Fuzzy-Systeme

Sommersemester 1996

Thomas Feuring

– 1996 –

Historisches

Fuzzy-Logik [dt.: unscharfe Logik] stellt eine Erweiterung der klassischen binären Logik dar, die ihre Ursprünge scuon in der alten griechischen Philosophie findet.

Platons Vermutung, daß es eine dritte Region zwischen wahr und falsch geben müße, ist der antike Vorläufer des fuzzy-logischen Prinzips. Sein Schüler Aristoteles postulierte jedoch das Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten, das die Entwicklung logischer und mathematischer Systeme für die nächsten zwei Jahrtausende bestimmen sollte. Moderne Philosophen wie G. Hegel und B. Russel nahmen Platons Vermutung wieder auf. So schreibt B. Russel ([Russel,1923]): *„The law of excluded middle is true when precise symbols are employed, but it is not true when symbols are vague, as, in fact, all symbols are.“* Beispielhaft stellt er die Ungenauigkeit in der Sprache an der Farbe *rot* dar. Diese Farbe steht nicht für eine bestimmte genau festgelegte Wellenlänge, sondern beschreibt einen Bereich im Spektrum aller Farben.
Auf B. Russel geht ferner die Paradoxie des Barbiers einer spanischen Kleinstadt zurück, das besagt, daß alle Männer, die sich nicht selbst rasieren vom Barbier rasiert werden. Die in der zweiwertigen Logik nicht lösbare Paradoxie entsteht durch die Frage, wer den Barbier rasiert.

Zur selben Zeit führt J. Lukasiewicz als erster eine systematische Alternative zu Aristoteles zweiwertiger Logik ein [Lukasiewicz,1957]. J. Lukasiewicz zeigt, daß es Sätze gibt, denen keiner der Wahrheitswerte „wahr“ oder „falsch“ zugeordnet werden kann. Hieraus schließt er auf die Existenz eines dritten Wahrheitswertes, den er zwischen „wahr (1)“ und „falsch (0)“ ansiedelt und „possible (1/2)“ nennt. Später entwickelte J. Lukasiewicz vier– und fünfwertige Logiken. Der Bezug zur Fuzzy-Set-Theorie ergibt sich, da er auch die Möglichkeit nannte, eine unendlichwertige Logik einzuführen. J. Lukasiewicz ließ dazu alle Zahlen aus dem Intervall $[0,1]$ als Wahrheitswerte zu.

Die Ideen von B. Russel nimmt M. Black 1937 wieder auf und stellt in [Black,1937] ein Verfahren vor, mit dem er die Unschärfe von Symbolen numerisch darstellen kann. Er nennt diese Methode *consistency-profile*. Er definiert dabei die Ungenaugigkeit oder Vagheit eines Symbols unter Zuhilfenahme dessen Komplements. M. Black geht davon aus, daß es mindestens ein Element gibt, das weder zum Symbol selbst noch zu dessen Komplement vollständig gehört. Die Menge der Elemente, die nicht eindeutig zugeordnet werden können, nennt er *frings* [dt.: Fransen].

Im Jahr 1965 veröffentlichte L. Zadeh den grundlegenden Artikel „Fuzzy Sets“ [Zadeh,1965], in dem er die Mathematik der Fuzzy-Set-Theorie [dt.: unscharfe Mengenlehre] beschreibt. Dort verbindet L. Zadeh die Idee M. Blacks der „Fransen“ mit der unendlichwertigen Logik J. Lukasiewiczs.

Inhaltsverzeichnis

Teil I
Theoretischer Fundus

1 Klassische Mengen – Fuzzy-Mengen

In diesem Kapitel sollen Fuzzy-Mengen aus den klassischen Mengen entwickelt werden. Dazu werden zunächst klassische Mengen vorgestellt, die im folgenden auch als crispe [dt.: scharf] Mengen bezeichnet werden. Die Verallgemeinerung der Indikatorfunktion führt dann zur Definition von Fuzzy-Mengen.

1.1 Klassische Mengen

Im folgenden sei X die Grundmenge und A eine Teilmenge von X. Ein Element gehört in der klassischen Mengenlehre entweder zu einer Menge A, oder aber es gehört nicht zu dieser Menge. Hierfür schreibt man

$$a \in A \qquad \text{oder} \qquad a \notin A\ .$$

Eine n-elementige Menge läßt sich in aufzählender Form dargestellt als

$$A := \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

Dabei werden alle Elemente aufgelistet, die zu der entsprechenden Menge gehören.

Abbildungen stellen ein wichtiges Hilfsmittel dar, um mengentheoretische Konzepte mittels funktionen-theoretischer Darstellung untersuchen zu können. Dazu benötigen wir folgende grundlegende Definition.

Definition 1.1
Es sei X eine Grundmenge und A eine Teilmenge von X. Dann heißt die Funktion $\chi_A : X \to \{0,1\}$ vermöge

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & : \quad x \in A \\ 0 & : \quad x \notin A \end{cases}$$

Identikator- *oder* charakteristische Funktion *der Menge A.*

Die Menge A wird mit Hilfe der charakteristischen Funktion vollständig beschrieben.

Entsprechend lassen sich auch Durchschnitt, Vereinigung und Komplementbildung mit Hilfe der charakteristischen Funktion in funktionaler Schreibweise darstellen. Wir geben im folgenden nur die entsprechenden charakteristischen Funktionen an. Seien dazu A und B Teilmengen des Grundraums X. So gilt

$$\chi_{A\cup B}(x) = \chi_A \vee \chi_B = \max\Big(\chi_A(x), \chi_B(x)\Big) \tag{1}$$

$$\chi_{A\cap B}(x) = \chi_A \wedge \chi_B = \min\Big(\chi_A(x), \chi_B(x)\Big) \tag{2}$$

$$\chi_{\overline{A}}(x) = 1 - \chi_A(x) \tag{3}$$

$\overline{\overline{A}}$	$=$	A	Involution
$A \cup B$ $A \cap B$	$=$ $=$	$B \cup A$ $B \cap A$	Kommutativität
$(A \cup B) \cup C$ $(A \cap B) \cap C$	$=$ $=$	$A \cup (B \cup C)$ $A \cap (B \cap C)$	Assozitivität
$A \cap (B \cup C)$ $A \cup (B \cap C)$	$=$ $=$	$(A \cap B) \cup (A \cap C)$ $(A \cup B) \cap (A \cup C)$	Distributivität
$A \cup A$ $A \cap A$	$=$ $=$	A A	Idempotenz
$A \cup (A \cap B)$ $A \cap (A \cup B)$	$=$ $=$	A A	Absorption
$A \cup (\bar{A} \cap B)$ $A \cap (\bar{A} \cup B)$	$=$ $=$	$A \cup B$ $A \cap B$	Absorption des Komplements
$A \cup X$ $A \cap \emptyset$	$=$ $=$	X $\emptyset$	Identität
$\overline{A \cap B}$ $\overline{A \cup B}$	$=$ $=$	$\bar{A} \cup \bar{B}$ $\bar{A} \cap \bar{B}$	DeMorgansche Gesetze
$A \cap \bar{A}$	$=$	$\emptyset$	Gesetz vom Widerspruch
$A \cup \bar{A}$	$=$	X	Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten

Tabelle 1: Eigenschaften von crispen Mengen

Auf die gleiche Weise läßt sich auch die Teilmengigkeit zweier Mengen auf funktionale Art beschreiben. Hier ist beispielsweise $A \subseteq B$ gleichbedeutend mit

$$\forall\, x \in X \quad : \quad \chi_A(x) \leq \chi_B(x) \ .$$

1.2 Fuzzy-Mengen

In der klassischen Mengenlehre gehört ein Element entweder zu einer Menge oder es liegt außerhalb. Dieses zweiwertige Konzept wird in der Fuzzy-Logik dadurch erweitert, daß eine graduelle Zugehörigkeit zu einer Menge beschrieben werden kann. So kann ein Element also auch nur zu einem Teil in einer Menge enthalten sein.

Wie bereits erwähnt, lassen sich Fuzzy-Mengen über die Verallgemeinerung der charakteristischen Funktion definieren. Dazu wird das Bild der Identifikatorfunktion, die zweielementige Menge $\{0,1\}$, auf das ganze Einheitsintervall $I := [0,1]$ ausgedehnt. Die so verallgemeinerte Funktion wird mit μ bezeichnet und heißt im folgenden *Zugehörigkeitsfunktion* [engl.: membership function]. Ähnlich wie die charakteristische Funktion einer scharfen Menge die Menge eindeutig selbst beschreibt, so soll auch die Zugehörigkeitsfunktion eine Fuzzy-Menge vollständig charakterisieren. Genauer definieren wir dazu:

Definition 1.2
Es sei X eine Grundmenge. Eine unscharfe Menge *oder* Fuzzy-Menge *$\tilde{A}$ einer Menge X ist eine Menge von geordneten Paaren*

$$\tilde{A} = \Big\{ \big(x, \mu_{\tilde{A}}(x)\big) \Big| x \in X \Big\}.$$

Dabei ist $\mu_{\tilde{A}}(x)$ eine Funktion mit $\mu_{\tilde{A}}(x) : X \to [0,1]$, die den Grad angibt, zu dem ein Element $x \in X$ in der Menge $\tilde{A}$ enthalten ist.

Die in der Definition betrachtete Fuzzy-Menge $\tilde{A}$ wird vollständig durch ihre Zugehörigkeitsfunktion festgelegt.

Ein Element x gehört zu einer Fuzzy-Menge $\tilde{A}$, in Zeichen $x \in \tilde{A}$, wenn $\mu_{\tilde{A}}(x) > 0$ gilt. Dabei wird durch $\mu_{\tilde{A}}(x)$ der Zugehörigkeitsgrad von x in $\tilde{A}$ angegeben. Die Zugehörigkeitsfunktion stellt somit eine natürliche Verallgemeinerung der charakteristischen Funktion dar. Eine Darstellung von Fuzzy-Mengen über $\mathbb{R}$ zeigt Abb. 1.

Bemerkung 1.3
L. Zadeh führt für eine endliche Fuzzy-Menge $\tilde{A}$ über einer Grundmenge $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ folgende Notation ein

$$\tilde{A} = \frac{\mu_{\tilde{A}}(x_1)}{x_1} + \cdots + \frac{\mu_{\tilde{A}}(x_n)}{x_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_{\tilde{A}}(x_i)}{x_i} \ .$$

Für unendliche Fuzzy-Mengen über einer unendlichen Grundmenge X wird im folgenden die Bezeichnung

$$\tilde{A} = \int_X \frac{\mu_{\tilde{A}}(x)}{x} = \int_X \mu_{\tilde{A}}(x)/x$$

gewählt. Die Bruch-Schreibweise soll dabei den Zusammenhang zwischen dem Zugehörigkeitsgrad ($\in [0,1]$) und dem Element kennzeichnen. Das Pluszeichen und das Integralzeichen sind ebenso rein formal–syntaktisch zu verstehen.

Fuzzy-Mengen werden vollständig durch ihre Zugehörigkeitsfunktionen charakterisiert. In diesem Sinne lassen sich nun auch die Grundmenge selbst und die leere Menge als Fuzzy-Mengen auffassen:

$$\begin{array}{lll} X & \text{ist Fuzzy-Menge mit } \mu_X(x) = 1 & \forall x \in X, \\ \emptyset & \text{ist Fuzzy-Menge mit } \mu_\emptyset(x) = 0 & \forall x \in X. \end{array}$$

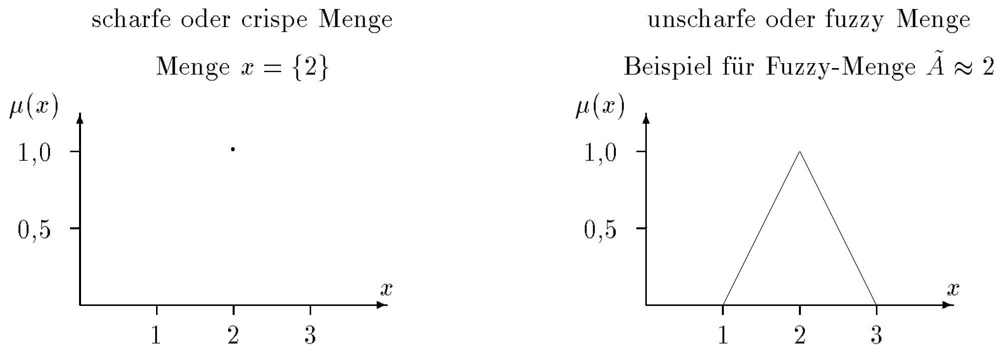

Abbildung 1: Graphische Darstellung einer crispen und einer Fuzzy-Menge über $\mathbb{R}$.

Beispiel 1.4
Mit Hilfe von Fuzzy-Mengen lassen sich linguistische Begriffe, wie Körpergröße, beschreibende Adjektive wie groß, mittelgroß, klein usw. modellieren (vgl. Abb. 2). Eine Person, mit einer Körpergröße von $1,70m$ würde demnach zum Grade 0.? zur Gruppe der mittelgroßen und zum Grade 0.? zur Gruppe der Großen Menschen gehören. In einem späteren Kapitel werden wir mit Hilfe von Fuzzy-Mengen linguistische Regeln der Form

WENN die Straße *feucht* UND die Geschwindigkeit *hoch* ist DANN *verringere* die Geschwindigkeit

umsetzen können.

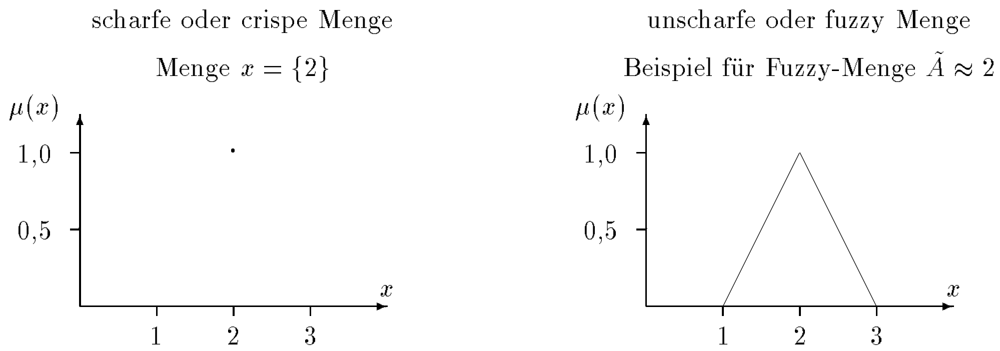

Abbildung 2: Graphische Darstellung einer crispen und einer Fuzzy-Menge über $\mathbb{R}$.

Bevor wir uns mit Verknüpfungen zwischen Fuzzy-Mengen auseinandersetzen, soll zunächst eine Abgrenzung zwischen der Theorie der Fuzzy-Mengen und der Wahrscheinlichkeitstheorie angegeben werden.

Interpretation von Fuzzy-Mengen

Es gibt nun verschiedene Interpretationen für die Semantik von Fuzzy-Mengen. Eine davon ist die Möglichkeitstheorie, die auf der Basis der Fuzzy-Mengen analog zur Wahrscheinlichkeitstheorie beschrieben werden kann. Sei dazu eine Variable u gewählt, die Werte aus der Grundmenge X annimmt. Dann lassen sich durch eine Fuzzy-Menge $\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) | x \in X\}$ die *„möglichen Werte von u“* beschreiben. Der gravierende Unterschied zwischen der Möglichkeitstheorie und der Wahrscheinlichkeitstheorie besteht aber darin, daß die Möglichkeit *subjektiv* bestimmt, die Wahrscheinlichkeit hingegen *formal* berechnet oder *empirisch* ermittelt wird (vgl. [Böhme,1993]). Mit Hilfe der Fuzzy-Set-Theorie wird also eine andere Art der Unsicherheit beschrieben (vgl. [Zimmermann,1991, Kap. 8], [Wicht,1993]). Folgendes Beispiel soll den unterschiedlichen Informationsgehalt beider Formalismen verdeutlichen.

Beispiel 1.5
Man betrachte zwei Wassergläser, die mit einer Flüssigkeit gefüllt sind. Auf beiden Gläsern befinden sich Aufkleber, die über die Genießbarkeit der jeweiligen Flüssigkeit Auskunft geben. Auf dem einen Glas steht *„Diese Flüssigkeit ist zum Grad 0,9 genießbar.“*, und das andere Glas trägt die Aufschrift *„Diese Flüssigkeit ist mit der Wahrscheinlichkeit 0,9 genießbar.“*. Beim Trinken aus dem ersten Glas stellt sich eine Trübung des Wohlbefindens ein, wohingegen die Wahrscheinlichkeitsaussage auf dem zweiten Glas keine Aussage über den Inhalt dieses Glases, sondern über den Inhalt von vielen Gläsern, aus denen eines ausgewählt wird, macht. Die Unsicherheit, die durch die Fuzzy-Set-Theorie zu modellieren versucht wird, hat also gegenüber der Wahrscheinlichkeit den großen Vorteil, daß sie unsichere Aussagen zu einem bestimmten und damit konkreten Objekt ermöglicht, was sich nicht nur für eine computergestützte Verarbeitung als hilfreich erweist. Zusammenfassend können wir schließen, daß mit der Fuzzy-Set-Theorie lokale Unsicherheit und mit der Wahrscheinlichkeitstheorie globale Unsicherheit beschrieben wird.

Bemerkung 1.6
B. Kosko hat in [Kosko,1987] aus seinem Subsethood-Theorem Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie hergeleitet, indem er die für die Wahrscheinlichkeitstheorie wichtige Formel der „bedingten Wahrscheinlichkeit“

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

formal aus der Fuzzy-Set-Theorie herleitet und beweist.

Zadeh's Operationen auf Fuzzy-Mengen

L. Zadeh führt in [Zadeh,1965] das Komplement einer Fuzzy Menge und ebenso die Vereinigung und den Durchschnitt von Fuzzy-Mengen auf der Grundlage der oben angegebenen funktionalen Zusammenhänge (vgl. Geichungen (1) - (3)) ein. Die ZADEH'schen Operationen sollen im folgenden eingeführt werden.

Dazu betrachten wir zunächst die Komplementbildung von Fuzzy-Mengen. In Gleichung (3) hatten wir bereits die Komplementbildung einer scharfen Menge A mittels der charakteristischen Funktion dargestellt. Durch die Erweiterung auf die Zugehörigkeitsfunktion μ erhalten wir die Definition für das Fuzzy-Komplement.

Definition 1.7
Es sei $\tilde{A}$ eine Fuzzy-Menge in X, dann ist das Komplement $\overline{\tilde{A}}$ *von $\tilde{A}$ definiert durch*

$$\overline{\tilde{A}} = \left\{ \left(x, \mu_{\overline{\tilde{A}}}(x)\right) \middle| x \in X \right\} \quad mit \quad \mu_{\overline{\tilde{A}}}(x) := 1 - \mu_{\tilde{A}}(x) \quad \forall x \in X \ .$$

Offenbar ist das Komplement einer Fuzzy-Menge wieder eine Fuzzy-Menge in X (vgl. Abb. 3). In gleicher Weise lassen sich nun auch Definitionen für die Vereinigung und

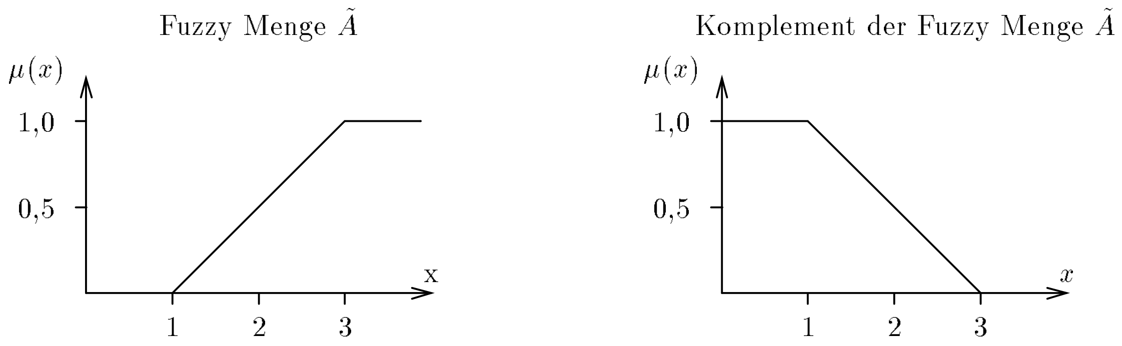

Abbildung 3: Fuzzy-Menge $\tilde{A}$ und ihr Komplement.

den Durchschnitt von Fuzzy-Mengen angeben.

Definition 1.8
Es seien $\tilde{A}, \tilde{B}$ Fuzzy-Mengen in X, dann wird die Vereinigung *beider Mengen definiert durch*

$$\tilde{A} \ \cup \ \tilde{B} := \left\{ \left(x, \mu_{\tilde{A}\cup\tilde{B}}(x)\right) \middle| x \in X, \ \mu_{\tilde{A}\cup\tilde{B}}(x) := \max\left(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\right) \right\} .$$

Ensprechend setzt man für den Durchschnitt *beider Mengen*

$$\tilde{A} \ \cap \ \tilde{B} := \left\{ \left(x, \mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}(x)\right) \middle| x \in X, \ \mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}(x) := \min\left(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\right) \right\} .$$

Offensichtlich sind sowohl der Durchschnitt als auch die Vereinigung von Fuzzy-Mengen wieder Fuzzy-Mengen in X.

Die Operatoren für die Vereinigung und den Durchschnitt von Fuzzy-Mengen sind nicht eindeutig bestimmt. Es gibt viele Möglichkeiten der Fortsetzung der klassischen

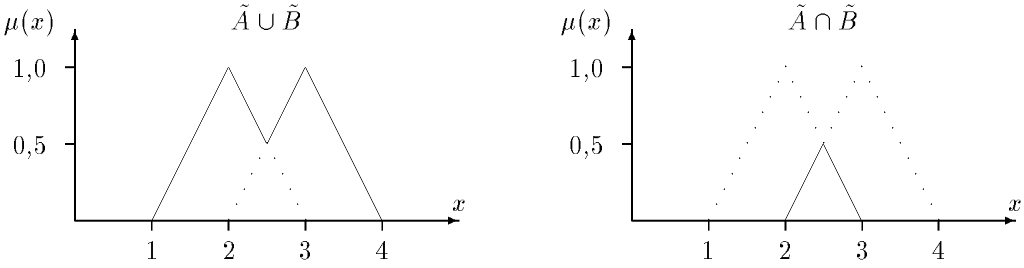

Abbildung 4: Vereinigung und Durchschnitt von Fuzzy-Mengen.

