Betrag von $z = \sqrt{a^2 + b^2}$



Quadrieren einer komplexen Zahl:

$z^2 = (a + bi)\cdot(a + bi) = a^2 + 2abi + b^2i^2$

$\Rightarrow$ Realteil a^2-b^2

$\Rightarrow$ Imaginärteil $2ab$

Iteration

Sei c komplexe Zahl

Sei $f(z) := z^2 + c$

Betrachte 0, $f(0)$, $f^2(0)$, $f^3(0)$, ...

-1.5	0.2	-0.5	0.2
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
-1.500000	0.200000	-0.500000	0.200000
0.710000	-0.400000	-0.290000	0.000000
-1.155900	-0.368000	-0.415900	0.200000
-0.299319	1.050742	-0.367027	0.033640
-2.514467	-0.429014	-0.366422	0.175306
4.638493	2.357487	-0.396466	0.071527
14.457877	22.070379	-0.347930	0.143283
-279.571438	638.381719	-0.399474	0.100294

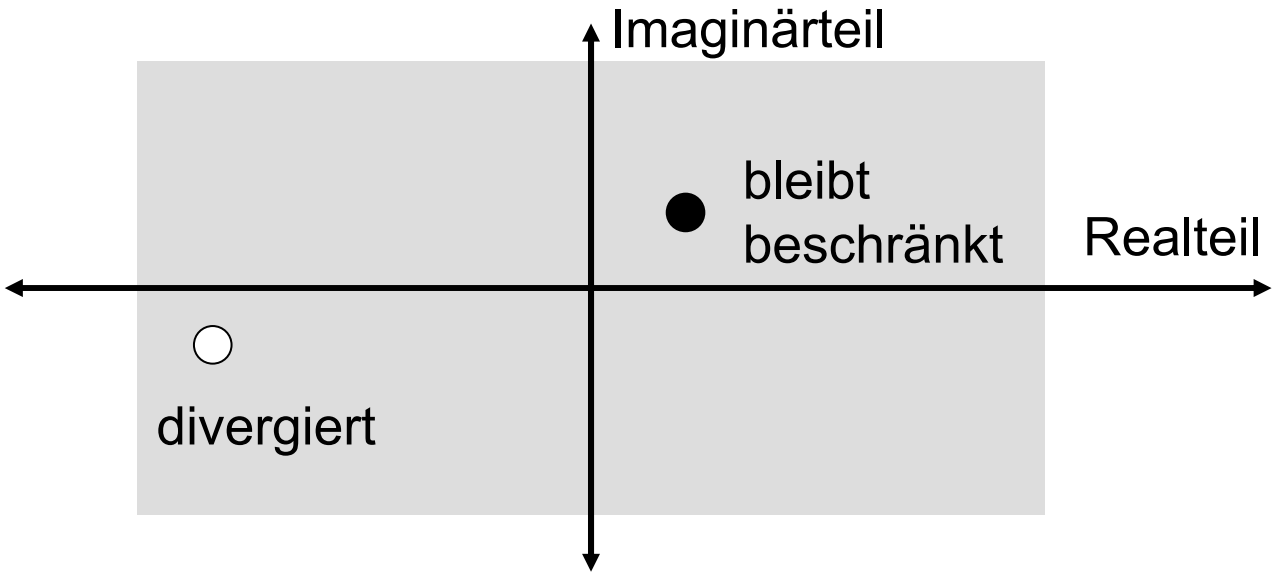
Mandelbrotmenge

Die zu c gehörende Folge kann ...

- zu einem festen Wert konvergieren
- einen (beschränkten) Zyklus durchlaufen
- sich (beschränkt) chaotisch verhalten
- gegen unendlich streben

Die Menge der komplexen Zahlen c, die bei Startwert z=0 zu einer beschränkten Folge führen, heißt **Mandelbrotmenge**.

