Laborversuche zur Physik I

Versuch 1 - 10
Wechselstrom und Schwingkreise

Versuchsleiter:	
Autoren:	Kai Dinges
	Michael Beer
Gruppe:	15
Versuchsdatum:	31. Oktober 2005

Inhaltsverzeichnis

2 Aufgaben und Hinweise

2.1 bedienung des Oszillographen

Dieser Teil wurde von meinem Partner durchgeführt und steht mir nicht zur Verfügung.

2.2 Messung von Spannungen und Phasenverschiebungen mit dem Oszilloskop

Dieser Teil wurde von meinem Partner durchgeführt und steht mir nicht zur Verfügung.

2.3 Tiefpass und Hochpass

Im Folgenden war nun die an einem Bauteil anliegende Spannung in Abhängigkeit von der Frequenz ν und daraus letztendlich der Frequenzgang dieses zu bestimmen. Dazu war das betreffende Teil in Serie zu einem ohmschen Widerstand zu schalten, und dann einmal die an beiden Schaltungsteilen abfallende Gesamtspannung U_{13} und die nur am Kondensator abfallende Spannung U_{23} zu ermitteln. Diese Spannungen wurden nun bei verschiedenen Frequenzen gemessen, das Verhältnis der am Bauteil abfallenden Spannung zur Gesamtspannung, also

$$F = \frac{U_{23}}{U_{13}} \tag{1}$$

liefert den Frequenzgang. Gemessen wurde bei Frequenzen von 0.1kHz bis 100kHz, wobei je Zehnerpotenz 5 Messungen erfolgten. Diese Messungen erfolgten an einem Kondensator

Frequenz ν/ kHz ($\pm$ 3%)	Spule		Kondensator	
	U_{23}/V ($\pm$ 10%)	F ($\pm$ 7 %)	U_{23} /V ($\pm$ 10 %)	F ($\pm$ 7 %)
0,100	0,000	0,000	6,500	0,813
0,200	0,015	0,002	5,000	0,625
0,400	0,020	0,003	3,000	0,375
0,600	0,040	0,005	2,000	0,250
0,800	0,040	0,005	1,500	0,188
1,00	0,040	0,005	1,200	0,150
2,00	0,080	0,010	0,800	0,100
4,00	0,200	0,025	0,350	0,044
6,00	0,300	0,038	0,230	0,029
8,00	0,400	0,050	0,160	0,020
10,00	0,500	0,063	0,130	0,016
20,00	0,800	0,100	0,080	0,010
40,00	2,000	0,250	0,035	0,004
60,00	3,000	0,375	0,023	0,003
80,00	5,000	0,625	0,018	0,002
100,00	6,500	0,813	0,013	0,002

Tabelle 1: Die Messwerte für den Frequenzgang einer Spule bzw. eines Kondensators bei einer Gesamtspannung U_{13} von 8V ($\pm$ 3%)

einer Kapazität von C = 0,1 μF und einer Spule mit einer Induktivität von L = 9mH, wobei jeweils eine Gesamtspannung $U_{13} = 8\text{V}$ anlag. Der Vorwiderstand betrug 1000 Ω. Für alle Messungen wurde ein Zweikanaloszilloskop zur Ermmittlung der Spannungen verwandt. Die Messergebnisse sind einmal in Tabelle 1 und außerdem aus den beigefügten Messkurven auf Blatt 1 (Spule) und Blatt 2 (Kondensator) zu ersehen. Der Messfehler beträgt bei Induktivität L, Kapzität C, dem Widerstand R sowie der Frequenzmessung jeweils 3%, bei den Messungen der Spannung ist auf Grund des menschlichen Faktors von einem höheren Fehler von max. 10% auszugehen. Damit folgt für den maximalen Fehler