Mengenoperationen auf Fuzzy-Mengen, wie wir im nächsten Kapitel sehen werden. Vorab werden aber noch die Verknüpfungseigenschaften von Fuzzy Mengen untersucht.

Dazu sollen die in Tabelle 1 angeführten Gesetze für Fuzzy-Mengen überprüft werden.

Offenbar gilt die Involution auch für Fuzzy-Mengen, wie man leicht anhand der folgenden Gleichung erkannen kann

$$\mu_{\bar{\bar{\tilde{A}}}}(x) = 1 - \mu_{\bar{\tilde{A}}}(x) = 1 - (1 - \mu_{\tilde{A}}(x)) = \mu_{\tilde{A}}(x)$$

Die Kommutativität der Fuzzy-Vereinigung und des Fuzzy-Durchschnitts ergibt sich aufgrund der Vertauschbarkeit der Argumente des min- und des max-Operators. Auf ähnliche Weise läßt sich die Gültigkeit der übrigen Gesetze mit Ausnahme des Gesetzes vom Widerspruch und des Gesetzes vom ausgeschlossenen Dritten nachweisen. Für die letztgenannten Gesetze geben wir im folgenden Gegenbeispiele an.

Betrachten wir zunächst das Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten so erhalten wir die Vereinigung von $\tilde{A}$ und $\overline{\tilde{A}}$. Da aber der max-Operator, auf dem die Fuzzy-Vereinigung beruht, offenbar nur dann eine 1 liefert, wenn entweder $\mu_{\tilde{A}}(x) = 1$ oder $\mu_{\tilde{A}}(x) = 0$ ist, ist $\mu_{\tilde{A} \cup \bar{\tilde{A}}}(x) \neq 1$, wenn $\mu_{\tilde{A}}(x) \notin \{0, 1\}$ gilt. Damit können wir schliessen, daß für echte Fuzzy-Mengen gilt

$$\tilde{A} \cup \overline{\tilde{A}} \neq X \ .$$

In Abb. 5 ist ein Beispiel angeben, das das Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten für Fuzzy-Mengen widerlegt.

Ebenso ergibt sich für das Gesetz vom Widerspruch $\tilde{A} \cap \overline{\tilde{A}} \neq \emptyset$, indem wir gleiche Argumente wie zuvor verwenden. Auch hierfür ist in Abb. 6 ein Beispiel angegeben. Aufgrund der Ungültigkeit dieser Gesetze lassen sich die logischen Paradoxien, wie das eingangs erwähnte Paradoxon des spanischen Barbiers dadurch modellieren, daß der Zugehörigkeitsgrad (= Wahrheitswert) auf 0.5 gesetzt wird. Dadurch

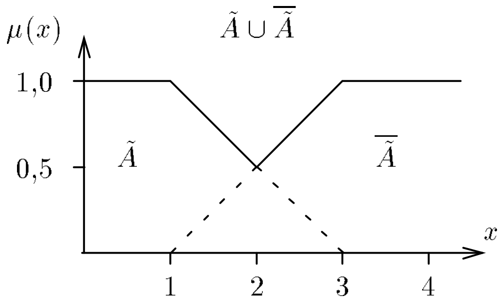

Abbildung 5: Vereinigung der beiden Fuzzy-Mengen aus Abb.2.

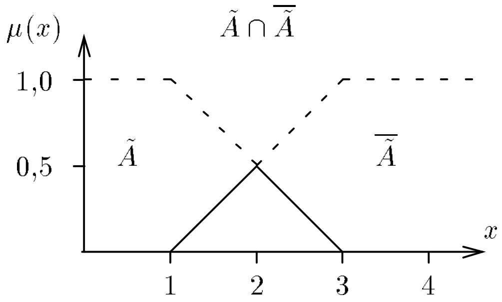

Abbildung 6: Durchschnitt der beiden Fuzzy-Mengen aus Abb.2.

Sets as Points Ansatz von B. KOSKO

Abschließend soll noch kurz auf die von B. KOSKO 1987 vorgestellt graphische Beschreibung von endlichen Fuzzy-Mengen eingegangen werden.

Voraussetzung für diese Art der Visualisierung ist die Endlichkeit des Grundraumes X. Sei dazu $n = |X|$ die Kardinalität von X, das heißt, die Anzahl der Elemente von X. Betrachten wir nun den n-dimensionalen Einheitswürfel I^n ($I = [0, 1]$), so läßt sich jede Teilmenge aus X mit Hilfe der Identikatorfunktion als eine Menge von Eckpunkten dieses Würfels auffassen. Wird anstelle der Identifikatorfunktion die Zugehörigkeitsfunktion verwendet, so läßt sich jede Fuzzy-Menge in X als ein Punkt im (und nicht unbedingt auf seinen Ecken) Hyperwürfel darstellen (vgl. Abb. 7). Neben Fuzzy-Mengen endlicher Grundräume lassen sich auch Verknüpfungen dieser Mengen wie die Fuzzy-Vereinigung oder der Fuzzy-Durchschnitt als Vereinigung oder Durchschnitt von Unterwuerfeln visuallisiert.

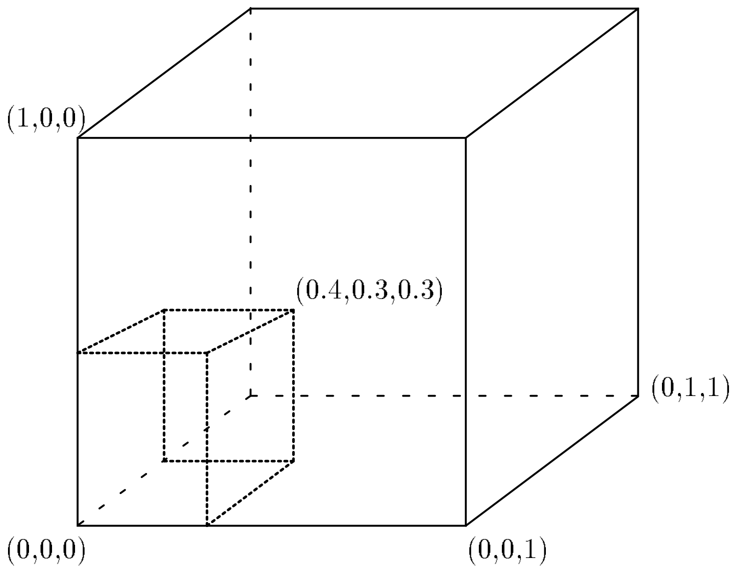

Abbildung 7: Sets as Points Darstellung einer Fuzzy-Menge eines dreielementigen Grundraums.

2 Operationen auf Fuzzy-Mengen

Zadeh stellte für die von ihm eingeführten Fuzzy-Mengen die Komplementbildung, Vereinigung und Durchschnitt gemäß

$$\begin{aligned}
\mu_{\overline{\tilde{A}}}(x)) &= 1 - \mu_{\tilde{A}}(x) \\
\mu_{\tilde{A}\cup\tilde{B}}(x) &= \max\left(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\right) \\
\mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}(x) &= \min\left(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\right)
\end{aligned}$$

vor. Dies ist allerdings nicht die einzige Möglichkeit diese Operationen zu definieren. Vielmehr werden wir ganze Klassen von Komplementabbildungen, Vereinigungs- und Durchschnittsoperatoren vorstellen. Dazu formalisieren wir die Grundeigenschaften dieser Abbildungen.

2.1 Fuzzy-Komplement

Ganz allgemein soll die Komplementabbildung $c : [0,1] \to [0,1]$ Zugehörigkeitsgrade auf Zugehörigkeitsgrade abbilden. Da crispe Mengen spezielle Fuzzy-Mengen sind, sollte eine Komplementabbildung den folgenden beiden Bedingungen genügen.

Bedingung 1:
Sei c eine Komplementabbildung, dann gelte $c(0) = 1$ *und* $c(1) = 0$. *(Randbedingungen)*

Bedingung 2:
c sei monoton fallend, *daß heißt, für alle* $a, b \in [0,1]$ *folgt mit* $a < b$ *unmittelbar* $c(a) \geq c(b)$.

Alle Funktionen die den Bedingungen 1 und 2 genügen bilden genau die Klasse der Komplementabbildungen für Fuzzy-Mengen. In den meisten praktischen Anwendungen werden aber an das Komplement von Fuzzy-Mengen zwei zusätzliche Bedingungen gestellt.

Bedingung 3:
Die Komplementabbildung c sei stetig.

Bedingung 4:
Die Komplementabbildung c sei involutiv, *daß heißt, für alle* $a \in [0,1]$ *gilt* $c(c(a)) = a$.

Die Klasse der Komplementabbildungen, die zusätzlich der Bedingung 3 genügen, bildet offenbar eine Unterklasse aller Komplementabbildungen. Ein Beispiel einer Abbildung dieser Unterklasse stellt die Funktion

$$c(a) = \frac{1}{2}(1 + \cos \pi a)$$

dar (vgl. Abb. 8). Aufgrund von $c(c(0.33)) = c(0.75) = 0.15$ ist diese nicht involutiv.

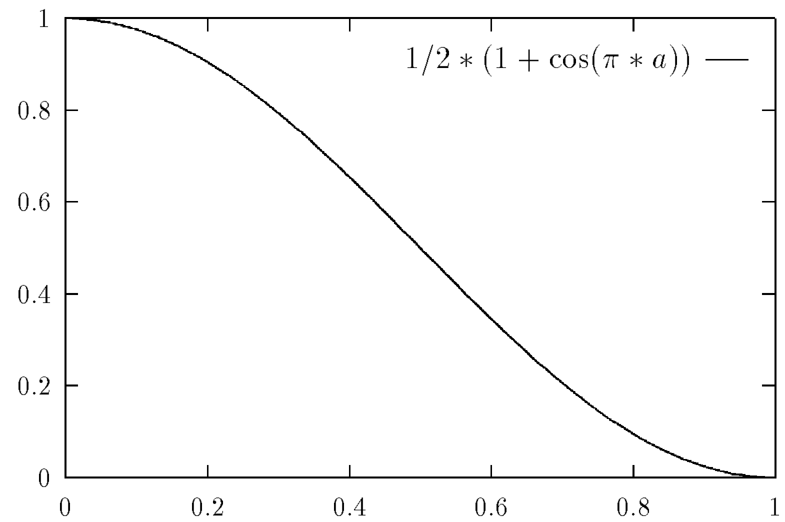

Abbildung 8: Beispiel für eine Komplementabbildung.

Eine Teilmenge der involutiven Komplemente stellt die nach SUGENO benannte SUGENO-Klasse dar. Diese ist durch

$$c_\lambda(a) = \frac{1-a}{1+\lambda a} \qquad \text{für} \quad \lambda \in]-1, \infty[$$

definiert. Für jeden Parameter λ erhält man so ein spezielles involutives Komplement. Dabei erhält man für $\lambda = 0$ gerade das ZADEH'sche Fuzzy-Komplement.

Eine andere Klasse von involutiven Komplementen stellt die YAGER-Klasse dar, die durch

$$c_w(a) = (1 - a^w)^{\frac{1}{w}} \qquad \text{für} \quad w \in]0, \infty[$$

gegeben ist. Hier ergibt sich ZADEH's Fuzzy Komplement für $w = 1$ (vgl. Abb. 9).

Eine wichtige Eigenschaft ist allen Fuzzy-Komplementen zu eigen: Dabei handelt es sich um das *Gleichgewicht* eines Fuzzy-Komplements. Dabei heißt ein Punkt $a \in [0, 1]$ ein Gleichgewicht von c, wenn a ein Fixpunkt von c ist, also wenn gilt $c(a) = a$. Dieser Punkt heißt Gleichgewicht, da er den Zugehörigkeitsgrad angibt, zu dem ein Punkt einer Fuzzy-Menge $\tilde{A}$ sowohl zu $\tilde{A}$ als auch zu dessen Komplement $\overline{\tilde{A}}$ gehört. Für das ZADEH'sche Komplement liegt das Gleichgewicht bei 0.5, was unmittelbar aus der Gleichung $a = 1 - a$ folgt. Für ein beliebiges Fuzzy-Komplement, welches den Bedingungen (1) und (2) genügt, gilt nun der folgende Satz.

Satz 2.1
Es sei c ein Fuzzy-Komplement, dann hat c höchstens ein Gleichgewicht. Wird darüberhinaus c als stetiges Fuzzy-Komplement vorausgesetzt, dann hat c genau ein Gleichgewicht.

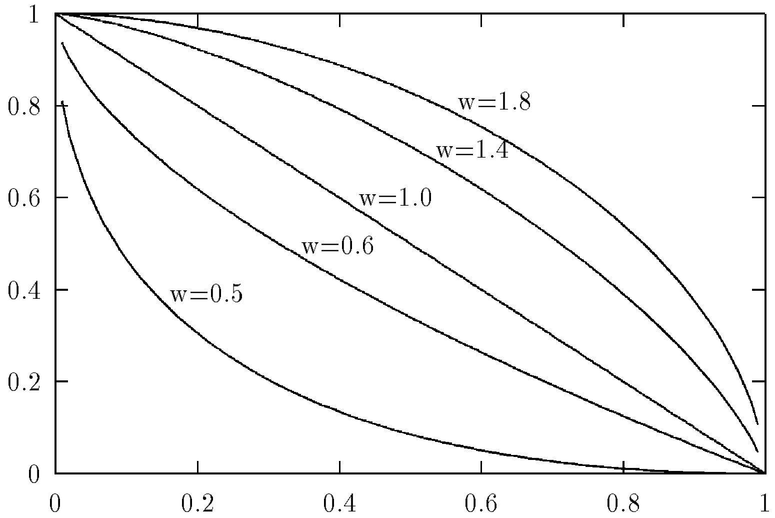

Abbildung 9: YAGER's parametrisiertes Fuzzy-Komplement für $w = 1$, $w = 0.6$ und $w = 0.5$

Ganz entsprechend können wir Klassen von Vereinigungs- und Durchschnittoperatoren einführen, indem wir die grundlegenen Eigenschaften dieser Abbildungen fixieren.

2.2 Fuzzy-Durchschnitt

Ähnlich wie für das Fuzzy-Komplement, so können wir auch für den Durchschnitt von Fuzzy-Mengen notwendige Bedingungen formulieren. Allgemein ist ein Durchschnittsoperator i (für intersection) eine Abbildung

$$i : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1] \ .$$

Da i eine Fortsetzung der binären Durchschnittsoperation sein soll, erhalten wir für i zunächst folgende Randbedingungen

Bedingung 1:
Für $a \in [0,1]$ gelten die Randbedingungen $i(0,0) = 0$, $i(a,1) = i(1,a) = a$ und $i(1,1) = 1$.

Zusätzlich wird gefordert:

Bedingung 2:
Für alle $a, b \in [0,1]$ gelte: $i(a,b) = i(b,a)$ (Kommutativität).

Bedingung 3:
Für $a \leq a'$ und $b \leq b'$ sei i *monoton*, das heißt, es gelte $i(a,b) \leq i(a',b')$.

Bedingung 4:
Für $a, b, c \in [0,1]$ gilt $i(i(a,b),c) = i(a,i(b,c))$ (Assoziativität).

Abbildungen mit diesen Eigenschaften spielen eine wichtige Rolle in der Fuzzy-Set-Theorie. Daher führen wir folgende Definiton ein.

Definition 2.2
*Eine t–*Norm *ist eine Funktion* $t : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$*, für die die Bedingungen (1) – (4) gelten.*

Zusätzlich zu den Bedingungen (1) – (4) ist es manchmal nützlich, folgende Eigenschaften zu fordern.

Bedingung 5: i ist eine stetige Funktion.

Bedingung 6: i ist idempotent, das heißt, für alle $a \in [0,1]$ gilt $i(a,a) = a$.

Beispiel 2.3
Ein Beispiel für parametrisierte t-Normen stellen die Operatoren i_w von R. Yager (vgl. [Yager,1980]) dar:
Dazu seien $\tilde{A}$ und $\tilde{B}$ Fuzzy-Mengen in X, dann definiert R. Yager den Durchschnittsoperator vermöge

$$\begin{aligned}
\tilde{A} \cap \tilde{B} &= \left\{ \left(x, \mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}(x)\right) \,\middle|\, x \in X \right\} \quad \text{durch} \\
\mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}(x) &= 1 - \min\left(1, \left((1-\mu_{\tilde{A}}(x))^w + (1-\mu_{\tilde{B}}(x))^w\right)^{1/w}\right) \\
&= i_w\left(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\right)
\end{aligned}$$

für $w \in]0,\infty[$. Diese Durchschnittsoperatoren sind offenbar auch stetig, und genügen daher auch der Bedingung 5.

Satz 2.4
Es seien $a, b \in [0,1]$. Dann gilt für den Operator i_w:

$$\lim_{w\to\infty} i_w = \lim_{w\to\infty} \left(1 - \min\left(1, ((1-a)^w + (1-b)^w)^{\frac{1}{w}}\right)\right) = \min(a,b) \ .$$

Wir können sogar für alle t-Normen zwei Grenzoperatoren angeben. Das ist Inhalt der folgenden Bemerkung.

Bemerkung 2.5
Für alle t-Normen gilt

$$t_w(a,b) \le t(a,b) \le \min(a,b)$$

mit

$$t_w(a,b) := \begin{cases} a & : \ b = 1 \\ b & : \ a = 1 \\ 0 & : \ \text{sonst.} \end{cases}$$

Das bedeutet, daß der min-Operator gerade den Grenzoperator der t-Normen darstellt. G. Klir und T. Folger bezeichnen ihn deshalb auch als den optimistischsten Durchschnittsoperator [Klir et al.,1988].

Weitere Beispiele für parametrisierte Durchschnittsoperatoren haben wir in Tabelle 2 zusammengefaßt.

Referenz	parametrisierte t-Normen	Gültigkeitsbereich
Hamacher (1978)	$\dfrac{ab}{\gamma + (1-\gamma)(a+b-ab)}$	$\gamma \in]0,\infty[$
Frank (1979)	$\log_s \left(1 + \dfrac{(s^a-1)(s^b-1)}{s-1}\right)$	$s \in]0,\infty[$
Yager (1980)	$1 - \min(1, ((1-a)^w + (1-b)^w)^{1/w})$	$w \in]0,\infty[$
Dubois, Prade (1980)	$\dfrac{ab}{\max(a,b,\alpha)}$	$\alpha \in]0,1[$
Dombi (1982)	$\dfrac{1}{1 + \left((a^{-1}-1)^\lambda + (b^{-1}-1)^\lambda\right)^{1/\lambda}}$	$\lambda \in]0,\infty[$

Tabelle 2: Beispiele für parametrisierte t-Normen.

2.3 Fuzzy-Vereinigung

Entsprechen den Bedingungen (1) – (4) für Durchschnittsoperatoren lassen sich auch die Vereinigungsoperatoren charakterisieren. Da auch diese Klasse eine wichtige Rolle in der Theorie der Fuzzy-Mengen insbesondere in den Anwendungen spielt, formulieren wir entsprechend zu Definiton 2.2 folgende

Definition 2.6
Eine Abbildung $s : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ *heißt* t-Conorm *oder auch* s-Norm, *wenn für* s *die Bedingungen i) bis iv) gelten:*

i) $s(0,0) = 0, \quad s(a,0) = s(0,a) = a \quad \forall\, a \in [0,1]$ (Randbedingungen)

ii) $s(a,b) \leq s(c,d)$, *falls* $a \leq c$ *und* $b \leq d$ *mit* $a,b,c,d \in [0,1]$ (Monotonie)

iii) $s(a,b) = s(b,a) \quad \forall a,b \in [0,1]$ (Kommutativität)

iv) $s(a, s(b,c)) = s(s(a,b),c) \quad \forall\, a,b,c \in [0,1]$ (Assoziativität)

Auch für s-Normen kann die Forderung nach Stetigkeit und Idempotenz hilfreich sein. Die zu Yager's Durchschnittsoperatoren entsprechenden parametrisierten Vereinigungsabbildungen betrachten wir im nachfolgenden Beispiel

Beispiel 2.7
Es seien $\tilde{A}$ und $\tilde{B}$ Fuzzy-Mengen in X, dann definiert R. Yager den Vereinigungsoperator u_w

$$\begin{aligned}
\tilde{A} \cup \tilde{B} &= \left\{ \left(x, \mu_{\tilde{A}\cup\tilde{B}}(x)\right) \,\middle|\, x \in X \right\} \quad \text{durch} \\
\mu_{\tilde{A}\cup\tilde{B}}(x) &= \min\left(1, \left((\mu_{\tilde{A}}(x))^p + (\mu_{\tilde{B}}(x))^p\right)^{1/p}\right) \\
&= u_w(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{A}}(x)) \; .
\end{aligned}$$

Satz 2.8 *Seien $a, b \in [0,1]$. Dann gilt für den Grenzoperator von u_w*

$$\lim_{w\to\infty} \min\left(1, (a^w + b^w)^{1/w}\right) = \max(a,b) \; .$$

Bemerkung 2.9
Ähnlich wie in Bemerkung 2.5 gilt für den max-Operator

$$s_w(a,b) \geq s(a,b) \geq \max(a,b)$$

mit

$$s_w(a,b) := \begin{cases} a & : \quad b = 0 \\ b & : \quad a = 0 \\ 1 & : \quad \text{wenn } a \neq 0 \;\text{ und } b \neq 0. \end{cases}$$

Daher bezeichnen G. Klir und T. Folger den max-Operator auch als den pessimistischsten Vereinigungsoperator.

Bemerkung 2.10
Definiert man die Komplementbildung wie in Definition 1.7, so kann man zu jeder t-Norm die zugehörige t-Conorm mittels

$$t(a,b) = 1 - s(1-a, 1-b)$$

berechnen. Insbesondere gilt für Zadehs Operatoren:

$$\min(a,b) = 1 - \max(1-a, 1-b)$$

und damit ist auch formal max die zu min gehörige Conorm.

In Tabelle 3 sind die zu den in Tabelle 2 angegebenen t-Normen gehörenden Vereinigungsoperatoren angegeben.

An dieser Stelle soll noch einmal die exponierte Stellung von max und min innerhalb der s- und t-Normen deutlich gemacht werden. Bellmann und Giertz wiesen 1973 in [Bellmann et al.,1973] den folgenden Satz nach.