Visualisierung der Mandelbrotmenge



Implementation

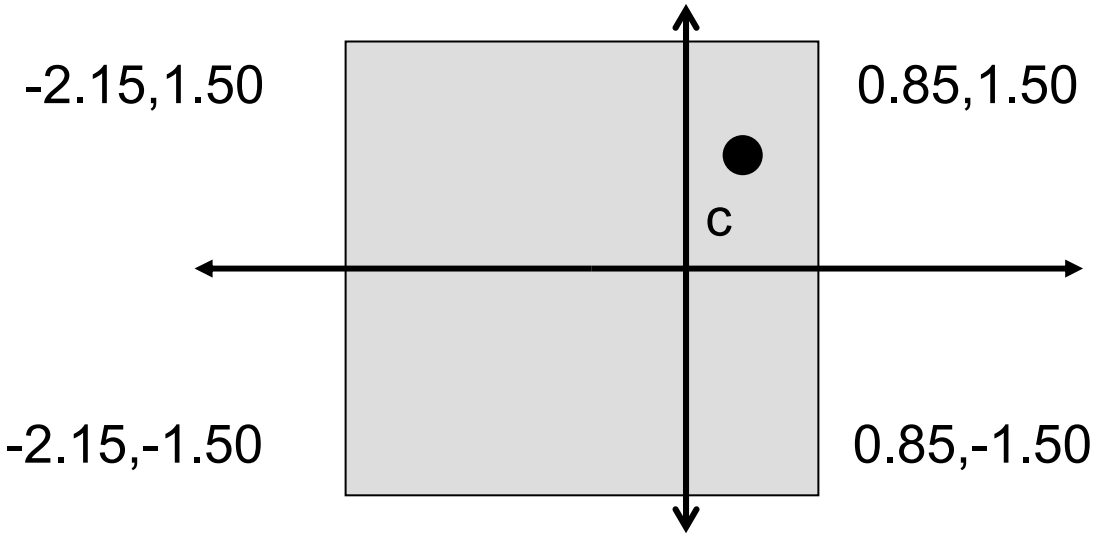
```
public Complex f(Complex z, Complex c){
  double re, im;
  re = z.re*z.re - z.im*z.im + c.re;
  im = 2*z.re*z.im+c.im;
  return new Complex(re,im);
}

int iter = 0;
Complex z = new Complex(0,0);
while (betrag(z) < 2 && iter < 100) {
  z = f(z,c);
  iter++;
}
```

betrag $\geq$ **2**: divergiert mit Sicherheit

iter $\geq$ **100**: bleibt vermutlich beschränkt

Visualisierung



bei 300 Pixeln $\Rightarrow$ Schrittweite = (0.85+2.15)/300 = 0.01

Mandelbrot-Programmcode

```
// fasse jedes Pixel als Punkt auf, beginne bei 0,
// iteriere z*z + c, schwaerze bei Beschraenktheit
Point p;
double schritt = (ende.re-start.re)/WIDTH;

for (p.x=0, c.re=start.re; p.x < WIDTH;
     p.x++, c.re+=schritt)
for (p.y=0; c.im=start.im; p.y < HEIGHT;
     p.y++, c.im+=schritt){
  Complex z = new Complex(0,0);
  int iter=0;
  while((betrag(z)<2.0) && (iter<100)){
    z = f(z,c);
    iter++;
  }
if (betrag(z) < 2.0) setPixel(p);
```

S/W-Mandelbrotmenge

$$\text{farbe}(c) := \begin{cases} \text{weiß, sobald Betrag} > 2 \\ \text{schwarz, falls Betrag} \\ \text{nach 100 Iterationen} < 2 \end{cases}$$

$$\text{farbe}(c) := \begin{cases} \text{iter\%2, sobald Betrag} > 2 \\ \text{schwarz, falls Betrag} \\ \text{nach 100 Iterationen} < 2 \end{cases}$$

bei mehr Iterationen wird schwarze Fläche weiß

Farbige Mandelbrotmenge

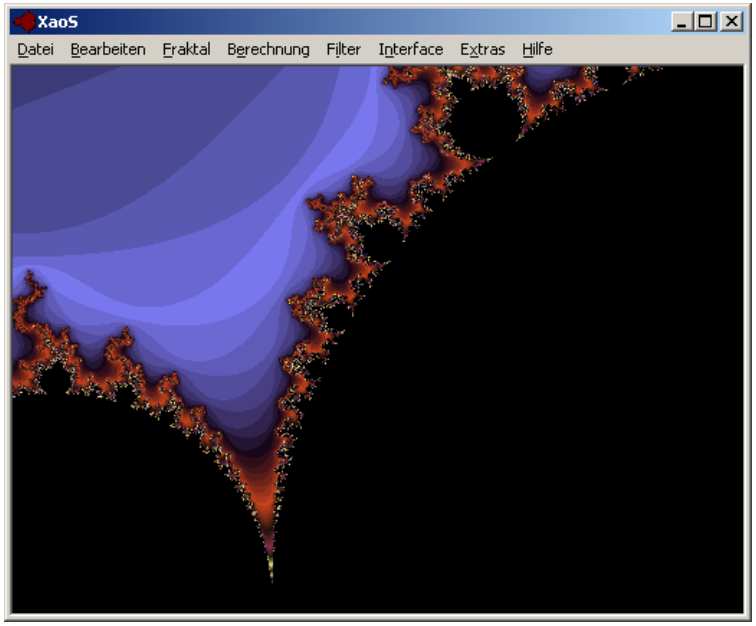
Es seien k Farben verfügbar:
col[0], col[1], …, col[k-1]

