Klausuraufgaben

1. Wir betrachten die folgende Sprache über dem Alphabet $\{a, b\}$

$$L = \{a^n b^m \mid n > 0, m > 0, n \neq m\}$$

   a) Ist L kontextfrei? Wenn ja, geben Sie eine kontextfreie Grammatik für L an. Wenn nein, beweisen Sie dies.

   b) Ist L regulär? Wenn ja, geben Sie einen regulären Ausdruck für L an. Wenn nein, beweisen Sie dies.

2. Determinismus versus Indeterminismus:

   a) Wie zeigt man, dass endliche Automaten und indeterministische endliche Automaten gleich leistungsstark sind?

   b) Wie zeigt man, dass Kellerautomaten und deterministische Kellerautomaten nicht gleich leistungsstark sind?

3. Wir betrachten die kontextfreie Grammatik mit den folgenden Produktionen:

   $S \to AB$, $A \to CB$, $B \to AD$, $C \to DD$, $D \to BA$,
   $A \to a$, $B \to b$, $C \to c$, $D \to d$

   Stellen Sie mit dem Cook-Younger-Kasami-Algorithmus fest, welches der beiden Wörter aaada und aadaa aus S ableitbar ist.

4. Wir betrachten die folgenden vier Probleme:

   A = $\emptyset$
   B = Menge aller Zweierpotenzen (dezimal notiert)
   C = Cliquenproblem
   D = Halteproblem für RAM's

   Für je zwei dieser Probleme L und M sollen Sie angeben, ob L auf M polynomiell reduzierbar ist. Mögliche Antworten sind dabei:

   JA (falls L $\leq_{pol}$ M)
   NEIN (falls nicht L $\leq_{pol}$ M)
   ? (falls die Antwort bislang nicht bekannt ist)

5. Konstruieren Sie eine RAM, welche bei Eingabe von n Zahlen $x_1, ..., x_n$ testet, ob die erste und die letzte Zahl in der Liste von Zahlen identisch sind. Ist dies der Fall, soll im Akkumulator die Zahl 1, ansonsten die Zahl 0 erzeugt werden.

6. a) Definiert jeder reguläre Ausdruck ohne $*$ eine endliche Sprache? (Beweis oder Gegenbeispiel angeben)
   b) Definiert jeder reguläre Ausdrck mit $*$ eine unendliche Sprache? (Beweis oder Gegenbeispiel angeben)

7. Wenn ein NP-vollständiges Problem polynomiell lösbar ist, dann folgt

daraus P = NP. Beweisen Sie diese Aussage.

8. Angenommen, wir hätten einen Algorithmus der Laufzeit O(t(n)), der von ungerichteten Graphen feststellen kann, ob sie einen Hamiltonpfad enthalten. Wie kann man daraus einen Algorithmus bauen, der zu ungerichteten Graphen mit Hamiltonkreis auch tatsächlich einen Hamiltonkreis konstruiert. Die Laufzeit darf sich dabei nicht wesentlich verschlechtern.

9. Geben Sie eine kontextfreie Grammatik an, die nicht eindeutig ist.

10. Machen Sie die folgende kontextfreie Grammatik ϵ-frei:

$$
\begin{aligned}
&S \rightarrow ABC \\
&A \rightarrow AaA \\
&A \rightarrow BC \\
&A \rightarrow aa \\
&B \rightarrow CCC \\
&C \rightarrow Cc \\
&C \rightarrow dcd \\
&C \rightarrow \epsilon
\end{aligned}
$$

11. Wir betrachten die folgende Sprache über dem Alphabet $\{0, 1\}$:

$$L = \{x1y \mid x, y \in \{0,1\}^* \wedge |x| = |y|\}$$

a) Ist L kontextfrei? Wenn ja, geben Sie eine kontextfreie Grammatik an. Wenn nein, begründen Sie dies.

b) Ist L regulär? Wenn ja, geben Sie einen regulären Ausdruck oder einen endlichen Automaten an. Wenn nein, begründen Sie dies.

12. Wir betrachten die folgende Sprache über dem Alphabet $\{0, 1\}$:

$$L = \{xby \mid x, y \in \{0,1\}^* \wedge |x| = |y| \wedge b \in \{0,1\}\}$$

a) Ist L kontextfrei? Wenn ja, geben Sie eine kontextfreie Grammatik an. Wenn nein, begründen Sie dies.

b) Ist L regulär? Wenn ja, geben Sie einen regulären Ausdruck oder einen endlichen Automaten an. Wenn nein, begründen Sie dies.