Satz 2.11
Es seien $\tilde{A}, \tilde{B}$ Fuzzy-Mengen in X. Dann sind unter den folgenden Bedingungen die in Definition 1.8 genannten Operatoren min *und* max *eindeutig bestimmt:*

Referenz	parametriesierte s-Normen	Gültigkeitsbereich
Hamacher (1978)	$\dfrac{a+b-(2-\gamma)ab}{1-(1-\gamma)ab}$	$\gamma \in]0,\infty[$
Frank (1979)	$1 - log_s\left(1+\dfrac{(s^{1-a}-1)(s^{1-b}-1)}{s-1}\right)$	$s \in]0,\infty[$
Yager (1980)	$\min(1,(a^w+b^w)^{1/w})$	$w \in]0,\infty[$
Dubois, Prade (1980)	$\dfrac{a+b-ab-\min(a,b,1-\alpha)}{\max(1-a,1-b,\alpha)}$	$\alpha \in]0,1[$
Dombi (1982)	$\dfrac{1}{1+\left((a^{-1}-1)^{-\lambda}+(b^{-1}-1)^{-\lambda}\right)^{-1/\lambda}}$	$\lambda \in]0,\infty[$

Tabelle 3: parametrisierte s-Normen.

i) $\exists\, t, s : [0,1]\times[0,1] \to [0,1]$, *so daß* $\forall\, x \in X$:
$$\mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}(x) = t\Big(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\Big) \quad \textit{und} \quad \mu_{\tilde{A}\cup\tilde{B}}(x) = s\Big(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\Big)$$

ii) t, s *sind kommutativ, assoziativ und gegenseitig distributive Operatoren.*

iii) t, s *sind bzgl. jedes Arguments stetig und monoton wachsend.*

iv) $t(u,u), s(u,u)$ *sind streng monoton wachsend.*

v) $t(1,1) = 1, \quad s(0,0) = 0$

Dieser Satz liefert gleichzeitig das stärkste theoretische Argument für die Anwendung von max und min als Vereinigungs- und Durchschnittsoperator.

Darüberhinaus konnten sie zeigen, daß Vereinigung-, Durchschnitt- und Komplementoperator, die dem Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten und dem Gesetz vom Widerspruch genügen, entweder nicht idempotent oder nicht distributiv sind.

Mittelnde Operatoren

Neben den t- und s-Normen betrachtet man ebenso die Operatoren, die „zwischen" Minimum- und Maximum-Operator liegen. Die Klasse dieser Operatoren bezeichnet man als *mittelnde Operatoren.* Sie sind wie folgt definiert:

Definition 2.12 *Ein* mittelnder Operator m *ist eine Abbildung* $m : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$, *die folgenden Bedingungen genügt:*

i) $m(a,b) \leq m(c,d)$, *falls* $a \leq c$ *und* $b \leq d$ (Monotonie)

ii) $m(a,b) = m(b,a) \quad \forall a,b \in [0,1]$ (Kommutativität)

iii) $m(a, m(b,c)) = m(m(a,b),c) \quad \forall a,b,c \in [0,1]$ (Assoziativität)

iv) $\min(a,b) \leq m(a,b) \leq \max(a,b) \quad \forall a,b \in [0,1]$ (Randbedingungen)

Bemerkung 2.13 Der nachfolgende mittelnde Operator, der „*generalized mean operator*" genannt wird, stammt von A. DUJMOVIC ([Dujmovic,1974]) und wird von H. DYCKHOFF und W. PEDRYCZ in [Dyckhoff et al.,1984] vorgeschlagen. Es ist

$$g(x_1, \ldots, x_n; p; w_1, \ldots, w_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} w_i x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} , \quad \text{wobei} \quad \sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \quad \text{gilt} .$$

Dabei ist p eine positive ganze Zahl, und es gilt $w_i, x_i \in \mathbb{R}$ für $1 \leq i \leq n$.

Neben den bereits beschriebenen Operatoren spielt noch eine weitere Klasse von Operatoren in der Fuzzy-Set-Theorie eine wichtige Rolle. Diese nennt man *hybride Operatoren.* Sie werden als geometrisches oder arithmetisches Mittel aus zugehörigen t-Normen und t-Conormen gebildet.

Beispiel 2.14 Als Beispiel soll hier kurz das auf H.-J. ZIMMERMANN und P. ZYSNO zurückgehende γ-Modell vorgestellt werden (vgl. [Zimmermann et al.,1980, Zimmermann et al.,1983]). Diesen Operator nennen die Autoren *compensatory AND operator.* Für ihn gilt

$$\mu_{\tilde{A}_i,\mathrm{comp}}(x) = \left(\prod_{i=1}^{n} \mu_i(x) \right)^{1-\gamma} \left(1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - \mu_i(x)) \right)^{\gamma} \quad \text{für} \quad x \in X \quad \text{und} \quad 0 \leq \gamma \leq 1 .$$

Dabei ist γ ein Parameter, der den Grad der Kombination zwischen dem algebraischen Produkt (AND) und der algebraischen Summe (OR) beschreibt.

3 Fuzzy-Relationen

Mit klassischen – im Sinne von scharfen – Relationen wird das Vorhandensein von Eigenschaften zwischen scharfen Mengen beschrieben. Dabei gilt auch für Relationen die binäre Sichtweise womit ein Element zu einer Relation gehört oder nicht. Durch Fuzzy-Relationen können auch hier graduelle Zughörigkeiten beschrieben werden, so daß diese eine Verfeinerung des klassischen Relationenbegriffs darstellen. Dabei werden wir uns auf die Konzepte beschränken, die im Verlauf der Vorlesung eine Rolle spielen werden.

3.1 Scharfe Relationen

Das *cartesische Produkt* von zwei scharfen Grundmengen X und Y ist definiert vermöge

$$X \times Y = \Big\{(x,y) \;\Big|\; x \in X \quad \text{und} \quad y \in Y\Big\} \; .$$

Dabei ist zu beachten, daß wenn $X \neq Y$ vorausgesetzt wird, $X \times Y \neq Y \times X$ gilt. Eine

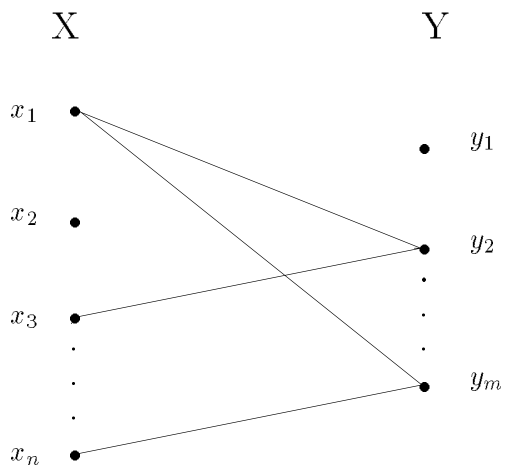

Abbildung 10: Beispiel für eine scharfe Relation

Relation zwischen scharfen Mengen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ist eine Teilmenge des cartesischen Produkt $X_1 \times \cdots \times X_n$. Dabei gilt

$$R(X_1, X_2, \ldots, X_n) \subset X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \; .$$

Da eine Relation selbst eine Menge ist, können nicht nur Mengenoperationen ohne Modifikation auf Relationen angewendet werden, sondern Relationen können auch vollständig durch ihre zugehörige charakteristische Funktion χ beschrieben werden. Wie für Mengen gilt somit

$$\chi_R(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1 & : \quad \text{genau dann wenn} \quad (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R \; , \\ 0 & : \quad \text{sonst} \; . \end{cases} \tag{4}$$

Im nächsten Abschnitt fuzzifizieren wir dieses Konzept entsprechend der Vorgehensweise des 1. Kapitels.

3.2 Fuzzy-Relationen

Bis jetzt haben wir nur eindimensionale Fuzzy-Mengen betrachtet. Die Bildung des cartesischen Produkt stellt eine Methode dar, mit der man von eindimensionalen zu mehrdimensionalen Mengen gelangt. Dieses Konzept erweitern wir zunächst auf Fuzzy-Mengen. Für zwei Fuzzy-Mengen $\tilde{A} \in X$ und $\tilde{B} \in Y$, die durch ihre jeweilige Zugehörigkeitsfunktion $\mu_{\tilde{A}}$ bzw. $\mu_{\tilde{B}}$ gegeben sind, ist das cartesische Produkt $\tilde{A} \times \tilde{B}$ beider Fuzzy-Mengen wieder eine Fuzzy-Menge $\tilde{R}$. Diese liegt im cartesischen Produkt $X \times Y$ der Grundräume von $\tilde{A}$ und $\tilde{B}$ und wird durch

$$\mu_{\tilde{R}}(x, y) = \min\Big(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(y)\Big) \tag{5}$$

gegeben.

Genauso wie wir Fuzzy-Mengen mittels der Erweiterung der charakteristischen Funktion eingeführt haben, so können wir auch Fuzzy-Relationen durch Fortsetzung der in Gleichung (4) dargestellten Funktion definieren.

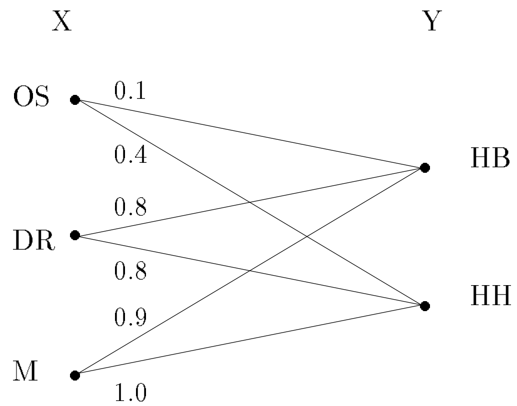

Abbildung 11: Beispiel für eine fuzzy Relation

Definition 3.1
Eine Fuzzy-Relation $\tilde{R}$ *ist eine Fuzzy-Menge auf dem cartesischen Produkt* $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$*, wobei jedem Element* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *ein Zugehörigkeitsgrad*

$$\mu_{\tilde{R}(X_1, X_2, \ldots, X_n)}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in [0, 1]$$

zugeordnet ist.

Semantisch läßt sich der Zugehörigkeitsgrad als Stärke der Fuzzy-Relation $\tilde{R}$ zwischen den Elementen eines Tupels interpretieren.

Betrachtet man eine Fuzzy-Relation zwischen zwei endlichen Grundräumen X und Y so bietet sich eine Darstellung mittels eine Inzidenzmatrix an. Dabei bezeichnet der Wert des Matrixelements $m_{i,j}$ den Zugehörigkeitsgrad zwischen dem i-ten Element von X und dem j-ten Element von Y.

Als Beispiel sei hier die Entfernung von deutschen Städten betrachten. Dazu definieren wir $X :=$ {Osnabrück, Dresden, München } und $Y :=$ { Bremen, Hamburg}. Die Fuzzy-Relation *ist weit entfernt von* wird dann durch folgende Matrix gegeben:

$$\tilde{T} \;:=\; \begin{array}{l} \\ \text{Osnabrück} \\ \text{Dresden} \\ \text{München} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Bremen} & \text{Hamburg} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.1 & 0.4 \\ 0.8 & 0.8 \\ 0.9 & 1.0 \end{pmatrix} \end{array} .$$

In einem weiteren Beispiel betrachten wir nun eine n-stellige Relation, die *Projektion* proj auf eine Fuzzy-Menge aus $X_{i_1} \times X_{i_2} \times \cdots \times X_{i_m}$. Dazu sei $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ der Grundraum. Durch eine Projektion wird ein n-Tupel $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X$ auf ein Element $(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}) \in X_{i_1} \times X_{i_2} \times \cdots \times X_{i_m}$ abgebildet. Dabei ist $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}$ eine Teilmenge der $x_1, \ldots, x_n$. Die Projektion einer Fuzzy-Menge $\tilde{A}$ liefert eine Fuzzy-Menge $\tilde{A}_p$, die durch die Zugehörigkeitsfunktion von $\mu_{\tilde{A}_p}$ bestimmt ist. In der Formulierung nach Zadeh gilt

$$\mathrm{proj}(\tilde{\mathrm{R}}; \mathrm{X_{i_1}}, \mathrm{X_{i_2}}, \ldots, \mathrm{X_{i_k}}) = \int\limits_{\mathrm{X_{i_1}} \times \mathrm{X_{i_2}} \times \cdots \times \mathrm{X_{i_k}}} \frac{\sup(\mathrm{x_1}, \mathrm{x_2}, \ldots, \mathrm{x_n})}{(\mathrm{x_{i_1}}, \mathrm{x_{i_2}}, \ldots, \mathrm{x_{i_k}})} .$$

Entsprechend läßt sich $\mu_{\tilde{R}}$ auch als

$$\mu_{(\tilde{R}; X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_k})}(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}) = \sup_{x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_l}} \Big(\mu_{\tilde{R}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \Big)$$

schreiben. Dabei sind $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_k}$ die zu $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}$ komplementären Elemente des n-Tupels $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Sind $\tilde{R}$ und $\tilde{S}$ Fuzzy-Relationen auf $X \times Y$ so können Mengenoperationen auf den Relationen betrachtet werden. Basierend auf den entsprechenden Operationen für eindimensionale Fuzzy-Mengen gilt nun

$$\begin{aligned} \mu_{\tilde{R} \cup \tilde{S}}(x, y) &= \max \Big(\mu_{\tilde{R}}(x, y), \mu_{\tilde{S}}(x, y) \Big) \\ \mu_{\tilde{R} \cap \tilde{S}}(x, y) &= \min \Big(\mu_{\tilde{R}}(x, y), \mu_{\tilde{S}}(x, y) \Big) \\ \mu_{\overline{\tilde{R}}}(x, y) &= 1 - \mu_{\tilde{R}}(x, y) . \end{aligned}$$

Ganz entsprechend können auch die im vorherigen Kapitel eingeführten t- und s-Normen verwendet werden.

3.3 Komposition von Relationen

Neben den üblichen Mengenoperationen spielt die Komposition von Relationen eine wichtige Rolle. In diesem Abschnitt werden zwei unterschiedliche Kompositionsmöglichkeiten besprochen. Dabei gehen wir bei der Fuzzifizierung ganz entsprechend der Fuzzyfizierung des cartesischen Produkts von Mengen vor.

Für die folgenden Betrachtungen sei $\tilde{R}$ eine Fuzzy-Relation aus $X \times Y$ und $\tilde{S} \subset Y \times Z$ eine weitere Fuzzy-Relation. Gesucht ist im folgenden eine Beschreibung für

$$\tilde{T} = \tilde{S} \circ \tilde{R} \, .$$

max-min-Komposition

Bei der max-min Komposition werden max und min zur Berechnung des Zugehörigkeitsgrades von dem Element (x, z) zur Relation $\tilde{T}$ verwendet. Dabei wird zunächst der minimale Zugehörigkeitsgrad der Elemente (x, y) und (y, z) für jedes $y \in Y$ bestimmt. Den gesuchten Zugehörigkeitsgrad für das Element (x, z) erhält man schließlich als maximalen Wert aller Minima. Dabei wird von einer endlichen Relation ausgegangen. Bei unendlichen Relationen erhält man den Zugehörigkeitsgrad indem anstelle des max-Operators entsprechend das Supremum berechnet wird. Ingesamt ergibt sich für jedes Element (x, z) der Relation $\tilde{T}$ der gemäß Gleichung (6) zu berechnende Zugehörigkeitswert

$$\mu_{\tilde{T}}(x, z) = \max_y \left(\min \left(\mu_{\tilde{R}}(x, y), \mu_{\tilde{S}}(y, z) \right) \right) \tag{6}$$

Betrachten wir zunächst folgendes Beispiel:

Beispiel 3.2
Gegeben seien die Mengen

$$\begin{aligned} X &:= \{x_1, x_2\} \\ Y &:= \{y_1, y_2, y_3\} \\ Z &:= \{z_1, z_2\} \end{aligned}$$

sowie die Fuzzy-Relationen $\tilde{R}$ durch

$$\tilde{R} := \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 0.2 & 0.6 & 0.9 \\ 0.4 & 0.6 & 1.0 \end{pmatrix} \end{array}$$

und $\tilde{S}$ durch

$$\tilde{S} := \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} z_1 & z_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0.1 & 0.5 \\ 0.6 & 0.4 \\ 0.8 & 0.9 \end{pmatrix} \end{array} \, .$$

Die Fuzzy-Relation $\tilde{T}$ ist eine Teilmenge des cartesischen Produkts $X \times Y$, wobei sich die Zugehörigkeitsfunktion von $\tilde{T}$ durch

$$\tilde{T} := \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} z_1 & z_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 0.8 & 0.9 \\ 0.8 & 0.9 \end{pmatrix} \end{array} .$$

ergibt. Für den Zugehörigkeitsgrad von (x_1, z_1) zu $\tilde{T}$ gilt dabei

$$\begin{aligned} \mu_{\tilde{T}}(x_1, z_1) &= \max\Big(\min\big(\mu_{\tilde{R}}(x_1, y_1), \mu_{\tilde{S}}(y_1, z_1)\big), \\ &\qquad \min\big(\mu_{\tilde{R}}(x_1, y_2), \mu_{\tilde{S}}(y_2, z_1)\big), \\ &\qquad \min\big(\mu_{\tilde{R}}(x_1, y_3), \mu_{\tilde{S}}(y_3, z_1)\big)\Big) \\ & \max\big(0.1, 0.2, 0.8\big) \end{aligned}$$

Abschließend stellen wir noch einige Eigenschaften der max-min-Komposition zusammen.

Satz 3.3

i.) Die max-min-*Komposition ist assoziativ.*

ii.) Die max-min-*Komposition ist beiderseitig distributiv über der Fuzzy-Vereinigung, d.h. seien $\tilde{R} \in Y \times Z$, $\tilde{S} \subset X \times Y$ und $\tilde{T} \subset X \times Y$ Fuzzy-Relationen, dann gilt*

$$\tilde{R} \circ (\tilde{S} \cup \tilde{T}) = (\tilde{R} \circ \tilde{S}) \cup (\tilde{R} \circ \tilde{T})$$

iii.) Die max-min-*Komposition ist nicht kommutativ und nicht distributiv über dem Fuzzy-Durchschnitt.*

max-Produkt-Komposition

Eine andere Art der Komposition stellt die max-Produkt-Komposition dar. Dabei wird anstelle des Minimums die Produktbildung als Durchschnittsoperator verwendet. Wäre beispielsweise in dem obigen Beispiel 3.2 die Mengen X, Y und Z durch

$$\begin{aligned} X &:= \{\text{Bremen, Hamburg}\} \\ Y &:= \{\text{Osnabrück, Dresden, München}\} \\ Z &:= \{\text{Münster, Berlin}\} \end{aligned}$$

gegeben, so würde das Element (Bremen, Münster) mit dem Zugehörigkeitsgrad 0.8 zur Relation der entfernt liegenden deutschen Städte gehören. Dies ist ein Grund, warum

Klir und Folger dem min-Operator als „optimistischen“ Durchschnittsoperator bezeichneten. Berechnet man $\tilde{T}$ hingegen nach der max-Produkt-Komposition so ergeben sich die Zugehörigkeitswerte der Elemente aus $\tilde{T}$ gemäß

$$\mu_{\tilde{T}}(x,z) = \max_y \left(\mu_{\tilde{R}}(x,y) * \mu_{\tilde{S}}(y,z)\right)$$

zu

$$\tilde{T} \ := \ \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} z_1 & z_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 0.72 & 0.81 \\ 0.80 & 0.90 \end{pmatrix} \end{array} .$$

Satz 3.3 gilt hier ganz entsprechend. Allgemein lassen sich natürlich auch Kompositionen mit beliebigen t-Normen betrachten. Auch für diese Verknüpfungen gelten die Eigenschaften aus Satz 3.3.

In der Mathematik stößt man häufig auf symmetrische oder reflexive oder andere Relationen wie Äquivalenzrelationen. Diese Konzepte lassen sich auch auf Fuzzy-Relationen erweitern, sollen aber im folgenden nicht mehr betrachtet werden. Hier verweisen wir auf [Klir et al.,1988].

4 Fuzzy-Arithmetik

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mir unscharfen Zahlen (z.B. ungefähr vier) und mit Verknüpfungen dieser Zahlen. Dazu werden zunächst Fuzzy-Zahlen als spezielle Fuzzy-Mengen definiert. Mit Hilfe des Extensionsprinzips, mit dem sich mathematische Theorien in die Fuzzy-Set-Theorie fortsetzen lassen, werden die klassischen Rechenoperationen erweitert.

4.1 Fuzzy-Zahlen

Im folgenden soll mit $\tilde{\mathcal{P}}(X)$ die Menge aller Fuzzy-Mengen über der Grundmenge X bezeichnet werden. Wir wollen nun Fuzzy-Mengen über $\mathbb{R}$ definieren, um dann anschließend mit Hilfe des Extensionsprinzips Rechenoperationen zwischen solchen Mengen beziehungsweise Zahlen einführen zu können. Da eine *Fuzzy-Zahl* gewissen Voraussetzungen genügen soll, geben wir zunächst weitere Definitionen an.

Definition 4.1 *Eine Fuzzy-Menge $\tilde{A} \in \tilde{\mathcal{P}}(X)$ heißt* normal*, falls gilt*

$$hgt(\tilde{A}) := \sup_{x \in X} \Big(\mu_{\tilde{A}}(x)\Big) = 1 \ .$$

Mit $hgt(\tilde{A})$ wird dabei die Höhe der Fuzzy-Menge *$\tilde{A}$ bezeichnet.*

Die zweite Bedingung die an eine Fuzzy-Zahl gestellt wird, formalisieren wir in der folgenden Definition:

Definition 4.2 *Eine Fuzzy-Menge $\tilde{A} \in \tilde{\mathcal{P}}(X)$ heißt* konvex*, falls für alle $x_1, x_2 \in X$ und alle $\lambda \in [0,1]$ gilt:*

$$\mu_{\tilde{A}}\Big(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\Big) \geq \min\Big(\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)\Big) \quad .$$

In Abbildung 12 wird eine konvexe und eine nicht konvexe Fuzzy-Menge über $\mathbb{R}$ dargestellt.

Definition 4.3 *Eine Fuzzy-Menge $\tilde{A} \in \tilde{\mathcal{P}}(\mathbb{R})$ heißt* Fuzzy-Zahl*, falls $\tilde{A}$ eine normale und konvexe Fuzzy-Menge über $\mathbb{R}$ ist, für die gilt:*

i) Es existiert genau ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $\mu_{\tilde{A}}(x_0) = 1$. x_0 heißt dann Mittelwert *oder* Modalwert *von $\tilde{A}$.*

ii) Die Zugehörigkeitsfunktion $\mu_{\tilde{A}}(x)$ ist stückweise stetig.