$$\text{farbe}(c) := \begin{cases} \text{col}[\text{iter}\,\%\,k], & \\ \text{sobald Betrag} > 2 & \\ \text{schwarz, falls Betrag} & \\ \text{nach 100 Iterationen} < 2 & \end{cases}$$

bei mehr Iterationen wird schwarze Fläche bunt

Java-Applet zur Mandelbrotmenge

~cg/2016/skript/Applets/Fraktale2/App.html



XaoS von Jan Hubicka

http://matek.hu/xaos/doku.php

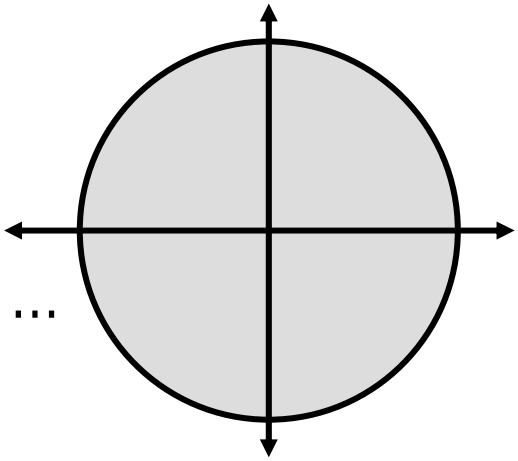
→IFS

Invarianz bzgl. Funktion

Sei $f(z) = z^2$

Wähle Startwert z_0

Betrachte $f(z_0)$, $f(z_0)^2$, $f(z_0)^3$, ...



$|z_0| > 1$ Sequenz divergiert

$|z_0| < 1$ Sequenz konvergiert gegen 0

$|z_0| = 1$ Sequenz bleibt auf Einheitskreis

Menge der Kreispunkte ist invariant bzgl. f

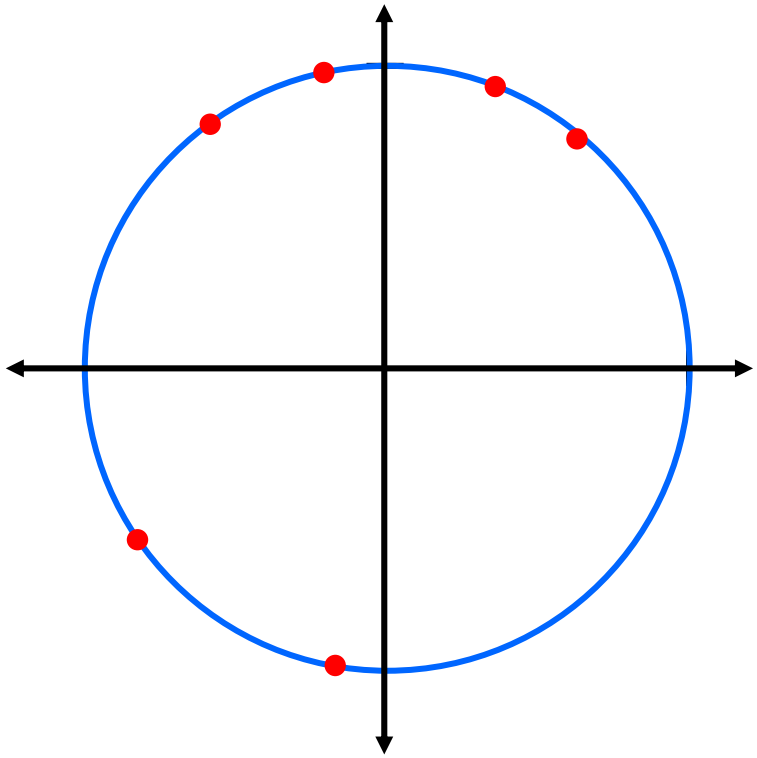
Julia-Menge

Sei c eine komplexe Zahl

Sei $f(z) = z^2+c$

Die bzgl. f invarianten Punkte bilden die Julia-Menge für c

Julia-Menge für c=0



```
 0.60000   0.80000
-0.28000   0.96000
-0.84320  -0.53760
 0.42197   0.90660
-0.64387   0.76512
-0.17084  -0.98529
...
...
```