13. Wir betrachten folgende Grammatik G:

$$G = (\{S\}, \{a, b\}, \Pi, S)$$

mit der Regelmenge $\Pi = S \rightarrow aSa \mid bSb \mid SS \mid \epsilon$

a) Erzeugt diese Grammatik die Sprache aller Palindrome über dem Alphabet $\{a, b\}$? Wenn ja, begründen Sie dies. Wenn nein, geben Sie entweder ein Palindrom an, welches von G nicht erzeugt werden kann, oder ein Wort, das erzeugt werden kann, obwohl es kein Palindrom ist.

b) Vervollständigen Sie den folgenden LL-Automat, der die von G erzeugte Sprache erkennt.

$$
\begin{aligned}
A_{LL}(G) = (Q, N, T, \Pi, Sq, \{q\}) & \\
Q = \{q\} \quad & \textit{(Zustandsmenge)} \\
N = \{a, b, S\} \quad & \textit{(Kelleralphabet)} \\
T = \{a, b\} \quad & \textit{(Eingabealphabet)} \\
\Pi = \dots \quad & \textit{(Produktionen)}
\end{aligned}
$$

14. Bringen Sie die Regeln folgender Grammatik in Chomsky-Normalform.

$$G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, \Pi, S)$$

$$
\Pi = \begin{array}{lcl}
S & \rightarrow & \epsilon \mid aSa \mid AB \\
A & \rightarrow & aS \mid a \\
B & \rightarrow & \epsilon \mid b
\end{array}
$$

15. Wir betrachten eine kontextfreie Grammatik mit folgenden Produktionen:

$$
\begin{array}{lllll}
S \rightarrow AD & A \rightarrow CB & B \rightarrow AD & C \rightarrow AD & D \rightarrow BB \\
A \rightarrow a & B \rightarrow b & C \rightarrow c & D \rightarrow d &
\end{array}
$$

Wenden Sie den Cook-Younger-Kasami-Algorithmus auf die beiden Wörter *aaada* und *adadd* an. Ist eines der beiden Wörter aus S ableitbar?

16. Gegeben sei ein endlicher Automat mit n Zuständen.

    a) Wie ist die Verhaltensgleichheit zweier Zustände definiert.

    b) Wie berechnet man die Verhaltensgleichheitsrelation?

    c) Wie hoch ist der Rechenaufwand dafür?

    d) Ist der Quotientenautomat modulo Verhaltensgleichheit stets minimal? Begründen Sie Ihre Antwort kurz.

17. Wir betrachten zwei reguläre Ausdrücke α_1 und α_2.

a) Erzeugen die beiden regulären Ausdrücke $\alpha_1 = ((ab^*a)^* b^*)^*$ und $\alpha_2 = (b^* (aa))^*$ dieselbe Sprache? Begründen Sie Ihre Antwort kurz.

b) Wie kann man allgemein feststellen, ob zwei reguläre Ausdrücke dieselbe Sprache erzeugen. Erläutern Sie Ihre Antwort.

18. Gegeben sei eine RAM mit folgender Befehlsfolge:

```
1:  LOAD =3
2:  STORE 2
3:  READ 0
4:  JZERO 14
5:  STORE 1
6:  READ ↑1
7:  STORE ↑2
8:  LOAD 2
9:  ADD =1
10: STORE 2
11: LOAD 1
12: SUB =1
13: JUMP 4
14: HALT
```

In den Eingaberegistern stehen die folgenden Zahlen:

i_0	i_1	i_2	...	i_m
m	x_1	x_2	...	x_m

a) Kommentieren Sie kurz die einzelnen Befehle der RAM. *(Dies können Sie auch direkt im oben angegebenen Proramm tun.)*

b) Was steht in den ersten 10 Registern wenn das Programm die oben angegebene Eingabe mit $m = 7$ verarbeitet hat?

r_0	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	r_7	r_8	r_9

c) Welche Aufgabe erfüllt die RAM.

19. Wir betrachten das in der Vorlesung behandelte Cliqueproblem.

    a) Was ist das Cliquenproblem bei ungerichteten Graphen? Beschreiben Sie es kurz.

    b) Wie kann man einen Algorithmus, der die maximale Elementanzahl einer Clique berechnet, nutzen, um sogar eine maximale Clique zu berechnen?