Die Menge der Fuzzy-Zahlen über $\mathbb{R}$ soll im folgenden mit FZ bezeichnet werden. Ähnlich wie bei reellen Zahlen können wir auch hier positive und negative Fuzzy-Zahlen betrachten.

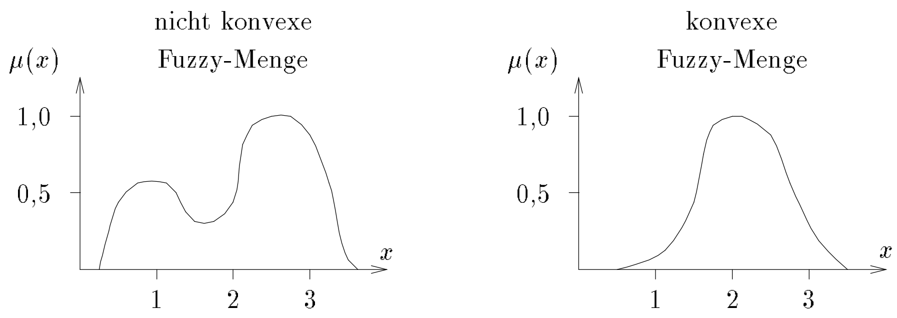

Abbildung 12: Beispiel für eine nicht konvexe und eine konvexe Fuzzy-Menge.

Definition 4.4 *Eine Fuzzy-Zahl* $\tilde{A} \in \mathrm{FZ}$ *heißt* positiv, *falls für die Zugehörigkeitsfunktion gilt*

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = 0 \quad \forall\, x \leq 0 \ .$$

Entsprechend heißt $\tilde{A}$ negativ, *falls* $\mu_{\tilde{A}}(x) = 0$ *für alle* $x \geq 0$ *gilt.*

Neben positiven und negativen Fuzzy-Zahlen (vgl. Abbildung 13) gibt es eine weitere Menge von Fuzzy-Zahlen, deren Träger sowohl positive als auch negative reelle Werte besitzt. Dazu führen wir folgende Definition ein.

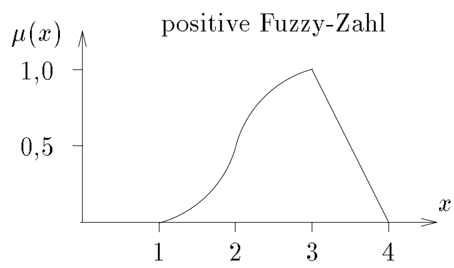

Abbildung 13: Beispiel für eine positive Fuzzy-Zahl.

Definition 4.5 *Eine Fuzzy-Zahl* $\tilde{A}$ *heißt* Fuzzy-Null, *wenn es eine reelle Zahl* $r > 0$ *gibt, so daß sowohl* $\mu_{\tilde{A}}(-r) \neq 0$ *als auch* $\mu_{\tilde{A}}(r) \neq 0$ *gilt.*

Für das Rechnen mit Fuzzy-Zahlen ist es hilfreich, eine bestimmte Darstellungsform für diese Zahlen einzuführen. Dazu betrachten wir folgende Definition:

Definition 4.6 *Eine* Fuzzy-Zahl $\tilde{A} = (a_m, a_l, a_r)_{LR}$ in LR-Darstellung *(oder* vom Typ *LR) ist eine Fuzzy-Zahl aus $\mathbb{R}$, für die gilt*

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} L\left(\frac{a_m - x}{a_l}\right) & : \ \textit{für} \quad a_m - a_l \le x < a_m \\ R\left(\frac{x - a_m}{a_r}\right) & : \ \textit{für} \quad a_m \le x \le a_m + a_r \\ 0 & : \ \textit{sonst} \ . \end{cases} \tag{7}$$

Dabei sind L und R monotone Referenzfunktionen von $[0,1]$ nach $[0,1]$, für die $L(0) = R(0) = 1$ und $L(1) = R(1) = 0$ gilt (vgl. Abbildung 14).

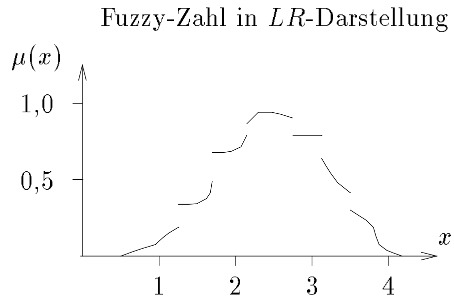

Abbildung 14: Beispiel für eine Fuzzy-Zahl vom Typ LR. Sie besitzt monotone und stückweise stetige Referenzfunktionen.

Die Fuzzy-Zahlen in LR-Darstellung werden im folgenden kurz mit

$$(a_m, a_l, a_r)_{LR}$$

bezeichnet. Für das Rechnen mit Fuzzy-Zahlen ist die folgende Definition hilfreich.

Definition 4.7 *Es sei $\tilde{A} \in \tilde{\mathcal{P}}(X)$ eine Fuzzy-Menge. Dann wird die crispe Menge*

$$\tilde{A}_\alpha := \left\{ x \in X \middle| \ \mu_{\tilde{A}}(x) \ge \alpha \right\} \tag{8}$$

für $\alpha \in (0,1]$ mit α-Schnitt *oder* Niveaumenge *von $\tilde{A}$ bezeichnet. Die crispe Menge*

$$\tilde{A}_{\overline{\alpha}} := \left\{ x \in X \middle| \ \mu_{\tilde{A}}(x) > \alpha \right\} \tag{9}$$

heißt strenger α-Schnitt *oder* strenge Niveaumenge.

Betrachten wir diese Definition für Fuzzy-Zahlen $\tilde{A}$, so entspricht der α-Schnitt $\tilde{A}_\alpha$ dem Intervall $[a_\alpha^-, a_\alpha^+]$. Für $\alpha = 0$ liefert Definition 4.7 gerade den Grundraum X. Deshalb definieren wir α-Schnitte gemäß Definition 4.7 nur für $\alpha > 0$.

Definition 4.8 *Unter dem Träger $Tr(\tilde{A})$ einer Fuzzy-Menge $\tilde{A}$ verstehen wir den Abschluß der Menge $\{x \in \mathbb{R} | \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}$.*

Bemerkung 4.9 Die Zugehörigkeitsfunktion der Fuzzy-Menge $\tilde{A}$ kann auch als charakteristische Funktion der α-Schnitte dargestellt werden

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \sup_{\alpha \in (0,1]} \min\Big(\alpha, \mu_{\tilde{A}_\alpha}(x)\Big),$$

wobei

$$\mu_{\tilde{A}_\alpha}(x) = \begin{cases} 1 & : \quad x \in \tilde{A}_\alpha, \\ 0 & : \quad sonst. \end{cases}$$

Für Fuzzy-Zahlen $\tilde{A} \in$ FZ erhält man zusätzlich folgende Darstellung

$$\tilde{A} = \bigcup_{\alpha \in (0,1]} \alpha[a_\alpha^-, a_\alpha^+],$$

wobei $[a_\alpha^-, a_\alpha^+]$ das geschlossene Intervall ist, das gerade zu dem entsprechenden α-Schnitt gehört.

Über die α-Schnitte läßt sich nun auch die Multiplikation von Fuzzy-Zahlen mit Skalaren definieren.

Definition 4.10 *Es sei $\tilde{A} \in$ FZ beliebig. Dann wird die skalare Multiplikation mit $x \in \mathbb{R}$ durch*

$$\begin{aligned} x * \tilde{A} &= \bigcup_{\alpha \in (0,1]} \alpha[x * a_\alpha^-, x * a_\alpha^+] \ \ \textit{für} \ \ x \geq 0 \ , \\ x * \tilde{A} &= \bigcup_{\alpha \in (0,1]} \alpha[x * a_\alpha^+, x * a_\alpha^-] \ \ \textit{für} \ \ x < 0 \end{aligned}$$

definiert.

Auf die gleiche Weise läßt sich auch die Addition einer Fuzzy-Zahl mit einer reellen Zahl auf die Intervallarithmetik zurückführen. Probleme entstehen dann, wenn Fuzzy-Zahlen mit Fuzzy-Zahlen addiert oder multipliziert werden sollen. Hierfür werden andere Hilfsmittel zur Fuzzifizierung benötigt.

4.2 Extensionsprinzip

In den vorangegangenen Kapiteln haben wir durch die Fortsetzung der charkteristischen Funktion auf das Einheitsintervall $[0, 1]$ grundlegende Konzepte der Fuzzy-Set-Theorie entwickeln können. Diese Art der Fuzzifizierung stößt aber bei nicht mengenbasierten Theorien an ihre Grenzen. Bevor wir daher Fuzzy-Arithmetik betrachten können, haben wir zunächst ein anderes Fortsetzungskonzept einzuführen.

Dieses als Extensionsprinzip [Zadeh,1965, Zadeh,1975a] bezeichnete Verfahren ist für die gesamte Fuzzy-Set-Theorie von fundamentaler Bedeutung. Es ermöglicht die Fortsetzung klassischer mathematischer Konzepte auf die ihnen entsprechenden unscharfen Konzepte der Fuzzy-Set-Theorie. Hierbei handelt es sich aber nicht um die einzige Form der Fortsetzung klassischer Konzepte. Für andere Erweiterungskonzepte verweisen wir auf [Dubois et al.,1980, Kapitel 2]. Aufbauend auf das Extensionsprinzip lassen sich arithmetische Operationen auf Fuzzy-Zahlen übertragen.

Eindimensionale Fassung

Bevor wir eine allgemeine Version des Extensionsprinzips darstellen, formulieren wir zunächst eine eindimensionale Variante des Verfahrens. Dazu seien X und Y zunächst endliche Grundräume und f eine Funktion, für die gilt $f : X \to Y$. Desweiteren sei $\tilde{A}$ eine Fuzzy-Menge in X. Gesucht ist eine Fuzzy-Menge $\tilde{B}$ in Y die vermöge der scharfen Funktion f aus $\tilde{A}$ entsteht. Dazu sind den Elementen aus Y Zugehörigkeitswerte zuzuordnen. Hier scheint eine Zuordnung $\mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{B}}(y)$ wobei $f(x) = y$ gilt sinnvoll. Da f aber nicht injektiv zu sein braucht, können somit einem y mehrere Zugehörigkeitswerte zugeordnet werden. Für solche Elemente wählen wir den maximalen Zugehörigkeitsgrad. Ingesamt ergibt sich nunmehr die einfachste Fassung des Extensionsprinzip zu

$$\mu_{\tilde{B}}(y) := \begin{cases} \max\limits_{\substack{x \\ y=f(x)}} \big(\mu_{\tilde{A}}(x)\big) & : \text{ wenn } \quad f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & : \textit{ sonst.} \end{cases} \tag{10}$$

Sind X und Y nicht endliche Grundräume, so müssen wir in Gleichung (10) anstelle des Maximums das Supremum über die Zugehörigkeitswerte von $\mu_{\tilde{A}}(x)$ bilden. Das eindimensionale Extensionsprinzip für unendliche Grundräume ergibt sich somit zu

$$\mu_{\tilde{B}}(y) := \begin{cases} \sup\limits_{\substack{x \\ y=f(x)}} \big(\mu_{\tilde{A}}(x)\big) & : \text{ wenn } \quad f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & : \textit{ sonst.} \end{cases} \tag{11}$$

Beispiel 4.11
Als Beispiel betrachten wir zunächst die Funktion $f(x) = -x$ und die Fuzzy-Zahl $\tilde{A}$ (vgl. Abb. 13). Gesucht wird nun eine Fuzzy-Zahl $\tilde{B}$, die gerade das Bild von $\tilde{A}$ unter der Funktion f darstellt. Da $f(x) = -x$ eine streng monotone Funktion ist, vereinfacht sich die nachfolgende Berechnung der Zugehörigkeitsfunktion von $\tilde{B}$ ganz erheblich. Zunächst wird $\tilde{B}$ gemäß des Extensionsprinzips durch die Gleichung

$$\mu_{\tilde{B}}(y) := \begin{cases} \sup\limits_{\substack{x \\ y=f(x)=-x}} \big(\mu_{\tilde{A}}(x)\big) & : \text{ wenn } \quad f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & : \text{ sonst.} \end{cases}$$

gegeben. Die Zugehörigkeitsfunktion von $\tilde{B}$ ergibt sich also als Bild von $\tilde{A}$ indem der Grad der Zugehörigkeit eines $y \in \mathbb{R}$ zu $\tilde{B}$ als maximaler Zugehörigkeitswert der möglichen Urbilder von $y = f(x)$ zu $\tilde{A}$ berechnet werden. Aufgrund der strengen Monotonie von f gibt es nur ein einziges Urbild zu $y = -3$ und damit ergibt sich der Zugehörigkeitsgrad zu

$$\mu_{\tilde{B}}(-3) := \mu_{\tilde{A}}(3) = 1$$

Ebenso erhält man für alle anderen $y \in \mathbb{R}$ die entsprechenden Zughörigkeitsgrade, so daß sich $\tilde{B}$ wie in Abb. 15 darstellen läßt, denn ganz allgemein gilt für die Zugehörigkeitsfunktion von $\tilde{B}$

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \mu_{\tilde{A}}(-y) \ .$$

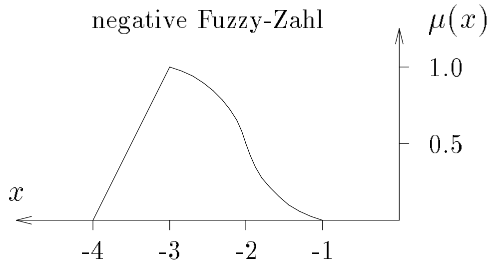

Abbildung 15: Ergebnis der negierten positiven Fuzzy-Zahl aus Abb. 13.

Neben der Negation spielt auch die Division von Zahlen eine wichtige Rolle in der Fuzzy-Set Theorie. Daher betrachten wir im folgenden Beispiel die Fuzzifizierung der Funktion $f(x) = 1/x$.

Beispiel 4.12
Gegeben sei die Funktion $f(x) = 1/x$ für $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Ganz analog zu Beispiel 4.11 ergibt sich aus der Definiton des Extensionsprinzips

$$\mu_{\tilde{B}}(y) := \begin{cases} \sup\limits_{\substack{x \\ y=f(x)=1/x}} \Big(\mu_{\tilde{A}}(x)\Big) & : \ \text{wenn} \quad f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & : \ \text{sonst.} \end{cases}$$

Da auch $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ mittels $f(x) = 1/x$ bijektiv auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ abgebildet wird, gibt es für jedes $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ ein eindeutiges Urbild, so daß sich die Zugehörigkeitsfunktion der Fuzzy-Menge $\tilde{A}^{-1}$ einfach zu

$$\forall \ x \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \ : \quad \mu_{\tilde{A}^{-1}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(1/x)$$

ergibt.
Ähnlich wie in der reellen Arithmetik nicht durch Null geteilt werden darf, so gibt es auch für die Bildung der multiplikativen Inversen gewisse Restriktionen. So führt die

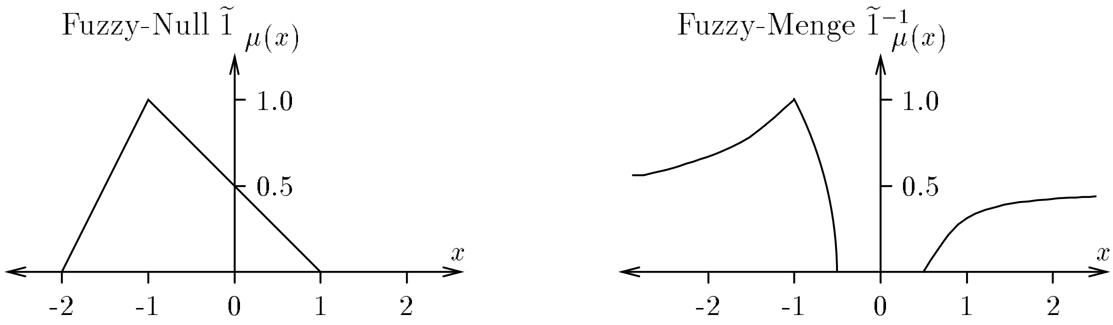

Abbildung 16: Fuzzy-Zahl und ihr multiplikatives Inverses.

Division einer Fuzzy-Null zwar weiterhin zu einer Fuzzy-Menge über $\mathbb{R}$, diese aber ist im allgemeinen keine Fuzzy-Zahl mehr, da die α-Schnitte nicht mehr zusammenhängend sind und die Fuzzy-Menge daher nicht mehr konvex ist (vgl. Abbildung 16).

Als ein weiteres Beispiel sei hier die Quadratbildung eingeführt. Dazu betrachten wir folgendes Beispiel.

Beispiel 4.13
Es sei f die Funktion $f(x) = x^2$. Offenbar ist f nicht streng monoton, und die Urbildmenge eines Elementes $y > 0$ daher nicht mehr einelementig aber höchstens zweielementig und damit endlich.
Gegeben sei nun die Fuzzy-Zahl $\tilde{A}$ aus Abb. 17. Für das Bild $\tilde{B}$ von $\tilde{A}$ unter der scharfen

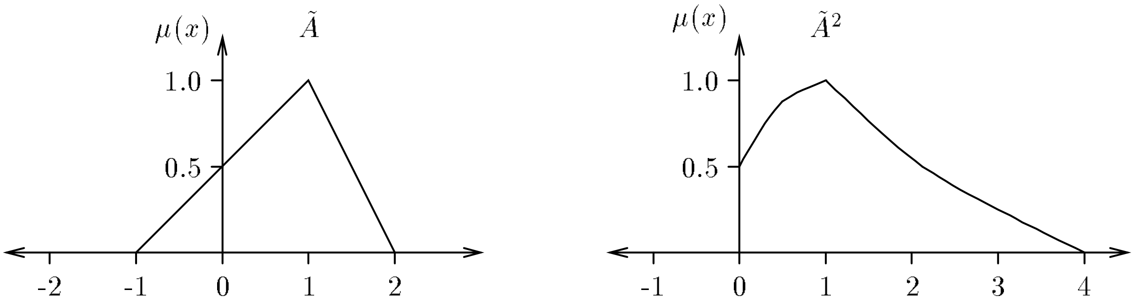

Abbildung 17: Beispiel für das Quadrat einer triangulären Fuzzy Zahl.

Funktion $f(x) = x^2$ ergibt sich nun

$$\mu_{\tilde{B}}(y) := \begin{cases} \sup\limits_{\substack{x \\ y=f(x)}} \Big(\mu_{\tilde{A}}(x)\Big) & : \text{ wenn } \quad f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & : \textit{ sonst.} \end{cases}$$

Hier ergibt sich nun der Zugehörigkeitsgrad von $\tilde{B}$ für ein $y \in \mathbb{R}_+$ als maximaler Zugehörigkeitsgrad der beiden Urbilder $+\sqrt{y}$ und $-\sqrt{y}$. zu $\tilde{A}$. Offenbar ist somit der Zugehörigkeitsgrad einer negativen reellen Zahl zur Fuzzy-Zahl $\tilde{B}$ gleich Null.
Beispielsweise ergibt sich der Zugehörigkeitsgrad von $\tilde{B}$ an der Stelle 0.49 zu

$$\begin{aligned} \mu_{\tilde{B}}(0.49) &= \max\Big(\mu_{\tilde{A}}(0.7), \mu_{\tilde{A}}(-0.7)\Big) \\ &= \max\Big(0.85, 0.15\Big) \\ &= 0.85 \; . \end{aligned}$$

Die Darstellung von $\tilde{B}$ ist sehr aufwendig, da keine funktionale Beschreibung der Zugehörigkeitsfunktion vorliegt.

Da sich mit dem eindimensionalen Extensionsprinzip nur „einfache“ Funktionen fortsetzen lassen, wir aber auch an der Erweiterung binärer Operationen interessiert sind, betrachten wir nun eine allgemeine Fassung des Extensionsprinzips.

Allgemeine Fassung

Im folgenden soll das Extensionsprinzip auf mehrdimensionale Grundräume verallgemeinert werden. Dazu rufen wir uns zunächst noch einmal die Darstellung des cartesischen Produkts $\tilde{\mathbf{A}}$ von Fuzzy-Mengen $\tilde{A}_1 \ldots \tilde{A}_n$ ins Gedächnis.

$$\mu_{\tilde{\mathbf{A}}}(x_1, \ldots, x_n) = \min_{(x_1,\ldots,x_n)\in X^n} \Big(\mu_{\tilde{A}_1}(x_1), \ldots, \mu_{\tilde{A}_n}(x_n)\Big)$$

Damit läßt sich nun das allgemeine Extensionsprinzip angeben.

Definition 4.14 *Es sei $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ das cartesische Produkt von Grundmengen X_i mit $1 \leq i \leq n$, und $\tilde{A}_i \subset X_i$ seien Fuzzy-Mengen in X_i. Dann ist*

$$\tilde{\mathbf{A}} := \tilde{A}_1 \times \cdots \times \tilde{A}_n := \int\limits_{X_1\times\cdots\times X_n} \min\Big(\mu_{\tilde{A}_1}(x_1), \ldots, \mu_{\tilde{A}_n}(x_n)\Big)/(x_1, \ldots, x_n)$$

eine Fuzzy-Menge in X. Es sei $f : X_1 \times \cdots \times X_n \to Y$ eine Abbildung vermöge $f(x_1 \ldots, x_n) = y$. Dann läßt sich eine Fuzzy-Menge $\tilde{A}$ mittels f in eine Fuzzy-Menge $\tilde{B}$ überführen. $\mu_{\tilde{B}}(y)$ wird dabei wie folgt definiert

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \begin{cases} \sup\limits_{\substack{(x_1,\ldots,x_n) \\ y=f(x_1,\ldots,x_n)}} \Big(\min\Big(\mu_{\tilde{A}_1}(x_1), \ldots, \mu_{\tilde{A}_n}(x_n)\Big)\Big) & : \quad \textit{wenn} \quad f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & : \quad \textit{sonst.} \end{cases} \tag{12}$$

Dabei ist $f^{-1}(y)$ das Urbild von y. $\mu_{\tilde{B}}(y)$ ist der größte Zugehörigkeitswert von $\mu_{\tilde{A}_1\times\ldots\times\tilde{A}_n}(x_1, \ldots, x_n)$ bezüglich aller $(x_1, \ldots, x_n)$ mit $f(x_1, \ldots, x_n) = y$.