$a^2 - b^2 \quad 2 \cdot a \cdot b$

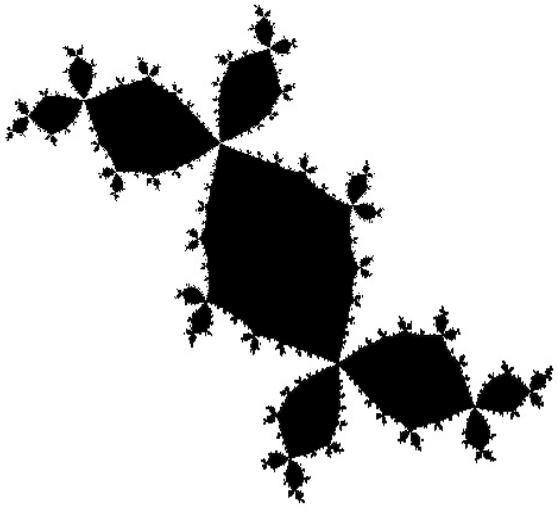
→IFS

Julia-Menge, die 1.

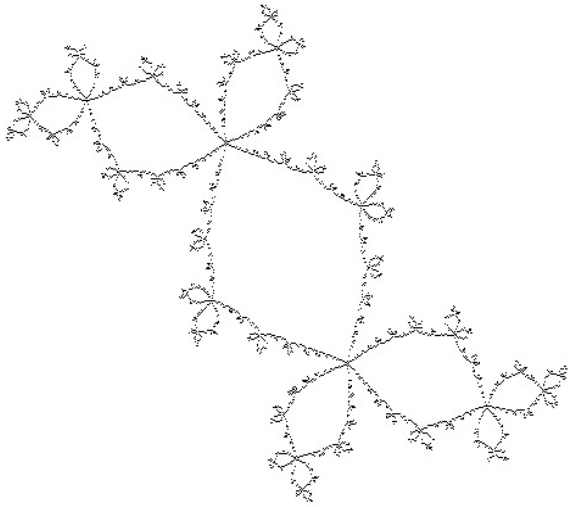
```
// betrachte jedes Pixel als Startwert
// iteriere z*z+c und schwaerze bei Beschraenktheit
Point p;
double schritt = (ende.re-start.re)/WIDTH;
for (p.x=0; p.x < WIDTH;  p.x++)
for (p.y=0; p.y < HEIGHT; p.y++){
  Complex z = new Complex(p, start, schritt);
  int iter=0;
  while((betrag(z)<2.0) && (iter<100)){
    z = f(z,c);
    iter++;
  }
if (betrag(z) < 2.0) setPixel(p);
```

Der Rand des berechneten Gebiets ist die Julia-Menge

Beispiel für Julia-Menge



Konvergenzgebiet



Rand

Rückwärts statt vorwärts

$r := r^2$

0.5000	1.0000	1.500
0.2500	1.0000	2.250
0.0625	1.0000	5.062
0.0039	1.0000	25.629
0.0001	1.0000	656.849
…	…	…

$r := \sqrt{r}$

0.8000	1.2000
0.8944	1.0954
0.9457	1.0466
0.9724	1.0230
0.9861	1.0114
…	…

Julia-Menge, die 2.

$$f(z) = z^2 + c \Rightarrow f^{-1}(z) = \pm\sqrt{z - c}$$

Sei $z = a + b \cdot i$

$$\sqrt{z} = \begin{cases} \sqrt{\frac{|z|+a}{2}} + i \cdot \sqrt{\frac{|z|-a}{2}} \; falls \; \mathrm{b} \; \geq 0 \\ \sqrt{\frac{|z|+a}{2}} - i \cdot \sqrt{\frac{|z|-a}{2}} \; falls \; \mathrm{b} \; \leq 0 \end{cases}$$

Julia-Menge, die 2.

```
Complex backward_random{Komplex z, Komplex c){
  // berechne r = Wurzel aus z-c
  // wuerfel Vorzeichen fuer r
  return r
}

Complex z = new Complex(1.0,0.0);
for (k=0; k<50; k++) z = backward_random(z,c);

for (k=0; k<10000; k++){
  z = backward_random(z,c);
  p.x = (int)(z.re-z.start.re)/schritt;
  p.y = (int)(z.im-z.start.im)/schritt;
  setPixel(p);
}
```

Java-Applet zur Julia-Menge

~cg/2016/skript/Applets/Fraktale2/App.html

Iterierte Funktionensysteme

Beschreibe den Bildinhalt durch System von affinen Transformationen

Pro Transformation:

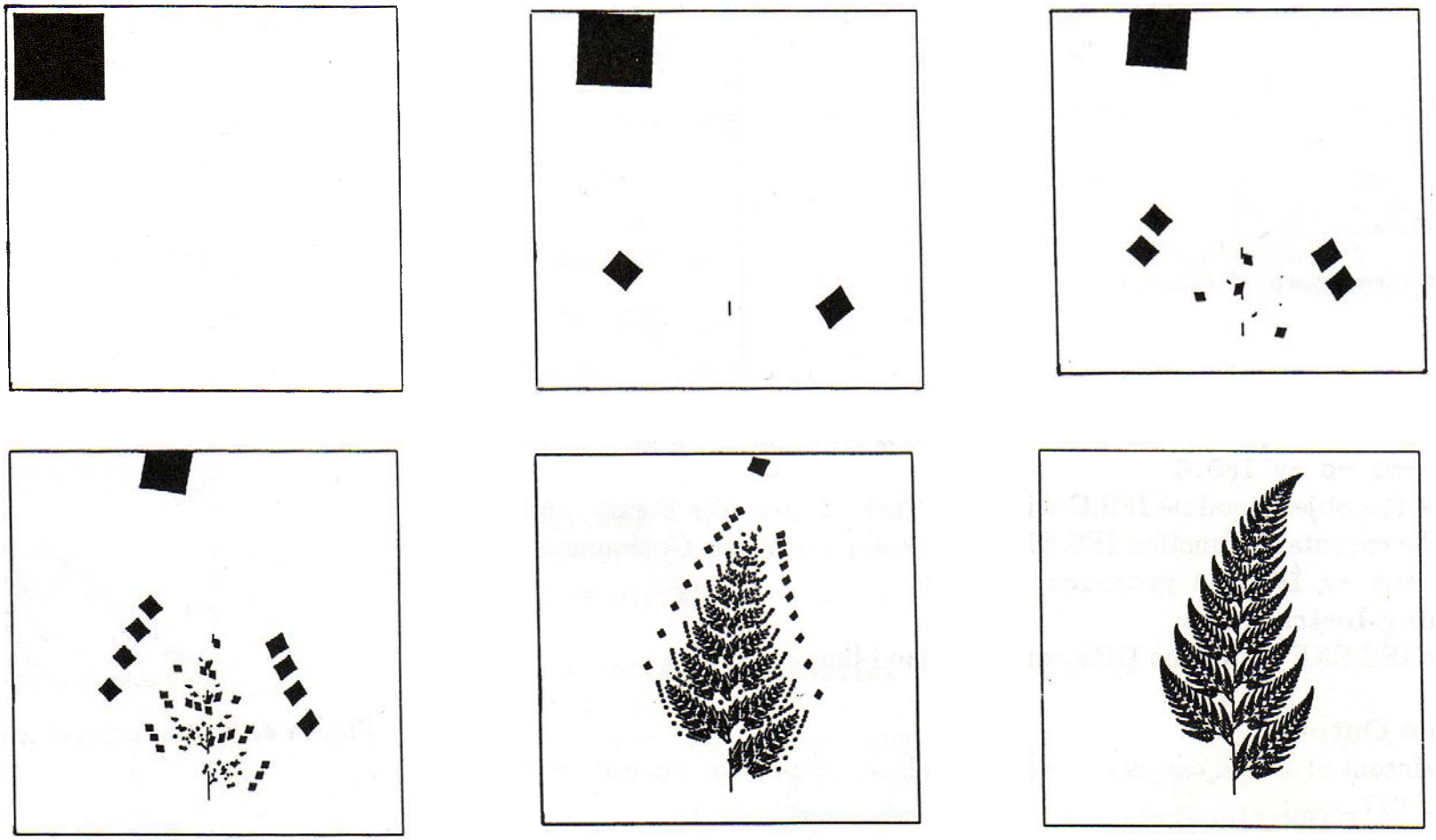
- 2×2 Matrix A
- 2×1 Vektor b
- Anwendungswahrscheinlichkeit w

Bilde $Ax+b$ mit Wahrscheinlichkeit w

Matritzen für Farn

	A	b	w
r_1	$\begin{pmatrix} 0.85 & 0.04 \\ -0.04 & 0.85 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.0 \\ 1.6 \end{pmatrix}$	85 %
r_2	$\begin{pmatrix} 0.20 & -0.26 \\ 0.23 & 0.22 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.0 \\ 1.6 \end{pmatrix}$	7 %
r_3	$\begin{pmatrix} -0.15 & 0.28 \\ 0.26 & 0.24 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.0 \\ 0.44 \end{pmatrix}$	7 %
r_4	$\begin{pmatrix} 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.16 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.0 \\ 0.0 \end{pmatrix}$	1 %