$$\begin{aligned}
\Delta\frac{U_{23}}{U_{13}} = \Delta F &= \frac{\partial F}{\partial U_{23}}\Delta U_{23} + \frac{\partial F}{\partial U_{13}}\Delta U_{13} && (2)\\
&= \frac{1}{U_{13}}\Delta U_{23} - \frac{U_{23}}{{U_{13}}^2}\Delta U_{13}\\
&= \frac{U_{23}}{U_{13}}\left(\frac{\Delta U_{23}}{U_{23}} - \frac{\Delta U_{13}}{U_{13}}\right)\\
\Rightarrow \Delta F &= F\left(\frac{\Delta U_{23}}{U_{23}} - \frac{\Delta U_{13}}{U_{13}}\right) && (3)\\
\Delta F &= F\,(10\% - 3\%) = 7\% F && (4)
\end{aligned}$$

und damit ein relativer Fehler $\frac{\Delta F}{F} = 7\%$ für den Frequenzgang F.

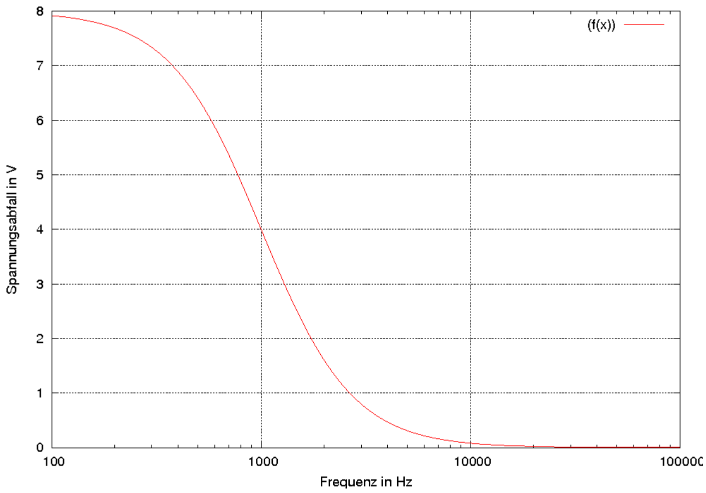

Abbildung 1: Theoretischer Verlauf der an einem Kondensator mit $C = 0,1\mu F$ bei einem Vorwiderstand von $R_1 = 1000\Omega$ abfallenden Spannung U_{23}. Die x-Achse ist in einem logarithmischen Maßstab angetragen.

Es zeigt sich, dass der Frequenzgang eines Kondensators offenbar exponentiell mit der Frequenz abfällt, der einer Spule exponentiell ansteigt. Die Spannung hängt mit dem Strom Theoretisch ergibt sich die Spannung am Kondensator aus der Beziehung

$$\begin{aligned}
X_C &= \frac{U_{23}}{I} && (5)\\
\Rightarrow U_{23} &= X_C I
\end{aligned}$$

wobei durch den vorgeschalteten Widerstand R_1 derselbe Strom I fließen muss, so dass sich mit $U_{12} \approx U_{13} - U_{23}$

$$I = \frac{U_{12}}{R}$$

$$I = \frac{U_{13} - U_{23}}{R}$$

und also mit $X_C = \frac{1}{i\omega C}$ für

$$U_{23} = \frac{U_{13} - U_{23}}{i\omega RC}$$

$$\Rightarrow U_{23} = \frac{U_{13}}{i\omega RC + 1} \quad (6)$$

$$|U_{23}| = \frac{U_{13}}{\omega^2 R^2 C^2 + 1} \quad (7)$$

ergibt. Die Abhängigkeit der Spannung von der Frequenz [1] ähnelt beim Kondensator also einer indirekten Proportionalität. Der Vergleich der aus den Messwerten erstellten Kurve (siehe Beiblatt 1) mit dem Graf dieser Funktion wie in Abbildung 1 dargestellt, zeigt deutlich eien Bestätigung der theoretischen Voraussagen. Für eine Spule ergibt sich analog wegen $X_L = i\omega L$

$$U_{23} = U_{13} \frac{i\omega L R_2 - \omega^2 L^2}{R^2 + \omega^2 L^2} \quad (8)$$

$$|U_{23}| = |U_{13}| \frac{\sqrt{R^2 L^2 \omega^2 + \omega^4 L^4}}{R^2 + \omega^2 L^2} \quad (9)$$