Als Beispiel betrachten wir nun die zweidimensionale Funktion $f(x, y) = x + y$ und erhalten durch die Fuzzifizierung dieser Funktion die Fuzzy-Addition von Fuzzy-Zahlen.

Beispiel 4.15
Es seien

$$\tilde{A} = \int_{1}^{2.5} (\frac{x-1}{1.5})/x + \int_{2.5}^{3} (\frac{3-x}{0.5})/x \quad \text{und}$$
$$\tilde{B} = \int_{3}^{4.5} (\frac{x-3}{1.5})/x + \int_{4.5}^{6} (\frac{6-x}{1.5})/x$$

trianguläre Fuzzy-Zahlen aus FZ (vgl. Abb. 18). Gesucht ist dann die Fuzzy-Zahl $\tilde{C}$,

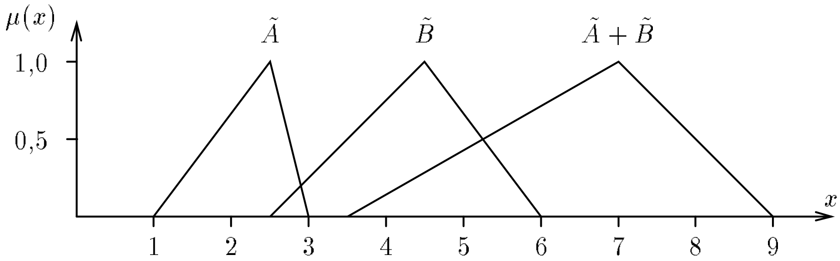

Abbildung 18: Fuzzy-Addition

die sich als Ergebnis der Funktion $f(x, y) = x + y$ ergibt, wenn anstelle von x und y Fuzzy-Zahlen $\tilde{A}$ und $\tilde{B}$ als Funktionsargumente verwendet werden. Gemäß Definition 4.14 ergibt sich die Zugehörigkeitsfunktion von $\tilde{C}$ zu

$$\mu_{\tilde{C}}(z) = \sup_{\substack{(x,y) \\ z=x+y}} \left(\min \left(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(y) \right) \right) . \tag{13}$$

Offenbar gilt dann $\mu_{\tilde{C}}(z') = 1$ nur für $z' = 2.5 + 4.5 = 7$, denn aufgrund der Normalität von $\tilde{A}$ und $\tilde{B}$ gilt nur für die Modalwerte $\mu_{\tilde{A}}(2.5) = \mu_{\tilde{B}}(4.5) = 1$. Zusätzlich können wir aus Gleichung (13) die Gültigkeit von

$$\forall\, z \le 1 + 2.5 \text{ und } \forall\, z \ge 3 + 6 : \mu_{\tilde{C}}(z) = 0$$

ablesen. Für alle $z' \in]3.5, 9[$ ergibt sich der Zugehörigkeitsgrad von $\mu_{\tilde{C}}(z')$ zu α, wenn x' und y' aus den Trägern von $\tilde{A}$ und $\tilde{B}$ so gewählt sind, daß sowohl $x' + y' = z'$ als auch $\mu_{\tilde{A}}(x') = \mu_{\tilde{B}}(y')$ gilt. In diesem Fall ist dann $\mu_{\tilde{A}}(x') = \mu_{\tilde{B}}(y') = \alpha$. Insgesamt ergibt sich dann $\tilde{C}$ zu (vgl. Abb. 18)

$$\tilde{C} = \int_{3.5}^{7} (\frac{x-3.5}{3.5})/x + \int_{7}^{9} (\frac{9-x}{2})/x$$

In diesem Beispiel ist die Summe von zwei triangulären Fuzzy-Zahlen wiederum eine trianguläre Fuzzy-Zahl. Dies läßt sich auch ganz allgemein nachweisen:

Satz 4.16
Es seien $\tilde{A}, \tilde{B} \in$ FZ trianguläre Fuzzy-Zahlen. Dann liefert die mittels des Extensionsprinzips definierte Summe beider Mengen wiederum eine trianguläre Fuzzy-Zahl $\tilde{C}$ für die gilt:

$$\tilde{C} = (a_m + b_m, a_l + b_l, a_r + b_r)_{trian} \ .$$

Dabei stehen a_m, b_m für die Modalwerte von $\tilde{A}$ und $\tilde{B}$. Mit a_l, b_l und a_r, b_r werden die linken bzw. rechten Unschärfen von $\tilde{A}$ und $\tilde{B}$ bezeichnet.

Beweis: Wir weisen den Satz in zwei Schritten nach. Zunächst zeigen wir, daß wir für die Berechnung von $\mu_{\tilde{C}}(z)$ nur die Punkte x, y zu betrachten haben, für die $\mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{B}}(y)$ und zusätzlich $z = x + y$ gilt. Abschließend haben wir dann zu zeigen, daß $\tilde{C}$ triangulär ist.

i) Aufgrund des Extensionsprinzips folgt unmittelbar

$$\mu_{\tilde{C}}(z) = \begin{cases} 0 & : \text{ für } \quad z \leq a_m - a_l + b_m - b_l \\ 0 & : \text{ für } \quad z \geq a_m + a_r + b_m + b_r \ . \end{cases}$$

Es genügt offensichtlich $x \in]a_m - a_l, a_m + a_r[$ und $y \in]b_m - b_l, b_m + b_r[$ zu betrachten. Da Fuzzy-Zahlen per definitionem normal sind, gilt nur für die Modalwerte von $\tilde{A}, \tilde{B}$ die Gleichung $\mu_{\tilde{A}}(a_m) = \mu_{\tilde{B}}(b_m) = 1$. Offenbar ist $\mu_{\tilde{C}}(z) = 1$ genau für $z = a_m + b_m$ erfüllt.
Sei nun $\alpha \in]0, 1[$ fest gewählt. Betrachten wir zunächst nur die linke Referenzfunktion: Dann gibt es aufgrund der strengen Monotonie von L genau ein x' mit $x' \in]a_m - a_l, a_m[$ und ein $y' \in]b_m - b_l, b_m[$, so daß $\mu_{\tilde{A}}(x') = \alpha = \mu_{\tilde{B}}(y')$ gilt. Sei nun $z' = x' + y'$, so folgt $\mu_{\tilde{C}}(z') = \alpha$. Denn für $x \neq x'$ mit $x \in]a_m - a_l, a_m[$ und $y' \neq y$ mit $y \in]b_m - b_l, b_m[$ und $x + y = z'$ gilt entweder $\mu_{\tilde{A}}(x) < \alpha$ oder $\mu_{\tilde{B}}(y) < \alpha$ aufgrund der strengen Monotonie der linken Referenzfunktion. Mit dem Extensionsprinzip ergibt sich somit $\mu_{\tilde{C}}(z') = \sup(\min_{x+y=z'}(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(y))) = \alpha$ für $z' = x' + y'$. Insgesamt gilt dann für die linke Unschärfe $c_l = a_l + b_l$. Analog folgen die Überlegungen bei der rechten Referenzfunktion R.

ii) Wir haben nun noch nachzuweisen, daß die linke und rechte Referenzfunktion von $\tilde{C}$ linear ist, das heißt, daß $L_{\tilde{C}}(z) = R_{\tilde{C}}(z) = \max(0, 1 - z)$ gilt. Auch hier betrachten wir zunächst die linke Referenzfunktion $L_{\tilde{C}}$ von $\tilde{C}$. Sei dazu $\alpha \in]0, 1[$. Nach *i)* gibt es genau ein $x' \in]a_m - a_l, a_m[$ und ein $y' \in]b_m - b_l, b_m[$ mit $\mu_{\tilde{A}}(x') = \mu_{\tilde{B}}(y') = \alpha$. Da $\tilde{A}$ und $\tilde{B}$ triangulär sind, folgt

$$L\left(\frac{a_m - x'}{a_l}\right) = L\left(\frac{b_m - y'}{b_l}\right) = \alpha$$

mit $L = L_{\tilde{A}} = L_{\tilde{B}} = \max(0, 1 - x)$. Aufgrund der strengen Monotonie von L existiert auch L^{-1} und es gilt:

$$L^{-1}L\left(\frac{a_m - x'}{a_l}\right) = L^{-1}L\left(\frac{b_m - y'}{b_l}\right) = L^{-1}(\alpha) \ .$$

Wir erhalten nunmehr aus $x' = a_m - a_l * L^{-1}(\alpha)$ und $y' = b_m - b_l * L^{-1}(\alpha)$

$$x' + y' = a_m + b_m - (a_l + b_l) * L^{-1}(a) \ .$$

Setzen wir $z' = x' + y'$ so folgt durch Anwendung von L:

$$\alpha = L\left(\frac{a_m + b_m - (x' + y')}{a_l + b_l}\right) = L\left(\frac{a_m + b_m - z'}{a_l + b_l}\right) = \mu_{\tilde{C}}(z') \ .$$

Dies gilt mit *i)* für alle $z' \in]a_m + b_m - (a_l + b_l), a_m + b_m[$. Damit gilt dann $L_{\tilde{C}}(z) = L(z) = \max(0, 1 - z)$, was aber bedeutet, daß die linke Referenzfunktion linear ist. Der Nachweis der Linearität der rechten Referenzfunktion verläuft analog. □

Wir haben also gesehen, daß trianguläre Fuzzy-Zahlen bezüglich der Addition abgeschlossen sind. Satz 4.16 sagt aus, daß wir im Fall der Addition von triangulären Fuzzy-Zahlen lediglich folgendes zu berechnen haben:

$$(a_m, a_l, a_r)_{trian} \tilde{+} (b_m, b_l, b_r)_{trian} = (a_m + b_m, a_l + b_l, a_r + b_r)_{trian} \ . \tag{14}$$

Neben der Fuzzy-Addition ist auch die Subtraktion von triangulären Fuzzy-Zahlen von Interesse. Letztere können wir mit Hilfe von Beispiel 4.11 auf die Negation von Fuzzy-Zahlen zurückführen.

Wir haben in Beispiel 4.15 gesehen, daß sich bei der Addition von Fuzzy-Zahlen deren Unschärfen addieren. Da es nur nicht negative Unschärfen (≥ 0) gibt, folgt daraus unmittelbar folgende Bemerkung.

Bemerkung 4.17
$(\mathrm{FZ}, +)$ ist eine abelsche oder kommutative Halbgruppe[1] aber **keine** Gruppe. Ist nämlich $\tilde{A} \in \mathrm{FZ} \backslash \mathbb{R}$ eine beliebige Fuzzy-Zahl, so gibt es keine Fuzzy-Zahl $\tilde{B}$, so daß sich als Summe beider Fuzzy-Zahlen das neutrale Element der Addition ($0 \in \mathbb{R} \subset \mathrm{FZ}$) ergibt.

Als weitere Folgerung aus Beispiel 4.15 notieren wir noch folgenden Satz.

Satz 4.18
Es sei $\tilde{A} \in \mathrm{FZ}$ eine Fuzzy-Zahl und $\tilde{f} : \mathrm{FZ} \longrightarrow \mathrm{FZ}$ eine mittels des Extensionsprinzips fortgesetzte stetige Funktion. Zusätzlich sei x_0 der Modalwert von $\tilde{A}$ und damit $\mu_{\tilde{A}}(x_0) = 1$. Gilt dann $f(x_0) = y_0$, so ist y_0 der Modalwert von $\tilde{f}(\tilde{A})$.
Das heißt: Das Bild des Modalwertes ist der Modalwert des Bildes.

[1] In FZ gilt neben dem Kommutativgesetz auch das Assoziativgesetz

Beweis: Es sei x_0 der Modalwert von $\tilde{A}$, also $\mu_{\tilde{A}}(x_0) = 1$. Zusätzlich sei $\tilde{f}(x_0) = y_0$ und $\tilde{f}(\tilde{A}) \in$ FZ eine Fuzzy-Zahl. Da $\tilde{f}(\tilde{A})$ als Fuzzy-Zahl normal ist, besitzt $\tilde{f}(\tilde{A})$ genau einen Modalwert y'. Somit ist nur die Gleichheit von $y_0 = y'$ zu zeigen. Aufgrund des Extensionsprinzips (vgl. Definition 4.14) gilt:

$$1 = \mu_{\tilde{f}(\tilde{A})}(y') = \sup_{x \in \tilde{f}^{-1}(y')} \Big(\min(\mu_{\tilde{A}}(x)) \Big) \; .$$

Da $\mu_{\tilde{A}}(x) = 1$ nur für $x = x_0$ gilt, folgt $x_0 \in \tilde{f}^{-1}(y')$. Wegen $\tilde{f}(x_0) = y_0$ erhalten wir insbesondere $y_0 = y'$ und das Lemma ist bewiesen. □

In einem weiteren Beispiel betrachten wir nun die Fortsetzung der Multiplikation $f(x, y) = x * y$ auf Fuzzy-Zahlen.

Beispiel 4.19
Die Fuzzy-Zahlen $\tilde{A}$ und $\tilde{B}$ seien wie in Beispiel 4.15 gegeben. Gesucht ist nun die Zugehörigkeitsfunktion der Fuzzy-Zahl $\tilde{C}$, die sich gerade als Produkt der Fuzzy-Zahlen $\tilde{A}$ und $\tilde{B}$ ergibt. Ganz analog zu Beispiel 4.15 gilt für $\mu_{\tilde{C}}(z)$:

$$\mu_{\tilde{C}}(z) = \begin{cases} 0 & : \text{ für } \; z \geq 3 * 6 = 18 \\ 1 & : \text{ für } \; z = 2.5 * 4.5 = 11.25 \\ 0 & : \text{ für } \; z \leq 1.5 * 3 = 4.5 \\ \in]0,1[& : \text{ sonst } . \end{cases}$$

Anders als bei der Addition von triangulären Fuzzy-Zahlen können wir nun nicht mehr davon ausgehen, daß es sich bei dem Produkt um eine trianguläre Fuzzy-Zahl handelt. Denn die Zugehörigkeitsfunktion von $\tilde{C}$ nimmt genau an den Stellen $6.5625 \neq 7.875$ und $14.4375 \neq 14.625$ den Zugehörigkeitsgrad 0.5 an ($\mu_{\tilde{C}}(1.75 * 3.75) = \mu_{\tilde{C}}(2.75 * 5.25) = 0.5$). Damit verläuft die linke Referenzfunktion überhalb der linearen Verbindung zwischen Modalwert und linker Trägergrenze wohingegen die rechte Referenzfunktion unterhalb der linearen Verbindung zwischen Modalwert und rechter Trägergrenze verläuft (vgl. Abb 19).

Ebenso wie wir die Subtraktion auf die Addition zurückgeführt haben, läßt sich auch die Division auf die Multiplikation unter Verwendung der multiplikativen Inversen zurückführen. Es muß nur sichergestellt werden, daß nicht durch eine Fuzzy-Null geteilt wird. Addierten sich bei der Addition die Unschärfen der Summanden, so multiplizieren sich bei der Multiplikation die Trägergrenzen. Damit besitzt $(\text{FZ}, *)$ ebenso wie $(\text{FZ}, +)$ keine Gruppenstruktur. Vielmehr gilt auch hier:

Bemerkung 4.20
$(\text{FZ}, *)$ ist eine abelsche Halbgruppe. Ist nämlich $\tilde{A} \in \text{FZ} \backslash \mathbb{R}$ eine beliebige Fuzzy-Zahl, so gibt es keine Fuzzy-Zahl $\tilde{B}$, so daß sich als Produkt beider Fuzzy-Zahlen das neutrale Element der Multiplikation ($1 \in \mathbb{R} \subset \text{FZ}$) ergibt.

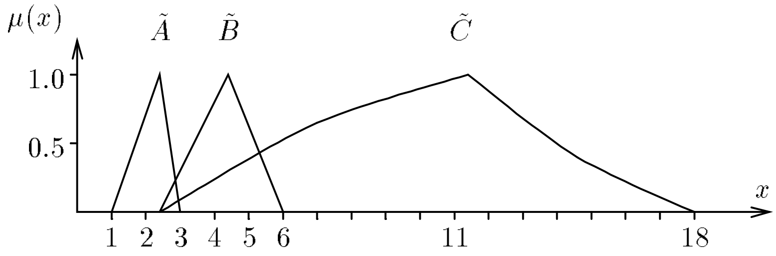

Abbildung 19: Beispiel für das Quadrat einer triangulären Fuzzy Zahl.

4.3 Eigenschaften des Extensionsprinzips

In diesem Abschnitt sollen nun noch einige inhärente Eigenschaften des Extensionsprinzips vorgestellt werden. Bei der Fortsetzung der Addition als auch der Multiplikation konnten wir beobachten, daß durch die Vergrößerung der Unschärfen der Faktoren auch die Unschärfe des Produkts zunahm. Diese Eigenschaft läßt sich wie folgt formalisieren.

Definition 4.21 *Es sei* $\tilde{f}$: $\mathrm{FZ}^n \to \mathrm{FZ}$ *eine stetige Funktion (mittels des Extensionsprinzips fortgesetzte stetige Funktion). Dann heißt die Funktion* $\tilde{f}$ überdeckungs-monoton, *wenn zu jedem* $\tilde{\mathbf{a}} = (\tilde{A}_1, \ldots, \tilde{A}_n)^T \in \widehat{\mathrm{FZ}}^n$ *und* $\tilde{\mathbf{b}} = (\tilde{B}_1, \ldots, \tilde{B}_n)^T \in \widehat{\mathrm{FZ}}^n$ *mit* $\tilde{A}_i \subset \tilde{B}_i$ *(für alle* $1 \leq i \leq n$*) auch* $\tilde{f}(\tilde{\mathbf{a}}) \subset \tilde{f}(\tilde{\mathbf{b}})$ *gilt.*

Diese Eigenschaft besagt kurz, daß Fuzzy-Teilmengen auf Fuzzy-Teilmengen abgebildet werden (vgl. Abbildung 20), unter Verwendung des ZADEHschen Fuzzy-Teilmengigkeits-Begriffs ($\forall\, x \in \mathbb{R} : \tilde{A} \subset \tilde{B} \Leftrightarrow \mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{B}}(x)$).

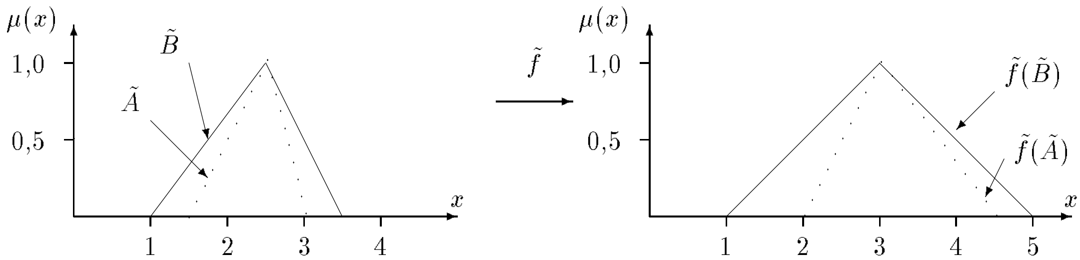

Abbildung 20: Beispiel für eine überdeckungs-monotone Fuzzy-Funktion.

Aufgrund der oben angeführten Beobachtungen zur Fuzzy-Addition und Fuzzy-Multiplikation können wir nun folgenden Satz festhalten.

Satz 4.22
Die Fuzzy-Addition und die Fuzzy-Multiplikation von triangulären Fuzzy-Zahlen $\tilde{A}, \tilde{B} \in \widehat{\mathrm{FZ}}$ *sind überdeckungs-monoton.*

Ist die fortzusetzende Funktion stetig, so besitzt die fuzzifizierte Funktion die folgende Eigenschaft:

Definition 4.23 *Eine Funktion* $\tilde{F} : \widehat{\mathrm{FZ}}^n \to \widehat{\mathrm{FZ}}^m$ *mit* $\tilde{F} = (\tilde{f}_1, \cdots, \tilde{f}_m)$ *und* $\tilde{f}_j : \widehat{\mathrm{FZ}}^n \to \widehat{\mathrm{FZ}}$ *für* $1 \leq j \leq m$ *heißt* überlappend, *falls für beliebige Fuzzy-Vektoren* $(\tilde{A}_1, \cdots, \tilde{A}_n)$ *und* $(\tilde{B}_1, \cdots, \tilde{B}_n)$ *mit* $Tr(\tilde{A}_i) \subset Tr(\tilde{B}_i)$ *für alle* $1 \leq i \leq n$ *auch schon* $Tr(\tilde{f}_j(\tilde{A}_1, \cdots, \tilde{A}_n)) \subset Tr(\tilde{f}_j(\tilde{B}_1, \cdots, \tilde{B}_n))$ *für alle* $1 \leq j \leq m$ *gilt.*

Bemerkung 4.24 Gelten die Voraussetzungen von Definition 4.23, so schreiben wir auch $Tr(\tilde{F}(\tilde{A}_1, \ldots, \tilde{A}_n)) \subset Tr(\tilde{F}(\tilde{B}_1, \ldots, \tilde{B}_n))$, wenn $Tr(\tilde{f}_j(\tilde{A}_1, \cdots, \tilde{A}_n)) \subset Tr(\tilde{f}_j(\tilde{B}_1, \cdots, \tilde{B}_n))$ für alle $1 \leq j \leq m$ gilt.

Die Eigenschaft, daß eine Funktion $\tilde{f} : \widehat{\mathrm{FZ}} \to \widehat{\mathrm{FZ}}$ überlappend ist, läßt sich wie in der Abbildung 21 an einem Beispiel darstellen. Die Eigenschaft „überlappend“ zu sein, beinhaltet offenbar die Eigenschaft „überdeckungs-monoton“ zu sein, denn bei ersterer ist alleine die binäre Enthaltensein-Relation eines Intervalls in einem anderen von Bedeutung und damit der Verlauf der Zugehörigkeitsfunktionen unwesentlich. Verblüffend ist nun die Tatsache, daß für stetige Funktionen beide Eigenschaften bereits äquivalent sind. Genauer gilt der folgende Satz:

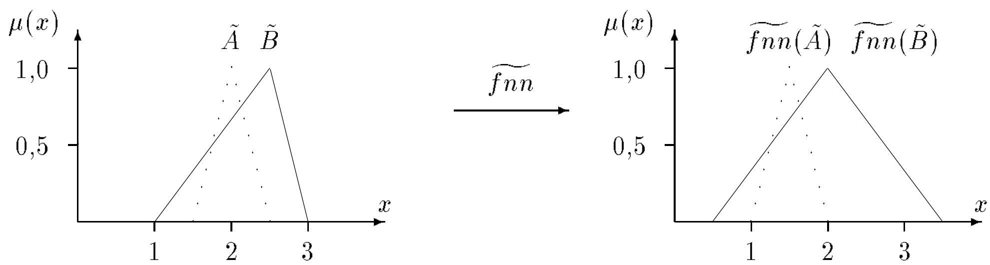

Abbildung 21: Beispiel für die Überlappungseigenschaft.