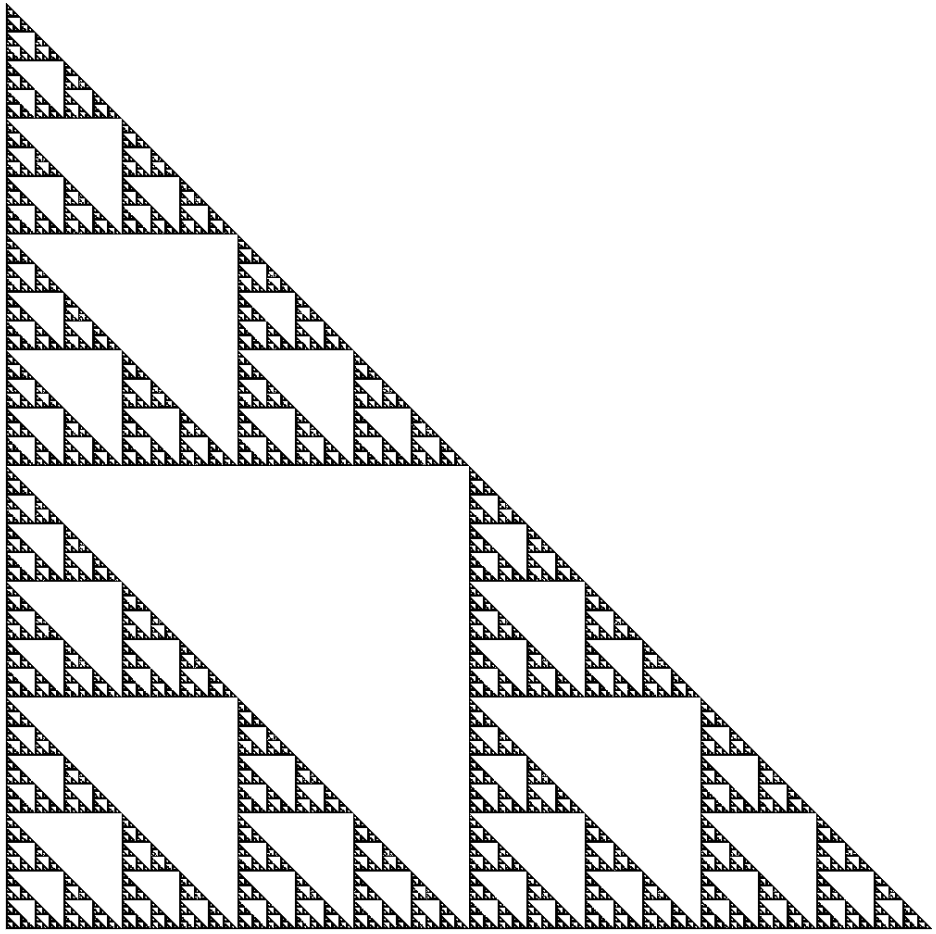
Konvergenzfolge für Farn



Farn-Algorithmus

```
Wähle Startpixel p in Zeichenfläche
while(noch_nicht_zufrieden) {
    wähle Transformation f gemäß w
    p= f(p);
    setPixel(p);
}
```