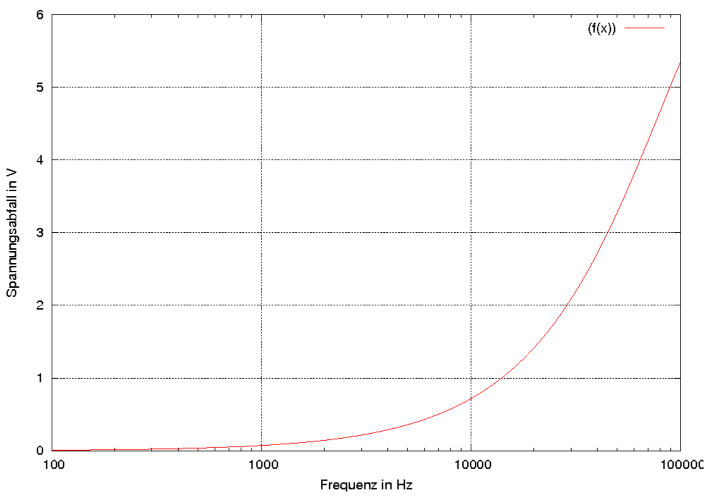

Abbildung 2: Theoretischer Verlauf der an einer Spule mit $L = 9mH$ bei einem Vorwiderstand von $R_1 = 1000\Omega$ abfallende Spannung U_{23}. Die x- Achse ist in einem logarithmischen Maßstab aufgetragen.

Vergleicht man den Plot dieser Funktion (siehe Abbildung 2 mit den experimentell ermittelten Werten (siehe Kurve auf Beiblatt 1), so zeigt sich eine gute Bestätigung der theoretischen Vorhersage.

[1] Es gilt $\omega = \nu 2\pi$.

2.4 Frequenzgang eines Parallelschwingkreises

Der Aufbau dieser Anordnung entspricht dem aus 2.3 mit der Ausnahme, dass nun nicht mehr nur Kondensator oder Spule, sondern beide parallel im Schaltkreis liegen. Der Ablauf ist derselbe, man misst die gesamte abfallende Spannung U_{13} und an der Parallelschaltung abfallende Spannung U_{23} und ermittelt so den Frequenzgang mit $F = \frac{U_{23}}{U_{13}}$. Auch die verwandten Bauteile waren dieselben wie in 2.3 mit denselben Kennwerten. Die Messergebnisse liegen in Tabelle 2 wie auch als Kurve auf beiliegendem Blatt 2 vor.

Frequenz ν /kHz (± 3%)	U_{23} /V (± 10%)	F (± 7 %)
0,100	6,500	0,813
0,200	6,000	0,750
0,400	3,000	0,375
0,600	2,000	0,250
0,800	1,500	0,188
1,00	1,200	0,150
2,00	0,800	0,100
4,00	0,350	0,044
6,00	0,230	0,029
8,00	0,150	0,019
10,00	0,130	0,016
20,00	0,080	0,010
40,00	0,045	0,006
60,00	0,028	0,003
80,00	0,018	0,002
100,00	0,015	0,002

Tabelle 2: Frequenzgang eines Parallelschwingkreises mit einem Kondensator c=0,1μF, einer Spule unbekannter Induktivität und einem Vorwiderstand R = 1000 Ω bei einer gesamt anliegenden Spannung U_{13} = 8V

Da der Schwingkreis bei Resonanz idealerweise keinen Strom mehr durchlassen sollte, sollte am Vorwiderstand R keine und also am Schwingkreis die gesamte Spannung abfallen. Praktisch ist dies zwar nicht zu erreichen, jedoch sollte sich bei der Resonanzfrequenz ein Spannungsmaximum zeigen. Bei den Messergebnissen in Tabelle 2 ist offenbar kein Maximum festzustellen. Das Verhalten ist vielmehr nahezu identisch mit dem Frequenzverlauf eines einzelnen Kondensators (siehe 2.3), was die Vermtung nahe legt, dass der Fehler in der Verschaltung des Versuches liegt. Offenbar war die Spule entweder gar nicht oder falsch angeschlossen. Damit ist die Ermittlung der Resonanzfrequenz auf diese Art nicht möglich. Theoretisch kann man aus der Resonanzfrequenz ω_0 die Spuleninduktivität über die Beziehung