Satz 4.25
Es sei $\tilde{f}$ *eine beliebige stetige überdeckungs-monoton Funktion, dann ist* $\tilde{f}$ *auch überlappende.*

Auf den Beweis wollen wir an dieser Stelle nur verweisen (vgl. [Feuring 1996]).

Zum Abschluß dieses Kapitels betrachten wir noch die Verknüpfung von Multiplikation und Addition von Fuzzy-Zahlen. Während über den reellen Zahlen das Distributivgesetz gilt, läßt sich für Fuzzy-Zahlen nur die schwache Distributivität nachweisen. Es gilt:

Satz 4.26 *Es seien $\tilde{A}, \tilde{B}$ und $\tilde{C}$ beliebige Fuzzy-Zahlen aus* FZ. *Dann gilt die schwache Distributivität, d.h. es gilt:*

$$\tilde{A} \tilde{*} (\tilde{B} \tilde{+} \tilde{C}) \subseteq (\tilde{A} \tilde{*} \tilde{B}) \tilde{+} (\tilde{A} \tilde{*} \tilde{C}) .$$

Sind $\tilde{A}, \tilde{B}$ und $\tilde{C}$ hingegen positive Fuzzy-Zahlen, so gilt sogar

$$\tilde{A} \tilde{*} (\tilde{B} \tilde{+} \tilde{C}) = (\tilde{A} \tilde{*} \tilde{B}) \tilde{+} (\tilde{A} \tilde{*} \tilde{C}) .$$

Beweis: Es soll nur der zweite Teil des Satzes bewiesen werden. Dazu seien für $\alpha \in]0,1]$

$$\begin{aligned} A_\alpha &= [a_1, a_2] \quad \text{mit} \quad 0 < a_1 \leq a_2 \\ B_\alpha &= [b_1, b_2] \quad \text{mit} \quad 0 < b_1 \leq b_2 \\ C_\alpha &= [c_1, c_2] \quad \text{mit} \quad 0 < c_1 \leq c_2 \end{aligned}$$

α-Schnitte von $\tilde{A}, \tilde{B}$ und $\tilde{C}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \left[\tilde{A} \tilde{*} (\tilde{B} \tilde{+} \tilde{C})\right]_\alpha &= \tilde{A}_\alpha * (\tilde{B} \tilde{+} \tilde{C})_\alpha \\ &= \tilde{A}_\alpha * (\tilde{B}_\alpha + \tilde{C}_\alpha) \\ &= [a_1, a_2] * ([b_1, b_2] + [c_1, c_2]) \\ &= [a_1 * (b_1 + c_1), a_2 * (b_2 + c_2)] \\ &= [a_1 * b_1, a_2 * b_2] + [a_1 * c_1, a_2 * c_2] \\ &= ([a_1, a_2] * [b_1, b_2]) + ([a_1, a_2] * [c_1, c_2]) \\ &= \left[(\tilde{A} \tilde{*} \tilde{B}) \tilde{+} (\tilde{A} \tilde{*} \tilde{C})\right]_\alpha \end{aligned}$$

□

Probleme treten im obigen Beweis dann auf, wenn negative und positive Fuzzy-Zahlen vorkommen. Wird zum Beispiel eine positive Fuzzy-Zahl $\tilde{A}$ mit einer negativen $\tilde{B}$ multipliziert, so berechnet sich der α-Schnitt des Produkts zu $[a_2 * b_1, a_1 * b_2]$. Im allgemeinen Fall müssen schließlich auch Fuzzy-Nullen in Betracht gezogen werden. Eine Berechnung ähnlich des oben angegebenen Beweises wird dann unmöglich. Allerdings läßt sich das Distributivgesetz auch für den Fall, daß $\tilde{A}$ negativ ist und $\tilde{B}, \tilde{C}$ positive Fuzzy-Zahlen sind, nachweisen (vgl. Übungsaufgabe 8).

5 Klassische Logik – Fuzzy Logik

5.1 Klassische Logik

Grundlegend für die klassische Aussagenlogik ist das Zweiwertigkeitsprinzip, welches das Vorhandensein von genau zwei Wahrheitswerten – wahr und falsch – postuliert. Einfache Aussagen lassen sich ferner mittels Junktoren wie *und*, *oder*, *nicht*, oder *wenn, dann* etc. verknüpfen (vgl. Tabelle 4). Die Verknüpfungen erfolgen dabei nach formal vorgegebenen Vorschriften und nicht nach inhaltlichen Überlegungen. So stellen die folgenden Implikationen

`WENN` 6 durch 3 teilbar ist, `DANN` ist 6 keine Primzahl

`WENN` 6 durch 3 teilbar ist, `DANN` ist 7 eine Primzahl

wahre Aussagen dar, obwohl die zweite Aussage inhaltlich als unsinnig zu bezeichnen ist. Inhaltliches Denken und Schließen wird also in der Aussagenlogik durch formale Kalküle modelliert, die nicht immer das menschliche Schließen nachbilden. Dieser Mißstand soll durch approximatives Schließen d. h. durch Fuzzy-Logik Verknüpfungen behoben werden.

Zunächst aber betrachten wir die klassische Aussagenlogik.

Definition 5.1

1. *„W" steht für den Wahrheitswert* wahr *und damit für eine wahre Aussage, „F" steht entsprechend für den Wahrheitswert* falsch*.*

2. *Es sei a eine Aussagenvariable. Dann läßt sich a als „wahr" oder „falsch"* interpretieren*, indem a durch die Wahrheitswertefunktion δ einer der folgenden Wahrheitswerte zugeordnet wird:*

$$\begin{aligned} \delta(a) = W &\quad : \quad a \textit{ wird mit einer wahren Aussage belegt} \\ \delta(a) = F &\quad : \quad a \textit{ wird mit einer falschen Aussage belegt} \end{aligned}$$

3. *Die formale Bedeutung der Verknüpfung von Aussagen wird durch Tabelle 4 festgelegt.*

4. *Der Wahrheitswert $\delta(A(x_1,\ldots,x_n))$ eines n-stelligen aussagenlogischen Ausdrucks $A(x_1,\ldots,x_n)$ berechnet sich bei gegebenen Wahrheitswerten $\delta(x_1),\ldots,\delta(x_n) \in \{W,F\}$ vermöge*

$$\delta\Big(A(x_1,\ldots,x_n)\Big) := A\Big(\delta(x_1),\ldots,\delta(x_n)\Big) \ .$$

Mit Hilfe dieser Definition läßt sich der Wahrheitswert einer beliebigen Aussage berechnen, wenn jeder auftretenden Aussagenvariablen nur ein Wahrheitswert zugeordnet ist.

Definition 5.2
Eine n-stellige Aussage $A(x_1, \ldots, x_n)$ heißt

1. erfüllbar *oder* konsistent, *falls es eine Belegung von Wahrheitswerten für $x_1, \ldots, x_n$ gibt, so daß der Wahrheitswert von $A(x_1, \ldots, x_n)$ wahr ist, d. h. wenn gilt*
$$A\Big(\delta(x_1), \ldots, \delta(x_n)\Big) = W \ .$$
2. Tautologie, *falls für jede Wahrheitswertebelegung die Aussage $A(x_1, \ldots, x_n)$ wahr ist.*
3. inkonsistent *oder* unerfüllbar, *falls für keine Wahrheitswertbelegung die Aussage $A(x_1, \ldots, x_n)$ wahr ist.*

Beispiel 5.3
Als Beispiel für eine konsistente und inkonsistente Aussage führen wir die Aussagen $A_1(a, b)$ und $A_2(a, b)$ an. Die Aussage $A_3(a, b)$ ist eine Tautologie

$$\begin{aligned} A_1(a,b) &: \ (a \longrightarrow b) \longrightarrow (b \longrightarrow a) \\ A_2(a,b) &: \ (a \longrightarrow b) \longrightarrow \neg(a \longrightarrow b) \\ A_3(a,b) &: \ (a \longrightarrow b) \longrightarrow (\neg b \longrightarrow \neg a) \end{aligned}$$

Der Nachweis läßt sich leicht mittels einer Wahrheitswertetabelle führen.

Definition 5.4
Es seien $A_1, \ldots, A_m, B_1 \ldots, B_k$ n-stellige Aussagen $(m, k \geq 1)$. Dann heißen $B_1, \ldots, B_k$ aussagenlogische Folgerungen *aus den Aussagen $A_1, \ldots, A_m$, wenn mit jeder Belegung $\delta(x_1), \ldots, \delta(x_n)$, für die Aussagen A_i $(1 \leq i \leq m)$*

$$\delta\Big(A_1(x_1, \ldots, x_n)\Big) = \delta\Big(A_2(x_1, \ldots, x_n)\Big) = \cdots = \delta\Big(A_m(x_1, \ldots, x_n)\Big) = W$$

gilt, auch

$$\delta(B_1) = \delta(B_2) = \cdots = \delta(B_k) = W$$

folgt. Wir schreiben dann auch:

$$A_1(x_1, \ldots, x_n) \wedge A_2(x_1, \ldots, x_n) \wedge \cdots \wedge A_m(x_1, \ldots, x_n) \Longrightarrow B_j(x_1, \ldots, x_n) \quad (1 \leq j \leq k)$$

Satz 5.5
Sind $A_1, \ldots, A_m$ und B n-stellige Aussagen und B eine aussagenlogische Folgerung, das heißt

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_m \Longrightarrow B \ . \tag{15}$$

„$\Longrightarrow$“ wird impliziert *genannt und ist ein metasprachliches Symbol.*
Genau dann ist Gleichung gleichbedeutend mit der Aussage

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_m \longrightarrow B$$

ist allgemeingültig und damit eine Tautologie.

Beweis: Mittels einer Wahrheitswertetabelle können wir verifizieren, daß es sich bei Gleichung (15) um eine Tautologie andelt.

$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_m$	B	$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_m \longrightarrow B$
W	W	W
W	F	ausgeschlossen!
F	W	W
F	F	W

Die Belegung in der zweiten Zeile wird durch $\Longrightarrow$ ausgeschlossen. □

Im folgenden Satz wollen wir noch einige Eigenschaften der Fuzzy-Implikation zusammenfassen.

Satz 5.6 *Für die aussagenlogische Implikationsbeziehung „$\Longrightarrow$“ gilt:*

1. *Reflexivität, d.h.: $A \Longrightarrow A$,*
2. *Transitivität, d.h.: $A \Longrightarrow B$ und $B \Longrightarrow C$, dann gilt auch $A \Longrightarrow C$,*
3. *wenn $A \Longrightarrow B$ und $B \Longrightarrow A$ dann ist auch $A \Longleftrightarrow B$ erfüllt.*

Mit Hilfe von Wahrheitswertetabellen läßt sich leicht der Nachweis dieser Aussagen führen.

Als Vorbereitung auf das Kapitel über Fuzzy-Regler führen wir in der nächsten Bemerkung eine „Normalform“ für aussagenlogische Folgerungen ein. Diese Normalform zeichnet sich einerseits durch eine konjunktive Verknüpfung der Prämissen und andererseits durch das Vorhandensein einer einzelnen Konklusion aus. Alle aussagelogischen Folgerungen lassen sich auf eine solche Normalform bringen.

Bemerkung 5.7

1. In den aussagenlogischen Folgerungen werden die n-stelligen Aussagen $A_1, \ldots, A_m$ konjunktiv verknüpft. Treten Disjunktionen in den Prämissen auf, so lassen sich diese Regeln in solche mit nur Konjunktionen überführen. Dazu kann wie folgt vorgegangen werden:
   Gegeben sei eine Aussage der Form $(A_1 \vee A_2 \rightarrow B)$ Dann läßt sich diese Folgerung auf zwei Subjunktionen aufteillen, in denen nur A_1 bzw. A_2 als Prämisse auftritt. Dazu betrachten wir die folgende Wahrheitswertetabelle:

A_1	A_2	B	$A_1 \vee A_2 \to B$	$A_1 \to B$	$A_2 \to B$	$(A_1 \to B) \wedge (A_1 \to B)$
W	W	W	W	W	W	W
W	W	F	F	F	F	F
W	F	W	W	W	W	W
W	F	F	F	F	W	F
F	W	W	W	W	W	W
F	W	F	F	W	F	F
F	F	W	W	W	W	W
F	F	F	W	W	W	W

Offenbar gilt dann $A_1 \vee A_2 \to B$ genau dann, wenn $A_1 \Rightarrow B$ und $A_2 \Rightarrow B$ gelten.

2. Betrachten wir nun den Fall, daß eine aussagenlogische Folgerung B eine Konjunktion meherer Aussagen $B_1 \wedge B_2 \wedge \cdots \wedge B_j$ ist, so gilt:

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_m \Longrightarrow (B_1 \wedge B_2 \wedge \cdots \wedge B_j) \ .$$

Nach Satz 5.5 bedeutet das, daß

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_m \longrightarrow (B_1 \wedge B_2 \wedge \cdots \wedge B_j)$$

eine Tautologie ist, so daß gilt

$$\begin{aligned}
& \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_m) \vee (B_1 \wedge B_2 \wedge \cdots \wedge B_j) = 1 \\
\Leftrightarrow \quad & (\neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_m) \vee B_1) \wedge (\neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_m) \vee B_2) \wedge \cdots \\
& \cdots \wedge (\neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_m) \vee B_j) = 1 \\
\Leftrightarrow \quad & (\neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_m) \vee B_j) = 1 \quad \forall\, j = 1, \ldots, j \\
\Leftrightarrow \quad & (\neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_m) \vee B_j) \quad \text{ist eine Tautologie für alle } j = 1, \ldots, j \ .
\end{aligned}$$

Auch in diesem Fall können wir uns somit auf Aussagen vom Typ

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_m \Longrightarrow B$$

beschränken, wobei B auf der „obersten Klammerebene“ keine Konjunktion mehr besitzt, einschränken. Eventuell sind mehrere solcher Implikationen konjunktiv zu verknüpfen.

3. Betrachten wir nun den Fall, daß B eine Disjunktion mehrerer Aussagen $B_1, \ldots, B_j$ darstellen, so gilt wie zuvor

$$\begin{aligned}
& \neg\,(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_m) \vee (B_1 \wedge B_2 \wedge \cdots \wedge B_j) = 1 \\
\Leftrightarrow \quad & \neg A_1 \vee \neg A_2 \vee \cdots \vee \neg A_m \vee B_1 \vee B_2 \vee \cdots \vee B_j = 1 \\
\Leftrightarrow \quad & \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_m \wedge \neg B_1) \vee (B_2 \vee B_3 \vee \cdots \vee B_j) = 1 \\
\Leftrightarrow \quad & A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_m \wedge \neg B_1 \Longrightarrow B_2 \vee B_3 \vee \cdots \vee B_j
\end{aligned}$$

Sukzessive lassen sich so alle Disjunktionen der obersten Klammerebene auf der rechten Seite entfernen.

4. Durch abwechselndes Anwenden der Ergebnisse aus b) und c) läßt sich jede Implikation in mehrere konjunktive Aussagen vom Typ

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_m \Longrightarrow B$$

überführen. Da sich ferner alle binären Verknüpfungen aus Definition 5.17 mit Hilfe von $\vee$, $\wedge$ und $\neg$ darstellen lassen, können wir sogar festhalten, daß B keine binären Verknüpfungen mehr enthält.

Modus ponens – Schlußfigur

Mit „Schlußfiguren“ werden aussagenlogische Schlüsse bezeichnet, die man wegen ihres häufigen Gebrauchs gerne in eine zweidimensionale Form bringt.

Definition 5.8 *Als* Modus ponens *(„Abtrennungsregel“) bezeichnet man die Schlußfigur*

$$\begin{array}{ll} a \longrightarrow b & \text{„wenn } a\text{, dann } b\text{“} \\ \underline{a \qquad\quad} & \underline{\text{„nun aber } a \qquad\qquad} \\ \qquad\quad b & \text{„also } b\text{“} \end{array}$$

Wir wollen nun die Allgemeingültigkeit des modus ponens zeigen.

$$\begin{aligned} ((a \longrightarrow b) \wedge a) \longrightarrow b &\Longleftrightarrow \neg((\neg a \vee b) \wedge a) \vee b \\ &\Longleftrightarrow (a \wedge \neg b) \vee \neg a \vee b \\ &\Longleftrightarrow (a \vee \neg a \vee b) \wedge (\neg b \vee \neg a \vee b) \\ &\Longleftrightarrow W \wedge W \end{aligned}$$

Die Bedeutung des modus ponens liegt darin, daß dieser Schluß hinter den meisten `wenn` – `dann`-Verknüpfungen des täglichen Lebens steht.

Beispiel 5.9
Beispielhaft betrachten wir die folgende „logische“ Folgerung

„Wenn die Sonne scheint, dann regnet es nicht“

Um den logischen Schluß aufzulösen müssen wir nach den Prämissen und, falls es sich um einen bestimmten Schluß handelt, nach der Schlußfigur fragen. Nehmen wir für letztere den Modus ponens, so lautet die Schlußfigur hier (a: die Sonne scheint, b: es regnet nicht)

$$\begin{array}{ll} \text{Wenn die Sonne scheint, dann regnet es nicht.} & a \longrightarrow b \\ \underline{\text{Die Sonne scheint} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad} & \underline{a \qquad\quad} \\ \text{Es regnet nicht} & \qquad\quad b \end{array}$$

Der Schluß setzt die Wahrheit der Prämisse voraus, d.h.

$$\delta(a \longrightarrow b) = W \quad \text{und} \quad \delta(a) = W \ .$$

Diese Voraussetzungen müssen inhaltlich überprüft werden. Die Aussagen *die Sonne scheint* bzw. *es regnet nicht* können, je nach Wetterlage, erfüllt sein oder nicht zutreffen. Die kritische Stelle jeder Subjunktion stellt dabei die zweite Zeile der Wahrheitstafel dar:

a	b	$a \longrightarrow b$
W	W	W
W	F	F
F	W	W
F	F	W

Ist $\delta(a) = W$ und $\delta(b) = F$ möglich? Offenbar gibt es Situationen in denen es sowohl regnet als auch die Sonne scheint (man kann dann einen Regenbogen beobachten). Für diese Belegung ist $\delta(a \to b) = F$, d.h. die Aussage „Wenn die Sonne scheint, dann regnet es nicht“ kann nicht als Prämisse eines logischen Schlusses genommen werden! Der oben angegebene Modus ponens ist für dieses Beispiel also nicht zwingend. Die Prämissen sind deshalb stets sorgfältig zu prüfen.

In der Mathematik treten solche Probleme nicht auf, da dort die Prämisse des Modus ponens immer wahr ist.

Neben dem Modus ponens gibt es noch weitere Schlußfiguren. Der Vollständigkeit halber geben wir die folgenden Schlußfiguren an, ohne sie jedoch weiter zu untersuchen.

Definition 5.10 *Als* Modus tollens *(„Widerspruchsregel“) bezeichnet man die Schlußfigur*

$$\begin{array}{rl} a \longrightarrow b & \textit{„wenn a, dann b“} \\ \neg b & \textit{„nun aber nicht b} \\ \hline \neg a & \textit{„also nicht a“} \end{array}$$

Definition 5.11 *Als* Modus barbara *(„Kettenschluß“) bezeichnet man die Schlußfigur*

$$\begin{array}{rl} a \longrightarrow b & \textit{„wenn a, dann b“} \\ b \longrightarrow c & \textit{„wenn b, dann c“} \\ \hline a \longrightarrow c & \textit{„also: wenn a, dann c“} \end{array}$$

5.2 Fuzzy-Aussagenlogik

Im vorangegangenen Abschnitt haben wir uns mit binären Aussagen und deren Verknüpfungen beschäftigt. Von diesem Zweiwertigkeitsprinzip wollen wir uns nun lösen. Im folgenden werden wir deshalb Aussagen betrachten, die zu einem gewissen Grad als wahr bzw. falsch zu bezeichnen sind. Die Gültigkeit solcher Aussagen wird in unserer Sprache üblicherweise durch linguistische Beschreibungen wie zum Beispiel *wahrscheinlich, möglich, sinnlos* angegeben. Durch die Erweiterung des Bildbereichs der Wahrheitswertefunktion δ $(\{0,1\})$ auf $[0,1]$ wird einer Aussage a der Wahrheitswert $\delta(a) \in [0,1]$ zugeordnet. Dabei bedeuten auch hier wieder die Wahrheitswert 1 und 0, daß es sich um eine wahre bzw. falsche Aussagen handelt. Die Benennung der Wahrheit aus $]0,1[$ spielt keine Rolle, vielmehr ist festzuhalten, daß sich jede Aussage bzgl. ihres Wahrheitswertes bewerten lassen, und daß die Bewertung der Verknüpfungen alleine von Werten der beteiligten Aussagen abhängen. Wie eine Aussage zu bewerten ist, ist in den meisten Fällen vom Betrachter abhängig und deshalb oftmals strittig wie an der folgenden Aussage zu sehen ist:

Der Kahle Asten ist ein hoher Berg.

Ein im Flachland lebender Mensch würde dieser Aussage wahrscheinlich einen sehr viel größeren Erfüllungsgrad zuordnen als ein Alpinist oder gar ein „Bezwinger“ des Mount Everest, der diese Aussage vielleicht mit dem Wahrheitswert 0 belegen würde.

Entsprechend zu Definition 5.1 können wir nun die Semantik (Bedeutung) von Fuzzy-Logik Ausdrücken festlegen.

Definition 5.12

1. *Es sei Ω die Menge aller zulässigen Ausdrücke. Dann wird die Wahrheitswertefunktion δ gemäß*
$$\delta : \Omega \longrightarrow [0,1]$$
definiert. Entsprechend zu Definition 5.1 gilt
$$\delta\Big(A(x_1,\ldots,x_n)\Big) = A\Big(\delta(x_1),\ldots,\delta(x_n)\Big)$$
für eine n-stellige Aussage A.