Sierpinsky-Dreieck

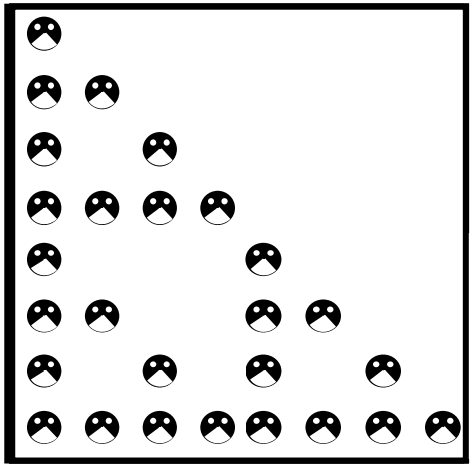


D_1	
D_2	D_3

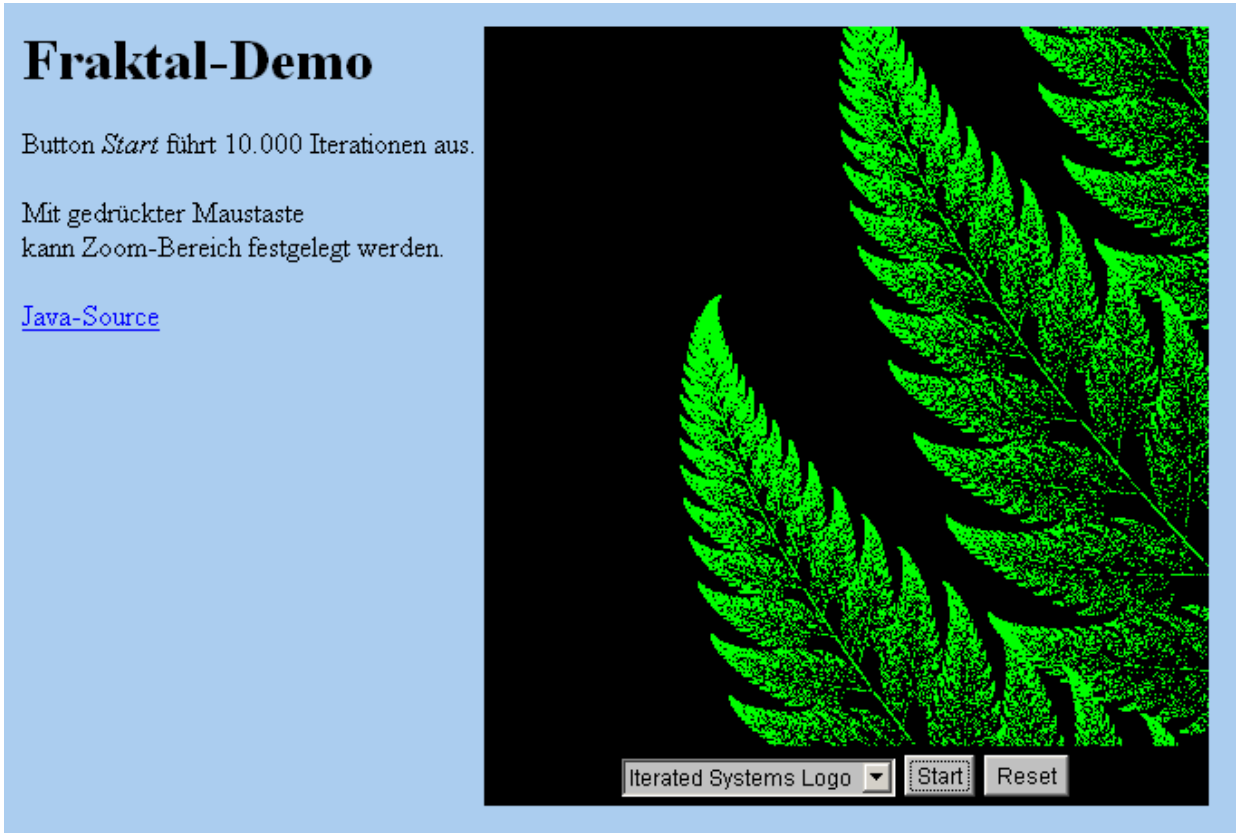
D enthält sich
3mal verkleinert.

Algorithmus für Sierpinsky

D := Rechteck mit zufälligem Inhalt
while (noch_nicht_zufrieden) do {
  D' := mit Faktor ¼ verkleinerte Version von D
  kopiere D' in den 2., 3., 4. Quadranden von D
}



Java-Applet
zu Iterierten Funktionensystemen



~cg/2016/skript/Applets/IFS/fraktal.html

Fraktale Kompression

fixiere 8 Transformationen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
Identität

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
90° Drehung

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
180° Drehung

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
270° Drehung

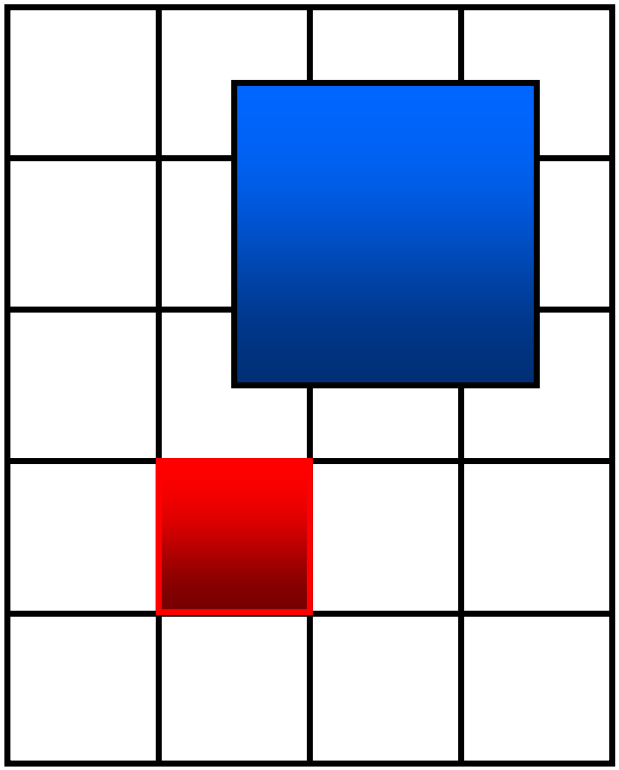
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
Spiegelung an x