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{10}$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{{\omega_0}^2 C} \tag{11}$$

ermitteln. Da die Resonanzfrequenz nicht zu ermitteln ist, ist aber auch die konkrete Ermittlung der Induktivität nicht möglich, eine Fehlerrechnung damit ebenso hinfällig.

2.5 Auf- und Entladevorgang eines Kondensators

Hier war der Spannungsverlauf beim Aufladen eines Kondensators zu beobachten. Dazu wurde dieselbe Verschaltung wie in 2.3 gewählt, der Kondensator an eine Rechteckspannungsquelle angeschlossen und der Verlauf der am Kondensator abfallenden Spannung an einem Oszilloskop verfolgt. Die Frequenz der Ladespannung sollte nicht zu groß gewählt werden, da ansonsten der Kondensator nicht mehr die Zeit besitzt, sich ausreichend aufzuladen. Wir verwandten eine Spannung der Frequenz 1kHz. Der gefundene Spannungsverlauf ist auf beigefügten Blatt als Kurve angetragen. Offenbar folgt der Auf- und Entladevorgang einem exponentiellen Verlauf, wobei sich beim Aufladen die Spannung offensichtlich asymtotisch einem Maximalwert von U_{23-Max} = 1,2 V (± 10 %) annähert. Es drängt sich die Vermutung auf, dass der Aufladevorgang einer Funktion der Art $U = U_{Max}\left(1 - e^{-at}\right)$, der Entladevorgang einer Funktion der Art $U = U_{Max}e^{-bt}$ mit a und b als unbekannten Konstanten gehorcht. Dies passt zur theoretischen Überlegung, dass auf Grund der Abstoßung zwischen den Ladungen die Zahl der Ladungen, die auf den Kondensator fließen, abnähme, je mehr Ladungen bereits auf dem Kondensator liegen, bzw. die Zahl der abfließenden Ladungen umso größer sei, je mehr Ladungen sich auf dem Kondensator befinden. Der Strom eilt der Spannung voraus.

2.6 Ein - und Ausschalten einer Spule

Als nächstes sollte der Kondensator durch eine Spule ersetzt und die selbe Untersuchung erneut durchgeführt werden. Auch hier wurde die Frequenz von 1 kHz verwandt, der Spannungsverlauf ist auf beiliegendem Blatt zu ersehen. Es zeigen sich deutlich jeweils beim Umpolen der Spannung Spitzen, die sofort wieder abklingen. Auch dies entspricht dem theoretisch hergeleitetem Verhalten. Die induzierte Spannung ist der Änderung des magnetischen Flusses proportional, die durch die Änderung des Stromflusses durch die Spule hervorgerufen wird. Natürlich ist der Zeitabschnitt, in dem sich der Stromfluss ändert, bei einer Rechteckspannung verschwindend klein, und so sollte auch der Spannungsanstieg von infinitesimal kurzer Dauer sein, doch wirkt die induzierte Spannung dem Stromfluss entgegen, so dass sich der maximale Strom nicht unmittelbar einstellen kann. Daher ist die Spannungsspitze breit. Die Spannung eilt dem Stromfluss voraus. Die maximale Amplitude der Spannung betrug 0,04V (± 10%).