20. Bei einem Maximierungsproblem hatten wir die Bestimmung des maximal möglichen Kostenwertes $c_{max}(x)$ zu einer Eingabeinstanz x auf das folgende Entscheidungsproblem zurück geführt:

    INPUT Instanz x und Binarzahl b (als untere Schranke)
    FRAGE Gibt es eine Lösung y zu x mit $c(x, y) \geq b$?

    a) Wie konnten wir einen Algorithmus für das Entscheidungsproblem nutzen, um $c_{max}(x)$ zu berechnen?

    b) Hätten wir auch das folgende leicht modifizierte Entscheidungsproblem nutzen können, um das oben beschriebene Maximierungsproblem zu lösen?
    INPUT Instanz x und Binarzahl b (als untere Schranke)
    FRAGE Gibt es eine Lösung y zu x mit $c(x, y) \leq b$?
    Begründen Sie Ihre Antwort kurz.

21. Wir betrachten einen endlichen Automaten A mit den Zuständen $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}$, der genau alle Wörter über dem Alphabet $T = \{m, a\}$ erkennt, die das Teilwort *mamaa* enthalten.

    (a) Stellen Sie den Automaten graphisch dar.

    (b) Geben Sie die Produktion des endlichen Automaten an. Markieren Sie die Start- und Finalzustände.

	m	a
q_0		
q_1		
q_2		
q_3		
q_4		
q_5		

22. Pumpinglemma

(a) Geben Sie die notwendige Bedingung des Pumpinglemmas an, die jede reguläre Sprache erfüllen muss.

(b) Gibt es Sprachen, für welche die notwendige Bedingung des Pumpinglemmas gilt, obwohl sie nicht regulär sind? Wenn ja, geben Sie eine solche Sprache an. Wenn nein, zeigen Sie dies allgemein. Begründen Sie Ihre Antwort.

23. Ist die Sprache $L = \{w \mid w \in \{a\}^* \wedge |w| \text{ ist Quadratzahl}\}$ regulär? Beweisen Sie Ihre Antwort.

24. Zu welchen Sprachfamilien gehören die folgenden Sprachen? Kreuzen Sie die entsprechenden Felder an.

regulär	kontextfrei	kontextsensitiv	
			$L_1 = \{ww \mid w \in \{0,1\}^*\}$
			$L_2 = \{ww \mid w \in \{0\}^*\}$
			$L_3 = \{ww^{mi} \mid w \in \{0,1\}^*\}$
			$L_4 = \{0^n 1^n 0^m 1^m \mid n, m > 0\}$

25. Gegeben sei eine kontextfreie Grammatik G_1.

$$G_1 = (\{S\}, \{a, b\}, \Pi, S)$$

mit der Regelmenge $\Pi = \{S \to ASa, A \to Ab \mid a\}$

(a) Welche allgemeine Form haben die Produktionen von LL- und LR-Automaten für eine beliebige kontextfreie Grammatik G.

Produktionen in G	Produktionen in A_{LL}	Produktionen in A_{LR}
$A \to r$		

(b) Geben Sie für die Grammatik G_1 die Produktion der zugehörigen LL- und LR-Automaten an.

Produktionen in G_1	Produktionen in A_{LL}	Produktionen in A_{LR}
$S \to ASa$		
$A \to Ab$		
$A \to a$		

26. Auf welchen Stufen der Chomsky-Hierachie ist der jeweilige indeterministische Automatentyp leistungsstärker (kann also mehr Sprachen erkennen) als seine deterministische Version? Kreuzen Sie die jeweils richtige Antwort an.

	zugehöriger Automat	leistungsstärker	nicht leistungsstärker	nicht bekannt
$\mathfrak{L}_3$				
$\mathfrak{L}_2$				
$\mathfrak{L}_1$				
$\mathfrak{L}_0$				

ACHTUNG: In jeder Zeile gibt es $2,5$ Punkte. Bei einer falschen Antwort werden diese Punkte abgezogen.