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
Spiegelung an y

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
Spiegelung an Diagonalen

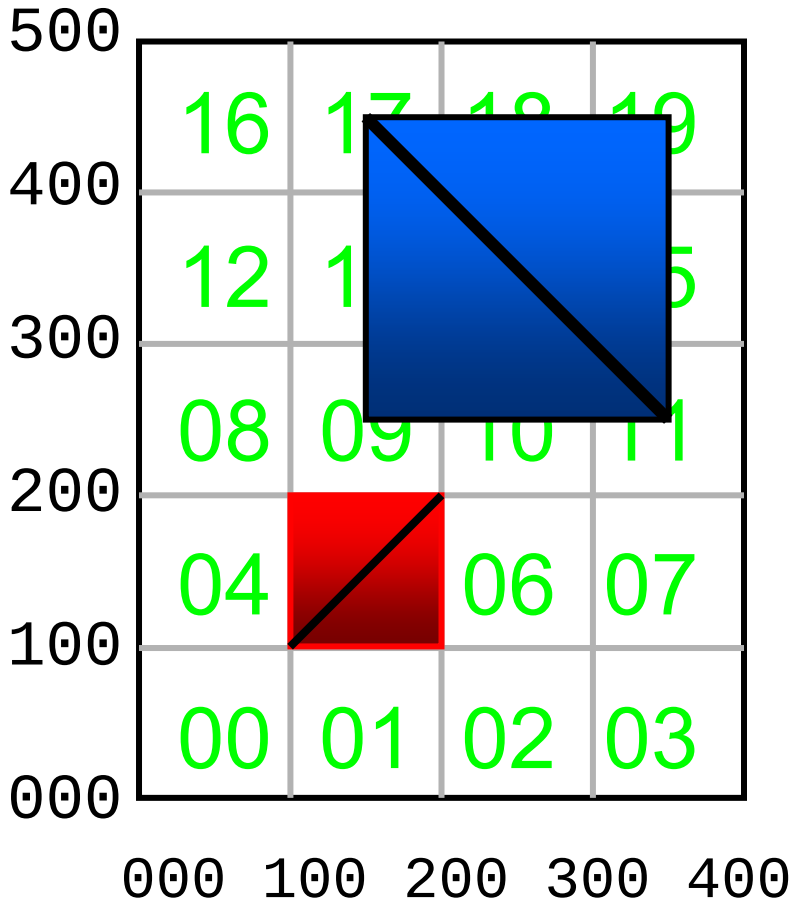
$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
Spiegelung an anderer Diagonalen

pro Ziel-Block suche bestes Urbild



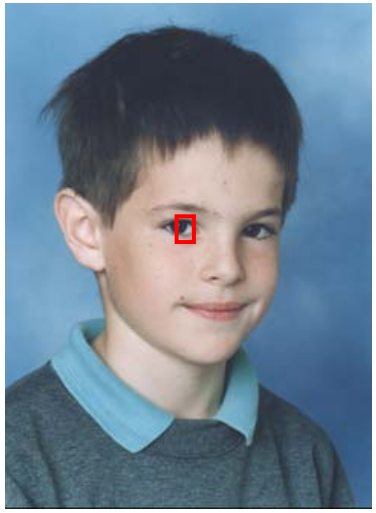
Liste der Abbildungen

Typ	Ursprung	Ziel
1	150,250	5
...		

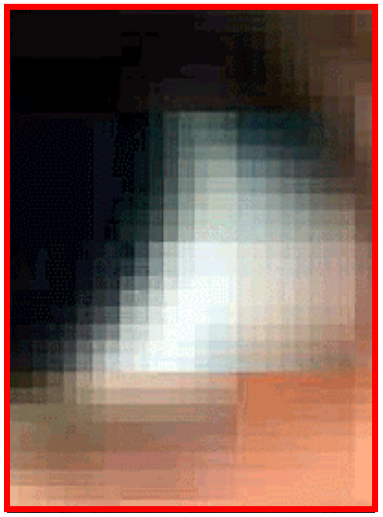


Iterated Systems

(Lizenz über LizardTech jetzt bei onOne Software)



jan.tif



Ausschnitt aus

jan.jpg

Ausschnitt aus

jan.fif