2. *Als Operationen zwischen fuzzy-logischen Aussagen führen wir die folgenden Fuzzy-Operationen ein*
fuzzy-logische Negation „$\neg$“: $\delta(\neg a) := 1 - \delta(a)$
fuzzy-logische Konjunktion „$\wedge$“: $\delta(a \wedge b) := \min\Big(\delta(a), \delta(b)\Big)$
fuzzy-logische Disjunktion „$\vee$“: $\delta(a \vee b) := \max\Big(\delta(a), \delta(b)\Big)$

fuzzy-logische Subjunktion „$\rightarrow$“: $\delta(a \rightarrow b) := \min\Big(1, 1 - \delta(a) + \delta(b)\Big)$[2]
fuzzy-logische Bijunktion „$\leftrightarrow$“: $\delta(a \leftrightarrow b) := 1 - \Big|\delta(a) - \delta(b)\Big|$

3. *Die n-stellige Aussage $A(x_1, \ldots, x_n)$ heißt* fuzzy-logisch allgemeingültig *oder* fuzzy-logische Tautologie, *wenn für alle Belegungen $\delta(x_1), \ldots, \delta(x_n)$ gilt*

$$\delta(A(x_1, \ldots, x_n)) = 1 \ .$$

4. *A heißt* fuzzy-logisch erfüllbar, *wenn es eine Belegung $\delta(x_1), \ldots, \delta(x_n)$ gilbt, so daß gilt*

$$\delta\left(A(x_1, \ldots, x_n)\right) \neq 0 \ .$$

Bemerkung 5.13
Die fuzzy-logische Implikation läßt sich nicht wie in der klassischen binären Logik auf

$$a \rightarrow b \quad \Leftrightarrow \quad \neg a \vee b$$

zurückführen. Es gilt hier offenbar nicht

$$\tilde{A} \rightarrow \tilde{B} \ \not\Leftrightarrow \max\Big(1 - \delta(a), \delta(b)\Big) \ .$$

Mittels der Fuzzy-Logik soll natürlich auch die Subjunktion fuzzifiziert werden. Allerdings gehen wir dabei so vor, daß der Wahrheitswertebereich der Subjunktion von der Menge $\{0, 1\}$ auf das Intervall $[0, 1]$ erweitert wird. Das bedeutet, daß wird eigentlich die Aussage

$$(\tilde{A} \rightarrow \tilde{B}) = 1$$

fuzzifizieren. Auch hier gibt es viele verschiedene Möglichkeiten der Fortsetzung. Wir werden am Ende des Kapitels einige Fuzzy-Implikations-Operatoren gegenüberstellen.

Beispiel 5.14
Wir betrachten zunächst die folgende unscharfe Aussage:

$A :=$ „Diplom-Mathematiker mit Kenntnissen in der Informatik
und der Betriebswirtschaftslehre haben gute Berufsaussichten
in der Entwicklung oder im Management.“

Wir werden nun untersuchen inwieweit diese Aussichten auf Dipl.-Math. Peter S. zutreffen. Dazu betrachten wir die folgenden Aussagen:

$\tilde{A} :=$ „Peter S. hat Kenntnisse in der Informatik“ $\qquad \delta(\tilde{A}) = 0.9$
$\tilde{B} :=$ „Peter S. hat Kenntnisse in der Betriebswirtschaftslehre“ $\qquad \delta(\tilde{B}) = 0.7$

[2]Diese Definition der fuzzy-logischen Subjunktion geht auf J. Lukasiewicz zurück und ist hier aufgrund der „schöneren“ Eigenschaften gewählt worden. Ebenso könnten wir hier auch die fuzzy-logische Subjunktion getreu L. Zadehs Vorbild als $\delta(a \rightarrow b) := \min\Big(1, \max(1 - \delta(a), \delta(b))\Big)$ definieren.

$\tilde{C}$:= „Es bestehen gute Berufsaussichten in der Entwicklung“ $\delta(\tilde{C}) = 0.8$
$\tilde{D}$:= „Es bestehen gute Berufsaussichten im Management“ $\delta(\tilde{D}) = 0.4$
Mittels der oben eingeführten Fuzzy-Implikation läßt sich nun überprüfen, ob und zu welchen Grad die zu Beginn des Beipiels genannten Berufsaussichten für Mathematiker auch für Peter S. zutreffen. Dazu haben wir den Wahrheitswert bzw. Erfülltheitsgrad von

$$A(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}) = (\tilde{A} \wedge \tilde{B}) \longrightarrow (\tilde{C} \vee \tilde{D})$$

zu berechnen.

$$\begin{aligned} \delta(A) &= \delta\Big((\tilde{A} \wedge \tilde{B}) \to (\tilde{C} \vee \tilde{D})\Big) \\ &= \min\Big(1, 1 - \delta(\tilde{A} \wedge \tilde{B}) + \delta(\tilde{C} \vee \tilde{D})\Big) \\ &= \min\Big(1, 1 - \min(\delta(\tilde{A}), \delta(\tilde{B})) + \max(\delta(\tilde{C}), \delta(\tilde{D}))\Big) \\ &= \min(1, 1 - 0.7 + 0.8) \\ &= 1\ , \end{aligned}$$

das heißt, A ist eine wahre Aussage. Zu kleineren Wahrheitwerten gelangt man nur dann, wenn gilt

$$\delta(\tilde{A} \wedge \tilde{B}) > \delta(\tilde{C} \vee \tilde{D})\ .$$

In der Fuzzy Logik gelten zahlreiche Äquivalenzen, die aus der klassischen Logik bekannt sind. Die wichtigsten sind im folgenden Satz Zusammengefaßt.

Satz 5.15
Für die Aussagen $a, b, c \in \Omega$ gilt:

Kommutativgesetz	$a \wedge b \Leftrightarrow b \wedge a$	$a \vee b \Leftrightarrow b \vee a$
Assoziativgesetz	$a \wedge (b \wedge c) \Leftrightarrow (a \wedge b) \wedge c$	$a \vee (b \vee c) \Leftrightarrow (a \vee b) \vee c$
Distributivgesetz	$a \wedge (b \vee c) \Leftrightarrow (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$	$a \vee (b \wedge c) \Leftrightarrow (a \vee b) \wedge (a \vee c)$
Absorptionsgesetz	$a \wedge (a \vee b) \Leftrightarrow a$	$a \vee (a \wedge b) \Leftrightarrow a$
Idempotenzgesetz	$a \wedge a \Leftrightarrow a$	$a \vee a \Leftrightarrow a$
De Morgan	$\neg(a \wedge b) \Leftrightarrow \neg a \vee \neg b$	$\neg(a \vee b) \Leftrightarrow \neg a \wedge \neg b$
Neutralelement	$a \wedge 1 \Leftrightarrow a$	$a \vee 0 \Leftrightarrow a$
Faktorelement	$a \wedge 0 \Leftrightarrow 0$	$a \vee 1 \Leftrightarrow 1$

Beweis: Mit Hilfe von Wahrheitswertetabellen läßt sich die Gültigkeit der einzelnen Gesetze leicht nachweisen (vgl. Übungen).

Bemerkung 5.16
Wie schon bei Fuzzy Mengen so ist auf für die Fuzzy-Logik von fundamentaler Bedeutung, daß die „Komplementgesetze“ $a \wedge \neg a \Leftrightarrow 0$ und $a \vee \neg a \Leftrightarrow 1$ nicht gelten!

Bemerkung 5.17
Die klassische Schlußfigure des Modus ponens ist in der Fuzzy-Logik nicht allgemeingültig. Betrachten wir nämlich den Modus ponens

$$\begin{array}{l} \tilde{A} \longrightarrow \tilde{B} \\ \tilde{A} \\ \hline \qquad \tilde{B} \end{array}$$

das heißt, $((\tilde{A} \to \tilde{B}) \wedge \tilde{A}) \to \tilde{B}$ mit Fuzzy-Aussagen $\tilde{A}$ und $\tilde{B}$, so ergibt sich für die Belegung $\delta(\tilde{A}) = 0.8$ und $\delta(\tilde{B}) = 0.3$

$$\begin{aligned} \delta\Big(\big((\tilde{A} \to \tilde{B}) \wedge \tilde{A}\big) \to \tilde{B}\Big) &= \min\Big(1, 1 - \delta\big((\tilde{A} \to \tilde{B}) \wedge \tilde{A}\big) + \delta(\tilde{A})\Big) \\ &= \min\big(1, 1.3 - \min(0.5, 0.8)\big) \\ &= 0.8 \neq 1 \end{aligned}$$

Daher stellt sich nun die Frage, welche Fuzzy-Operationen und insbesondere welcher Fuzzy-Implikations-Operator verwendet werden können, damit der Modus ponens auch in der Fuzzy-Logik seine Allgemeingültigkeit behält. Die Beantwortung dieser Frage ist Ziel des nächsten Abschnitts.

5.3 Generalisierter Modus ponens

Ziel des unscharfen Schließens [engl.: approximate reasoning] ist es aus unscharfen Prämissen unpräzise Folgerungen herzuleiten. Entscheidend ist dabei, daß der Schluß nach formalen Rechenvorschriften erfolgen soll. Da der im vorherigen Abschnitt untersuchte Modus ponens in der Fuzzy-Logik nicht allgemeingültig ist, wird diese Schlußfigur zunächst verallgemeinert, um so Kriterien zu finden, die zur Allgemeingültigkeit der Schlußfigur in der Fuzzy-Logik führen können. Unsere Vorgehenweise unterteilt sich dazu in drei Teilziele.

1. Relationendarstellung von Fuzzy `IF ... THEN` Regeln
2. Kompositionsregel für Fuzzy-Relationen
3. Rückführung des generalisierten Modus ponens auf die Kompositionsregel

Bevor wir uns mit dem ersten Teilziel beschäftigen, soll zunächst der Begriff der linguistischen Variable eingeführt werden.

Definition 5.18
Linguistische Variablen *sind Variablen sprachlicher Art, deren Werte* linguistische Terme *genannt werden und sich verbal erklären lassen. Zur Modellierung von linguistischen Termen werden Fuzzy-Mengen verwendet.*

Beispiel 5.19
Ein Beispiel für eine linguistische Variable ist der Begriff *Körpergröße*, der durch die linguistischen Terme *klein, mittelgroß, groß* etc. näher spezifizieren läßt. Die Adjektive

lassen sich dann wie in Abb. 2 durch Zugehörigkeitsfunktion oder mit anderen Worten als Fuzzy-Mengen darstellen. Ebenso lassen sich linguistische Terme führt die linguistische Variable *Wahrheitswert* angeben. Entsprechende verbale Beschreibungen sind *mehr oder weniger gleich, ungleich, sehr ähnlich* etc.

Fuzzy-Regeln als Relationen

Eine Fuzzy-Regel `IF` $\tilde{A}$ `THEN` $\tilde{B}$ ordnet einer Fuzzy-Menge $\tilde{A}$ eine Fuzzy-Menge $\tilde{B}$ zu, wobei $\tilde{A} \subset G_1$ und $\tilde{B} \subset G_2$ für Grundräume G_1 und G_2 gilt. Offenbar läßt sich eine solche Regel auch als Fuzzy-Relation R zwischen den Grundräumen G_1 und G_2 auffassen. Diese Art der Sichtweise wird durch Abb. 22 verdeutlicht. Wir erhalten somit

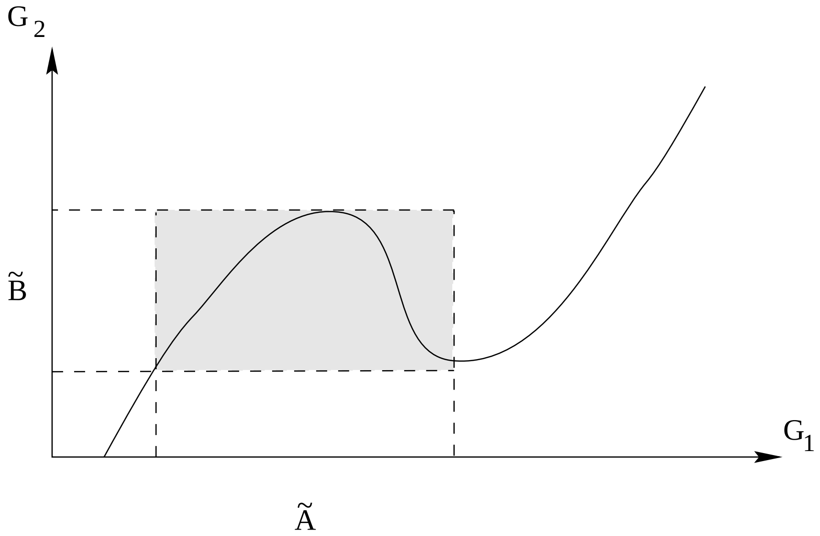

Abbildung 22: Visualisierung der Fuzzy-Regel `if` $\tilde{A}$ `then` $\tilde{B}$.

mittels einer Fuzzy-Relation $\tilde{R}$, die durch eine Fuzzy-Regel `IF` $\tilde{A}$ `THEN` $\tilde{B}$ induziert wird, folgende Gleichung

$$\tilde{B} = \tilde{A} \circ \tilde{R} \ ,$$

wobei $\circ$ für eine max-t-Kompositionsmethode steht (vgl. Kapitel 3). Aufgrund der formalen Gleichheit für die klassische zweiwertige Subjunktion $\rightarrow$ erhalten wir

$$\begin{aligned} a \rightarrow b \quad &\Leftrightarrow \quad \neg a \vee b \\ &\Leftrightarrow \quad (\neg a \vee b) \wedge (\neg a \vee a) \\ &\Leftrightarrow \quad \neg a \vee (b \wedge a) \\ &\Leftrightarrow \quad (a \wedge b) \vee \neg a \\ &\Leftrightarrow \quad (a \wedge b) \vee (\neg a \wedge W) \ . \end{aligned} \tag{16}$$

Diese Äquivalenz nutzen wir für die Berechnung der Fuzzy-Relation $\tilde{R}$ und erhalten nunmehr

$$\tilde{R} = (\tilde{A} \times \tilde{B}) \cup (\overline{A} \times G_2)$$

Die Relationsmatrix beschreibt dabei letztendlich die Beziehung

$$\texttt{if } x \in \tilde{A} \texttt{ then } y \in \tilde{B}$$

für $x \in G_1$ und $y \in G_2$.

In der klassischen Aussagenlogik läßt sich die Subjunktion „→" zweier Aussagevariablen a, b formal auf die in Gleichung (16) dargestellte Inferenzregel zurückführen. Gehen wir zu Fuzzy-Mengen über, so lassen sich $\tilde{A} \wedge \tilde{B}$ durch $\min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x))$, $\tilde{A} \vee \tilde{B}$ durch $\max(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x))$ und $\neg\tilde{A}$ durch $\mu_{\neg\tilde{A}}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x)$ — getreu L. Zadehs Vorbild — darstellen. Diese Darstellung führt uns nun zur sc Zadehschen Maximum-Regel die auch *Wenn-dann-Inferenzregel* genannt wird (vgl. [Zadeh,1975b]).

Definition 5.20
Es sei $\tilde{A}$ ein Fuzzy-Menge über G_1 und $\tilde{B}$ eine Fuzzy-Menge über G_2. Als Wenn-dann-Inferenzregel *bezeichnet man die Schlußfigur*

$$\frac{\textit{wenn } \tilde{A} \textit{ dann } \tilde{B}}{(A \times B) \cup (\overline{A} \times G_2)}$$

wobei die Fuzzy-Menge $A \times B$ über der Grundmenge $G_1 \times G_2$ zu bilden ist. Entsprechend gilt

$$\begin{aligned}
\mu_{A \times B}(x, y) &= \min\Big(\mu_A(x), \mu_B(y)\Big) \\
\mu_{\overline{A} \times G_2}(x, y) &= \min\Big(1 - \mu_A(x), 1\Big) = 1 - \mu_A(x) \\
\mu_{(A \times B) \cup (\overline{A} \times G_2)}(x, y) &= \max\Bigg(\min\Big(\mu_A(x), \mu_B(y)\Big), 1 - \mu_A(x)\Bigg)
\end{aligned}$$

Mittels Definition 5.20 erhalten wir eine einfache Auswertstrategie für Fuzzy-Regeln vom `if ... then`-Typ.

Kompositionsregel

Prämissen und Konklusionen einer Fuzzy-Regel `if` $\tilde{A}$ `then` $\tilde{B}$ lassen sich durch zweistellige Relationen darstellen, wie wir gerade gesehen haben. In der folgenden Definition werden Fuzzy-Relation für die Schlußfigure verwendet.

Definition 5.21 *Es seien $R_1 = R_1(X, Y)$ und $R_2 = R_2(Y, Z)$ Fuzzy-Relationen über $G_1 \times G_2$ bzw. über $G_2 \times G_3$. Dann heißt die Schlußfigure*

$$\begin{array}{l} \textit{wenn } R_1 \\ \underline{\textit{und } R_2 \qquad\qquad} \\ \textit{dann } R_2 \star R_1 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l} R_1(X, Y) \\ \underline{R_2(Y, Z) \qquad\qquad\quad} \\ R_2(Y, Z) \star R_1(X, Y) \end{array}$$

die Kompositionsregel der Inferenz. Dabei steht $\star$ für eine beliebige max-t*-Komposition von Fuzzy-Relationen (t steht hier für eine bel. t-Norm).*

Diese Kompositionsregel der Inferenz stellt uns nun ein Konzept bereit, mit dem der Modus ponens formal auch für Fuzzy-Mengen — sie können als Fuzzy-Relationen gedeutet werden — ausgewertet werden kann. Das Ergebnis der Kompositionsregel unter Verwendung der max-min-Komposition ist eine Fuzzy-Menge über $G_1 \times G_3$, die durch die Zugehörigkeitsfunktion

$$\mu_{R_2 \star R_1}(x, z) = \max_{y \in G_2} \Big(\min \big(\mu_{R_1}(x, y), \mu_{R_2}(y, z) \big) \Big)$$

beschrieben wird.

Generalisierte Modus ponens

Im Bemerkung 5.17 hatten wir bereits gesehen, daß der Modus ponens in der Fuzzy-Logik nicht allgemeingültig ist. Die Frage ob, es alternative Modelle gibt, die Allgemeingültigkeit besitzen, versuchen wir in diesem Abschnitt zu beantworten.

Definition 5.22
Es seien $\tilde{A}, \tilde{A}'$ Fuzzy-Mengen über dem Grundraum G_1 und $\tilde{B}, \tilde{B}'$ Fuzzy-Mengen über dem Grundraum G_2. Die Schlußfigur

$$\begin{array}{l} X \textit{ ist } \tilde{A}' \\ \textit{wenn } X \textit{ ist } \tilde{A}, \textit{ dann } Y \textit{ ist } \tilde{B} \\ \hline Y \textit{ ist } \tilde{B}' \end{array} \qquad \textit{bzw.} \qquad \begin{array}{r} \tilde{A}' \\ \tilde{A} \longrightarrow \tilde{B} \\ \hline \tilde{B}' \end{array}$$

wird generalisierter Modus ponens *genannt.*

Bemerkung 5.23
Da sich Fuzzy-Regeln als Relationen darstellen lassen, können wir mittels der Kompositionsregel ein einfaches Schema formulieren, das zur Auflöung des generalisierten Modus ponens herangezogen werden kann. Dabei wird die `wenn` – `dann` Prämisse durch einen Fuzzy-Implikations-Operator berechnet und für den Übergang zur Konklusion die max-t-Komposition verwendet. Dabei steht t für eine beliebige t-Norm. Welche Implikations-Operatoren bzw. welche max-t-Komposition nun zu verwenden ist, bzw. zur Allgemeingültigkeit führt ist im folgenden zu überprüfen.

Bemerkung 5.24
Für den generalisierten Modus ponens lassen sich „intuitive" Kriterien formulieren, mit denen die Brauchbarkeit für das approximative Schließen zum Ausdruck gebracht werden kann. Diese Kriterien beschreiben, wie sich die Abweichung der ersten Prämisse (X ist $\tilde{A}'$) von der Voraussetzung der zweiten Prämisse (X ist $\tilde{A}$) auf die entsprechende Abweichung der Konklusion (Y is $\tilde{B}'$) von der Konsequenz der zweiten Prämisse (Y ist $\tilde{B}$) fortsetzen (vgl. Tab. 5). Dabei beziehen sich die Kriterien auf den generalisierten Modus ponens. Ganz analog lassen sich auch für eine verallgemeinerte Variante des Modus tollens bzw. Modus barbara Kriterien formulieren.

Bemerkung 5.25
In dieser Bemerkung stellen wir noch einige algebraische Eigenschaften von Fuzzy-Implikations-Operatoren „$\rightarrow$“zusammen, die als wünschenswert erachtet werden. Seien dazu $\tilde{A}, \tilde{A}'$ Fuzzy-Mengen über G_1 und $\tilde{B}, \tilde{B}'$ Fuzzy-Mengen über G_2

Offenbar ist die Zahl der Fuzzy-Implikations-Operatoren und max-t-Kompositionen so groß, daß nur ausgewählte Kombinationen betrachtet werden können. Zuvor aber soll die allgemeine Auflösungsstrategie des generalisierten Modus ponens vorgestellt werden. Dazu seien $\tilde{A}, \tilde{A}'$ und $\tilde{B}, \tilde{B}'$ Fuzzy-Mengen und $R(X, Y)$, die durch die Fuzzy-Regel `if` $\tilde{A}$ `then` $\tilde{B}$ induzierte Fuzzy-Relation. Dann führt der generalisierte Modus ponens zu folgenden Schlußfiguren:

$$\begin{array}{lc} X \text{ ist } \tilde{A}' & R_1(X) = \tilde{A}' \\ \text{wenn } X \text{ ist } \tilde{A}, \text{ dann } Y \text{ ist } \tilde{B} & R_2(X,Y) = R \\ \hline Y \text{ ist } \tilde{B}' & R_3(Y) = \quad \tilde{B}' \end{array}$$

Insgesamt folgt somit $R_3(Y) = R_2(X, Y) \circ R_1(X)$ oder kurz:

$$\tilde{B}' = R(X, Y) \circ \tilde{A}' \ .$$

Wir stellen im folgenden einige zu untersuchende Fuzzy-Implikations-Operatoren vor.