2.7 Berechnungen

In diesem Abschnitt sollen die Widerstände der Bauteile der Schaltung wie in Abbildung 3 berechnet und deren Beträge sowie Fasenlage angegeben werden. Der Wechselstromwiderstand eines ohmsche nWiderstandes ist einfach der Gleichstromwiderstand R, also ist mit $\omega = 2\pi\nu$ mit ν als Frequenz

$$X_{R_1} = R_1 \quad (12)$$
$$X_{R_2} = R_2 \quad (13)$$

Bei ohmsche nWiderständen tritt keine Fasenverschiebung ein.
Der Widerstand einer Spule ergibt sich zu

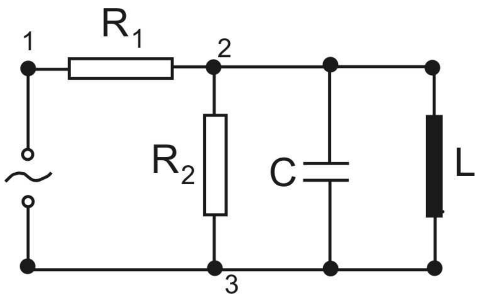

Abbildung 3: Das Schaltbild des betrachteten Schwingkreises

$$\begin{aligned} X_L &= i2\pi\nu L & (14) \\ |X_L| &= 2\pi\nu L & (15) \end{aligned}$$

Aus der Definition des Widerstandes folgt

$$\begin{aligned} U_{23} &= X_L I \\ U_{23} &= i2\pi\nu L I = i2\pi\nu L \frac{U_{13}}{R_1} \\ |U_{23}| &= 2\pi\nu L \frac{|U_{13}|}{R_1} & (16) \end{aligned}$$

Die Fasenverschiebung ϕ ergibt sich generell über die Beziehung

$$\begin{aligned} tan\phi &= \frac{ImX}{ReX} \\ \Rightarrow \phi_{Spule} = lim_{x\to 0} atan \frac{\omega L}{x} &= \frac{\pi}{2} & (17) \end{aligned}$$

Die Fasenverschiebung der Spannung an einer Spule beträgt unabhängig von der Frequenz also $\frac{\pi}{2}$.

Der Widerstand eines Kondensators ist über

$$\begin{aligned} X_C &= \frac{1}{i2\pi\nu C} & (18) \\ |X_C| &= \frac{1}{2\pi\nu C} & (19) \end{aligned}$$

zu berechnen. Analog zur Berechnung der Fasenverschiebung an einer Spule findet man für ϕ an einem Kondensator

$$\phi = lim_{x\to 0} atan - \frac{1}{x\omega C} = -\frac{\pi}{2} \quad (20)$$

An einem Kondensator findet also unabhängig von der Frequenz eine Fasenverschiebung von $-\frac{\pi}{2}$ statt. Da der Widerstand R_1, der Kondensator und die Spule parallel geschaltet sind, gilt für den Gesamtwiderstand

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{C_G} &= \frac{1}{R_1} + \frac{1}{i2\pi\nu L} + i2\pi\nu C \\
\Rightarrow X_G &= \frac{iR_2 2\pi\nu L}{i2\pi\nu\left(L + CR_2\right) - 4\pi^2\nu^2 LCR_2} \\
\Rightarrow X_G &= \frac{\frac{1}{R_2} + \frac{C}{L} - i2\pi\nu C}{4\pi^2\nu^2C^2 - 2\frac{C}{LR_2} + \left(\frac{C}{L}\right)^2 + \frac{1}{{R_2}^2}} \qquad (21) \\
|X_G| &= \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{R_2} + \frac{C}{L}\right)^2 + \left(2\pi\nu C\right)^2}}{4\pi^2\nu^2C^2 - 2\frac{C}{LR_2} + \left(\frac{C}{L}\right)^2 + \frac{1}{{R_2}^2}} \qquad (22)
\end{aligned}
$$

Der Gesamtwechselstromwiderstand der Schaltung ergibt sich nun einfach aus Addition von X_G zu R_2 bzw. für den Betrag Addition von $|X_G|$ zu R_2. Qualitativ steigt der Widerstand eines Schwingkreises bis zur Resonanzfrequenz $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ an, bei der Resonanzfrequenz hat er den Maximalwert von $X_{Ges-Max} = R_2$. Bei höheren Frequenzen sinkt er wieder ab.