27. Bringen Sie die Regeln folgender Grammatik in Chomsky-Normalform.

$$G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, \Pi, S)$$

$$\begin{aligned}\Pi = \quad S &\rightarrow ABa \\ A &\rightarrow BC \mid a \\ C &\rightarrow \epsilon \mid AB \\ B &\rightarrow b\end{aligned}$$

28. Wir betrachten eine kontextfreie Grammatik mit folgenden Produktionen:

    $S \to AB, \quad S \to BC, \quad A \to BC, \quad B \to BB, \quad C \to AD,$
    $A \to a, \quad B \to b, \quad C \to c, \quad D \to d$

    Wenden Sie den Cook-Younger-Kasami-Algorithmus auf die beiden Wörter $aabcd$ und $badbb$ an. Ist eines der beiden Wörter aus S ableitbar?

29. Beschreiben Sie vier qualitativ unterschiedliche Möglichkeiten, wie ein vollständiger deterministischer Kellerautomat ein Eingabewort x nicht erkennen kann.

30. Gegen welche der unten angegebenen Eigenschaften sind die einzelnen Chomsky-Sprachklassen abgeschlossen. Kreuzen Sie bitte an.

	$\mathfrak{L}_3$	$\mathfrak{L}_2$	$\mathfrak{L}_1$	$\mathfrak{L}_0$
Vereinigung				
Durchschnitt				
Komplement				
Verkettung				
Kleene-Stern				

ACHTUNG: Für jedes richtig gesetzte Kreuz gibt es einen $\frac{1}{2}$ Punkt. Für jedes falsch gesetzte Kreuz wird ein $\frac{1}{2}$ Punkt abgezogen.

31. Welche Sprache definiert der reguläre Ausdruck $(a^*b^*)^*$?

32. Bringen Sie die folgende Grammatik in Chomsky-Normalform:

$S \rightarrow AaBS \mid BAA$
$A \rightarrow BB \mid aa$
$B \rightarrow BA \mid \epsilon$

33. Wir betrachten die folgende Sprache über dem Alphabet $\{a\}$:

$$L = \{a^{nn} \mid n > 0\}$$

Ist L regulär? Wenn ja, geben Sie einen regulären Ausdruck für L an. Wenn nein, beweisen Sie dies.

34. Wir betrachten die folgende Sprache über dem Alphabet $\{a, b\}$:

$$L = \{a^n b^{2n} \mid n > 0\}$$

Ist L kontextfrei? Wenn ja, geben Sie eine kontextfreie Grammatik für L an. Wenn nein, beweisen Sie dies.

35. Wie kann man in polynomieller Zeit entscheiden, ob zwei gegebene endliche Automaten dieselbe Sprache erkennen?

36. Die Sprache aller durch 5 teilbaren Dezimalzahlen (führende Nullen seien erlaubt) kann durch den regulären Ausdruck

$$(0 \cup 1 \cup 2 \cup 3 \cup 4 \cup 5 \cup 6 \cup 7 \cup 8 \cup 9) * (0 \cup 5)$$

definiert werden. Kann man die Sprache aller durch 8 teilbaren Dezimalzahlen ebenfalls durch einen regulären Ausdruck definieren? Wenn, ja, wie würde man einen solchen regulären Ausdruck finden?

37. Hat der folgende ungerichtete Graph einen Eulerkreis oder einen Eulerpfad? Woran erkennen Sie dies?

38. Gegeben sei ein beliebiger deterministischer Kellerautomaten A und ein beliebiges Eingabewort w. Wie kann man entscheiden, ob A das Wort w erkennt? Nützt es, A auf w zu starten, ihn dann laufen zu lassen, und zu sehen, was geschieht? Was muss man stattdessen tun?

39. Gibt es einen Unterschied in komplexitätstheoretischer Hinsicht zwischen dem Erfüllbarkeitsproblem für aussagenlogische Formeln in konjunktiver Normalform und dem Erfüllbarkeitsproblem für aussagenlogische Formeln in disjunktiver Normalform?

40. Wir betrachten das Problem, eine Folge positiver ganzer Zahlen in drei Gruppen mit identischen Summen zu zerlegen. Warum ist das Problem in NP? Zeigen Sie dann die NP-Vollständigkeit dieses Problems, indem Sie eine beliebige Instanz $x_1, ..., x_n$ des PARTITION-Problems durch Hinzufügen einer geeigneten weiteren Zahl x_{n+1} in eine äquivalente Instanz $x_1, ..., x_n x_{n+1}$ des hier betrachteten Problems transformieren.