Barbara Hammer, FB Mathematik/Informatik, Universität Osnabrück

Softcomputing (WS 2000/01)
3.Übungsblatt

Abgabe bis spätestens Donnerstag, 9.11.00, $13^{\underline{00}}$ Uhr, Briefkasten im 4. Stock des AVZ

---

1. (5 Punkte) $A = (\{A_1, \ldots, A_n\}, \{p_1, \ldots, p_n\})$ und $B = (\{B_1, \ldots, B_n\}, \{p_1, \ldots, p_n\})$ seien zufällige Mengen über X. Die zufälligen Mengen A bzw. B induzieren je eine Fuzzymenge auf X vermöge der Konturfunktion μ_A bzw. μ_B. Ferner kann man den Schnitt der zufälligen Mengen $A \cap B = (\{A_1 \cap B_1, \ldots\}, \{p_1, \ldots\})$ und die Vereinigung $A \cup B = (\{A_1 \cup B_1, \ldots\}, \{p_1, \ldots\})$ und die dazugehörigen Konturfunktionen $\mu_{A\cap B}$ und $\mu_{A\cup B}$ betrachten.

   (a) Es gelte $A_i \subset B_i$ für alle i. Was für eine Norm und zugehörige Conorm würden Sie verwenden, um die Vereinigung bzw. den Schnitt der Fuzzymengen μ_A und μ_B zu berechnen – es sollte dabei möglichst $\mu_{A\cap B}$ bzw. $\mu_{A\cup B}$ herauskommen.

   (b) Es gelte $A_i \cap B_i = \emptyset$ für alle i. Was für eine Norm und zugehörige Conorm würden Sie verwenden, um die Vereinigung bzw. den Schnitt der Fuzzymengen μ_A und μ_B zu berechnen?

   (c) Was ist bei $A_i \cup B_i = X$?

2. (5 Punkte) $X = [0,1] \times [0,1]$ sei das Einheitsquadrat. Zeigen Sie, daß

$$E_1 : X \times X \to [0,1], ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mapsto 1 - \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$$

   und

$$E_2 : X \times X \to [0,1], ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mapsto 1 - \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

   Gleichheitsrelationen sind.

3. (5 Punkte) Auf $\{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\}$ ist folgende Fuzzy-Menge gegeben:

	1	2	3	4	5	6
1	1	0.1	0.2	0.3	0.4	0.8
2	0.2	0.1	0.3	0.5	0.6	0.9
3	0.9	0.1	0.4	0.8	1	0.7
4	0.2	0.2	0.2	0.2	0.1	0.1
5	0.3	0.8	0.9	0.9	0.8	0.7
6	0.2	0.1	0.3	0.2	0.3	0.2

   Stellen Sie sich vor, daß obige Werte $\chi(i,j)$ angeben, wie gut von der Stelle i an die Stelle j Nachrichten vermittelt werden können. Es dürfen jetzt bei der Übermittlung von Daten von i nach j *beliebig viele Zwischenstationen* eingeschaltet werden. Die Güte, um von i nach j *über* k zu übermitteln, berechne sich über das Minimum der Güten $\chi(i,k)$, $\chi(k,j)$; die maximal mögliche Güte, über einen Zwischenschritt von i nach j zu kommen, berechne sich als das Maximum über alle k. Wie ist die maximal erreichbare Güte für jede Verbindung von i nach j?

4. (5 Punkte) Versuchen Sie, eine vorgegebene Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ auf der Basis von Fuzzyclustering wie folgt zu approximieren:

   Ein Fuzzyclustering wird auf Punkten x_i in $\mathbb{R}^n$ durchgeführt. Anschließend werden die Klassenmittelpunkte v_i berechnet. Jedem *Mittelpunkt* v_i wird der Wert $y_i = f(v_i)$ zugeordnet. Ein *beliebiger Punkt* $x \in \mathbb{R}^n$ wird auf $\sum A_i(x) \cdot y_i$ abgebildet, d.h. auf die gemäß der Zuordnung $A_i(x)$ zu den Clustern gewichtete Mittelung über die Werte y_i.

   Erweitern Sie Ihren Fuzzy-Clustering-Algorithmus um obige Funktionalität und testen Sie, wie stark die so berechneten Funktionswerte von den tatsächlichen abweichen in folgenden Fällen:

   $f_1 : [-1,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \cos(5x)$, Clustering für 10 in $[0,1]$ gleichmäßig verteilte Punkte und 1, 3, 5 und 10 Klassen. Als Maß für die Abweichung können Sie die gemittelten Abweichung auf den Trainingspunkten verwenden.

   $f_2 : [-1,1]^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto (2x^2 - 3x + 1)(2y^2 - 4y + 2)$, Clustering für 100 in $[0,1]$ gleichmäßig verteilte Punkte und 1, 10, 20, bzw. 100 Klassen.