Zadeh	$\tilde{A} \rightarrow_{\text{Zad}} \tilde{B}$	$\max\Big(\min(\mu_{\tilde{A}}, \mu_{\tilde{B}}), 1 - \mu_{\tilde{A}}\Big)$
Mamdani	$\tilde{A} \rightarrow_{\text{Mam}} \tilde{B}$	$\min(\mu_{\tilde{A}}, \mu_{\tilde{B}})$
Lukasiewicz	$\tilde{A} \rightarrow_{\text{Luk}} \tilde{B}$	$\min(1, 1 - \mu_{\tilde{A}} + \mu_{\tilde{B}})$
Gödel	$\tilde{A} \rightarrow_{\text{Göd}} \tilde{B}$	$\begin{cases} 1 & \text{falls } \mu_{\tilde{A}} \leq \mu_{\tilde{B}} \\ \tilde{B} & \text{sonst} \end{cases}$

Für den ZADEHsche Fuzzy-Implikation gilt sowohl für die max-min-Komposition als auch für die max-product-Komposition das Kriterium K 4a. Der Operator erfüllt zusätzlich die algebraischen Eigenschaften K II bis KIV sowie K IX.

Auch für die LUKASIEWICZ-Implikation gilt in Verbindung mit der *max*-min-Komposition und der max-product-Komposition nur Kriterium K 4a. Allerdings werden von diesem Operator die algebraischen Eigenschaften K I bis K IX erfüllt. Bezüglich des generalisierten Modus ponens schneidet also der LUKASIEWICZ-Operator nicht besser als der ZADEHsche-Operator ab. Aufgrund der „optimalen“ Erfüllung der algebraischen Eigenschaften wird diesem Operator ein besonderes Interesse eingeräumt.

Der GÖDEL-Operator schneidet bezüglich des generalisierten Modus ponens in Verbindung mit der max-min-Komposition als auch mit der max-product-Komposition am besten ab. Hier sind die Bedingungen K 1, K 2b, K 3a und K 4a erfüllt. Aus algebraischer Sicht treffen auch die Kriterien K I bis K VIII zu. Nachteil wirkt sich für diesen Operator allerdings die fehlende Stetigkeit aus, weshalb er weniger Verwendung findet.

Zeichen	Sprechweise	Definition			Verknüpfung
$\neg$	nicht	a		$\neg a$	Negation
		W		F	
		F		W	
$\vee$	oder	a	b	$a \vee b$	Disjunktion
		W	W	W	
		W	F	W	
		F	W	W	
		F	F	F	
$\wedge$	und	a	b	$a \wedge b$	Konjunktion
		W	W	W	
		W	F	F	
		F	W	F	
		F	F	F	
$\longrightarrow$	wenn – dann	a	b	$a \longrightarrow b$	Subjunktion
		W	W	W	
		W	F	F	
		F	W	W	
		F	F	W	
$\longleftrightarrow$	genau dann – wenn	a	b	$a \longleftrightarrow b$	Bijunktion
		W	W	W	
		W	F	F	
		F	W	F	
		F	F	W	

Tabelle 4: Definition der Verknüpfungen von Aussagen in der Aussagenlogik. Die Junktorenbezeichnungen in der letzten Spalte entsprechen dabei DIN 5473 (in der neuen Fassung von 1992)

Kriterium	1. Prämisse: X ist $\tilde{A}'$	Folgerung: Y ist $\tilde{B}'$
K 1	X ist $\tilde{A}$	Y ist $\tilde{B}$
K 2a	X ist sehr $\tilde{A}$	Y ist sehr $\tilde{B}$
K 2b	X ist sehr $\tilde{A}$	Y ist $\tilde{B}$
K 3a	X ist mehr oder weniger $\tilde{A}$	Y ist mehr oder weniger $\tilde{B}$
K 3b	X ist mehr oder weniger $\tilde{A}$	Y ist $\tilde{B}$
K 4a	X ist nicht $\tilde{A}$	Y ist unbekannt
K 4b	X ist nicht $\tilde{A}$	Y ist nicht $\tilde{B}$

Tabelle 5: Implizite Kriterien, die an den generalisierten Modus ponens gestellt werden.

K I	$\tilde{A}' \geq \tilde{A} \quad \Longrightarrow \quad \delta(\tilde{A}' \to \tilde{B}) \leq \delta(\tilde{A} \to \tilde{B})$
K II	$\tilde{B}' \leq \tilde{B} \quad \Longrightarrow \quad \delta(\tilde{A} \to \tilde{B}') \leq \delta(\tilde{A} \to \tilde{B})$
K III	gilt $\delta(\tilde{A}) = 0$ so folgt $\delta(\tilde{A} \to \tilde{B}) = 1$
K IV	gilt $\delta(\tilde{A}) = 1$ so folgt $\delta(\tilde{A} \to \tilde{B}) = \delta(\tilde{B})$
K V	$\delta(\tilde{A} \to \tilde{B}) \geq \delta(\tilde{B})$
K VI	$\delta(\tilde{A} \to \tilde{A}) = 1$
K VII	$\delta(\tilde{A} \to (\tilde{B} \to \tilde{C})) = \delta((\tilde{A} \to \tilde{B}) \to \tilde{C})$
K VIII	$\delta(\tilde{A} \to \tilde{B}) = 1 \quad \Leftrightarrow \delta(\tilde{A}) \leq \delta(\tilde{B})$
K IX	$\to$ ist ein stetiger Operator.

Tabelle 6:

Teil II
Anwendungen

6 Fuzzy-Controller

Die weitaus größte Beachtung findet die Fuzzy-Logik zur Zeit im Bereich von technischen Steuerungen (Fuzzy-Control). Derartige Regler differieren von den herkömmlichen Controllern, da sie keine explizite mathematische Beschreibung des funktionalen Zusammenhangs zwischen Eingabedaten und Ausgabedaten verlangen. Sie unterscheiden sich ebenfalls in der Art und Weise, wie sie „Unsicherheit“ verarbeiten können.

Das Konzept der Fuzzy-Steuerung wurde bereits 1972 von L. ZADEH in [Zadeh,1972, Zadeh,1973] vorgestellt. Als erste wendeten E. MAMDANI und S. ASSILIAN dieses Konzept einige Jahre später auf die Steuerung einer Dampfmaschine an (vgl. [Mamdani et al.,1975]).

Im folgenden stellen wir nun den Aufbau und die Funktionsweise des Fuzzy-Reglers von E. MAMDANI vor. Eine Modifikation dieses Systems führt dann zu einer effizienteren Variante, die von M. SUGENO und T. TAKAGI in [Sugeno et al.,1985, Sugeno,1985] entwickelt wurde.

6.1 Fuzzy-Controller nach E. MAMDANI

E. MAMDANI hat mit der Entwicklung des ersten Fuzzy-Reglers den Weg für eine breite Verwendung von Fuzzy-Logik in kommerziellen Anwendungen geebnet. So werden Fuzzy-Regler mittlerweile in Waschmaschinen, Staubsaugern und vielen anderen Geräten des täglichen Lebens mit großem Erfolg eingesetzt. Hier betrachten wir zunächst das Grundmodell von E. MAMDANI.

Definition 6.1 *Der* Fuzzy-Controller *nach* E. MAMDANI *ist eine Steuereinheit bestehend aus den folgenden vier Komponenten:*

- *Einem* Fuzzifizierer*, der die crispen Eingaben in Fuzzy-Mengen transformiert,*
- *einer* Regelbasis*, die eine Menge von* `IF` *...* `THEN` *...-Regeln umfaßt,*
- *einer* Entscheidungslogik*, die mittels der Regelbasis eine Abbildung vom Eingaberaum in den Ausgaberaum herstellt und*
- *einem* Defuzzifizierer*, der aus einer Fuzzy-Menge eine crispe Ausgabe erzeugt.*

Ein Fuzzy-Controller erzeugt zu Eingabedaten $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *mit Hilfe der oben benannten vier Bausteine Ausgabedaten* $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_m) \in \mathbb{R}^m$ *(vgl. Abbildung 23).*

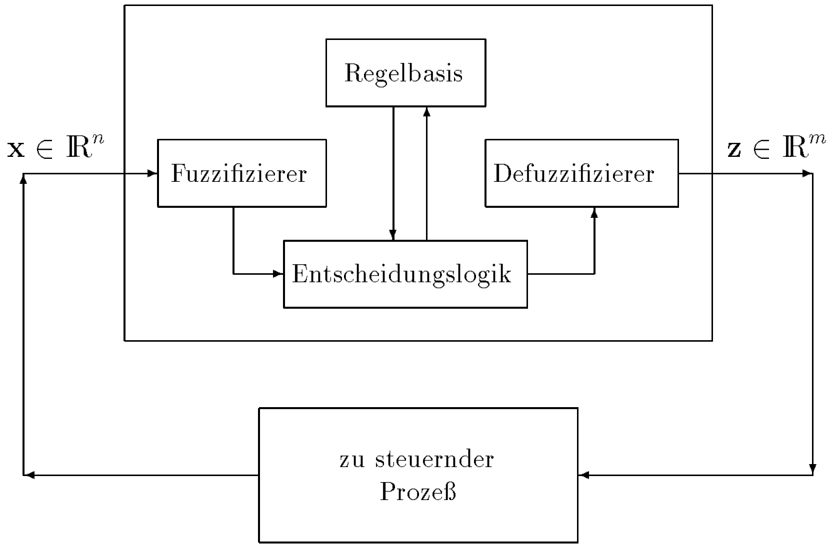

Abbildung 23: Aufbau des Fuzzy-Controllers nach E. MAMDANI.

Die vier Elemente des Fuzzy-Controllers sind in Abbildung 23 dargestellt. Wir wollen auf diese Elemente im folgenden genauer eingehen. Das Herzstück des Controllers stellt die Regelbasis dar. Diese besteht aus $r < \infty$ vielen linguistischen Regeln der Form

`IF` Menge von Bedingungen `THEN` Menge von Konsequenzen.

Dabei werden die Bedingungen, die durch t-Normen miteinander verknüpft sind, durch linguistische Terme, also Fuzzy-Mengen, beschrieben. Wir beschränken uns hier auf Regeln mit nur einer Konsequenz, da in diesem Fall die Darstellung noch recht übersichtlich ist. Außerdem stellt dies keine echte Einschränkung dar, denn jede Regel mit i Konsequenzen läßt sich in i Regeln mit denselben Bedingungen aber unterschiedlichen Konsequenzen darstellen. Formaler lauten die Fuzzy-Regeln R_j $(1 \leq j \leq r)$

$$R_j : \texttt{ IF } x_1 \in \tilde{a}_1^j \texttt{ AND } \ldots \texttt{ AND } x_n \in \tilde{a}_n^j \texttt{ THEN } z \in \tilde{b}^j \tag{17}$$

für die Inputvariablen $\mathbf{x} = x_1, \ldots, x_n$ aus einem Kompaktum $U \subset \mathbb{R}^n$, die Outputvariable $z \in \mathbb{R}$ und die Fuzzy-Mengen $\tilde{a}_1^j, \ldots, \tilde{a}_n^j, \tilde{b}^j$. Die Fuzzy-Mengen werden dabei durch die Zugehörigkeitsfunktionen $\mu_{\tilde{a}_1^j}(x), \ldots, \mu_{\tilde{a}_n^j}(x)$ beziehungsweise $\mu_{\tilde{b}^j}(x)$ definiert. Wir werden im folgenden die theoretische Beschreibung des Fuzzy-Controllers an einem Beispiel illustrieren.

Beispiel 6.2 Gegeben sei eine Fuzzy-Steuerung mit zwei Meßgrößen F und S und einer Stellgröße Δ. Dabei beschreibt F den „*Fehler*“, S die „*Schwankung*“ und Δ die „*Änderung*“ der Stellgröße. Wir nehmen weiter an, daß zu den linguistischen Variablen *Fehler* und *Schwankung* die linguistischen Terme *klein, mittel* und *groß* gehören (vgl. Abbildungen 24 und 25). Ebenso haben wir für die linguistische Variable *Änderung*

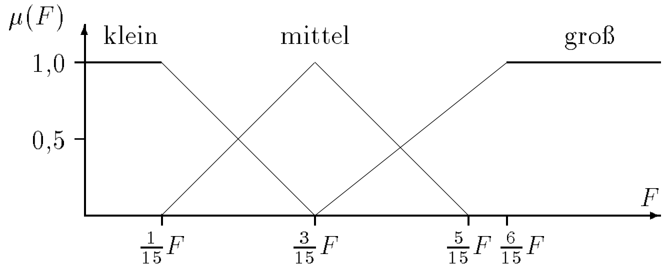

Abbildung 24: Linguistische Terme der Variablen *Fehler*.

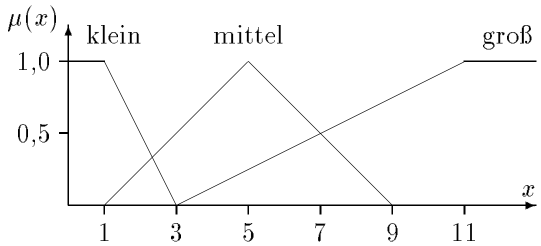

Abbildung 25: Unterteilung der linguistischen Variablen *Schwankung*.

linguistische Terme zu definieren. Diese definieren wir mittels *negativ klein, ungefähr Null* und *positiv klein* (vgl. Abbildung 26). Die Regelbasis besteht aus Regeln der Form

$$\texttt{IF } F \in \textit{Fehler} \texttt{ AND } S \in \textit{Schwankung} \texttt{ THEN } \Delta \in \textit{Änderung} \;\;,$$

wobei die linguisitischen Variablen für die zugehörigen linguistischen Terme stehen.

Um die Bedingungen $x_i \in \tilde{A}_i^j$ (vgl. Regel (17)) auszuwerten, werden die scharfen Eingaben zunächst in Fuzzy-Mengen abgebildet. Dies leistet gerade der Fuzzifizierer. Die kanonische Sichtweise einer crispen Menge aus dem Blickwinkel der Fuzzy-Set-Theorie führt uns zu dem folgenden Fuzzifizierungsverfahren.

Definition 6.3 *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge. Ein* Singleton-Fuzzifizierer *bildet ein Element $\mathbf{x} \in U$ auf eine Fuzzy-Menge $\tilde{a}_\mathbf{x}$ in U mittels $\mu_{\tilde{a}_\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = 1$ und $\mu_{\tilde{a}_\mathbf{x}}(\mathbf{x}') = 0$ für alle $\mathbf{x}' \in U$ mit $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}'$ ab.*

Die Auswertung der Bedingung $x_i \in \tilde{A}_i^j$ soll den *Akzeptanzgrad* beschreiben, mit dem x_i in der Fuzzy-Menge $\tilde{A}_i^j$ liegt. Dieser Grad wird gerade durch $\mu_{\tilde{A}_i^j}(x_i)$ angegeben. Zur Auswertung der Regelprämisse haben wir nun noch die einzelnen Bedingungen konjunktiv zu verknüpfen. Der sich daraus ergebene Akzeptanzgrad der Regelprämissen stellt gleichzeitig den Akzeptanzgrad der Konsequenz dar. Wir können daher die Regeln R_j als Fuzzy-Implikation $\tilde{a}_1^j \times \cdots \times \tilde{a}_n^j \to \tilde{b}^j$ einer Fuzzy-Menge in $U \times \mathbb{R}$ auffassen mit

$$\mu_{\tilde{a}_1^j \times \cdots \times \tilde{a}_n^j \to \tilde{b}^j}(x_1', \ldots, x_n', z) = \mu_{\tilde{a}_1^j}(x_1') \star \cdots \star \mu_{\tilde{a}_n^j}(x_n') \star \mu_{\tilde{b}^j}(z) \;, \qquad (18)$$

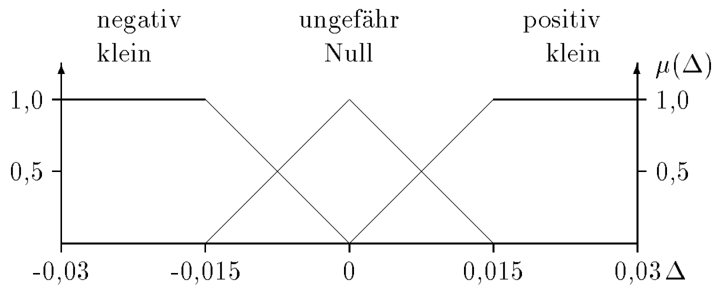

Abbildung 26: Aufteilung der Variablen *Änderung* in linguistische Terme.

wobei $\mathbf{x}' = (x'_1, \ldots, x'_n) \in U$ für eine kompakte Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige Eingabe des Fuzzy-Reglers und $z \in \mathbb{R}$ dessen Ausgabe darstellt. Der Operator $\star$ steht hier für eine beliebige t-Norm. Üblicherweise werden entweder der min-Operator oder die Produktbildung zwischen reellen Zahlen verwendet (vgl. [Lee,1990a, Lee,1990b]). In Gleichung (18) wird die Konjunktion über die Prämissen auch auf $\mu_{\tilde{B}^j}(z)$ ausgedehnt, da die Höhe von $\tilde{B}^j$ durch den Akzeptanzgrad der Regelprämissen beschränkt werden soll.

Eine Fuzzy-Regel R_j ist somit nicht mit einer bedingten Anweisung einer Programmiersprache zu vergleichen, da der `THEN`-Teil in jedem Fall ausgewertet wird.

Die Hauptaufgabe bei der Konstruktion eines Fuzzy-Controllers besteht in der Wahl der linguistischen Regeln und der die linguistischen Terme beschreibenden Zugehörigkeitsfunktionen. Der funktionale Zusammenhang zwischen Eingabe- und Ausgabedaten, der in den Regeln implizit enthalten ist, wird durch die Entscheidungslogik interpretiert und ausgewertet. Für den MAMDANI-Controller soll dies im folgenden beschrieben werden:

Seien nun $U \subset \mathbb{R}^n$ ein Kompaktum und $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in U$ die Eingabe des Fuzzy-Controllers. Dann wird $\mathbf{x}$ durch den Fuzzifizierer auf eine Fuzzy-Menge $\tilde{A}_{\mathbf{x}}$ abgebildet. Diese Fuzzy-Menge $\tilde{a}_{\mathbf{x}}$ wird dann mittels der Regel R_j der Regelbasis $(1 \leq j \leq r)$ auf eine Fuzzy-Menge $\tilde{a}_{\mathbf{x}} \circ R_j$ in $\mathbb{R}$ abgebildet

$$\begin{aligned} \mu_{\tilde{a}_{\mathbf{x}} \circ R_j}(z) &= \sup_{\mathbf{x}' \in U} \left(\mu_{\tilde{a}_{\mathbf{x}}}(x'_1 \ldots x'_n) \star \mu_{\tilde{a}^j_1 \times \cdots \times \tilde{a}^j_n \to \tilde{b}^j}(x'_1, \ldots, x'_n, z) \right) \\ &= \sup_{\mathbf{x}' \in U} \left(\mu_{\tilde{a}_{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}') \star \mu_{\tilde{a}^j_1}(x'_1) \star \cdots \star \mu_{\tilde{a}^j_n}(x'_n) \star \mu_{\tilde{b}^j}(z) \right) \ . \end{aligned}$$

Bemerkung 6.4

Bei der Singleton-Fuzzifizierung (vgl. Definition 6.3) ist $\mu_{\tilde{a}_{\mathbf{x}} \circ R_j}(z)$ sehr einfach zu berechnen, da für $\mathbf{x}' \neq \mathbf{x}$ gilt $\mu_{\tilde{a}_{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}') = 0$. In diesem Fall erhält man:

$$\mu_{\tilde{a}_{\mathbf{x}} \circ R_j}(z) = \sup_{\mathbf{x}' \in U} \left(\mu_{\tilde{a}_{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}') \star \mu_{\tilde{a}^j_1}(x'_1) \star \cdots \star \mu_{\tilde{a}^j_n}(x'_n) \star \mu_{\tilde{b}^j}(z) \right)$$

$$= \quad \mu_{\tilde{a}_1^j}(x_1) \star \cdots \star \mu_{\tilde{a}_n^j}(x_n) \star \mu_{\tilde{b}^j}(z) \ . \tag{19}$$

Dies beschleunigt die rechnergestützte Auswertung und schränkt die Vorteile eines solchen Fuzzy-Controllers nicht ein, da sich durch diese Controller ebenfalls alle stetigen Funktionen approximieren lassen, wie wir in einem späteren Abschnitt sehen werden.

Wir betrachten nun die Auswertung der Regeln aus Beispiel 6.2:

Beispiel 6.2 (Fortsetzung) Gegeben sei eine Regel der Regelbasis

R_1: `IF` $F \in$ *klein* `AND` $S \in$ *groß* `THEN` $\Delta \in$ *negativ klein* .

Als Eingaben setzen wir außerdem $F = 1/10\overline{F}$ und $S = 7$ voraus. Zusätzlich wählen wir die Singleton-Fuzzifizierung und als t-Norm den min-Operator, so erhalten wir als Regelausgabe für Regel R_1:

$$\mu_{\tilde{A}_{(1/10,7)} \circ R_1}(z) = \min\left(\mu_{klein}(1/10), \mu_{groß}(7), \mu_{neg.klein}(z)\right) \ .$$

In Abbildung 27 ist die zugehörige Fuzzy-Menge dargestellt.

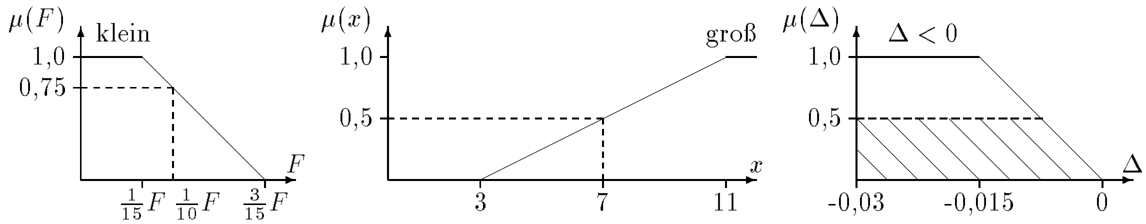

Abbildung 27: Auswertung einer Fuzzy-Implikation.

Die Entscheidungslogik wertet alle Regeln R_j für $(1 \le j \le r)$ aus. Die Konsequenzen $\tilde{a}_{\mathbf{x}} \circ R_j$ werden nun mittels einer t-Conorm $\diamond$ verknüpft. Die so gebildete Fuzzy-Menge stellt die Ausgabe der Entscheidungslogik dar

$$\tilde{B}^{\text{output}} = \tilde{a}_{\mathbf{x}} \circ R_1 \diamond \tilde{a}_{\mathbf{x}} \circ R_2 \diamond \ldots \diamond \tilde{a}_{\mathbf{x}} \circ R_r \ .$$

Häufig verwendet man als t-Conorm den max-Operator (vgl. [Lee,1990a, Lee,1990b]). Der Defuzzifizierer hat nun die Aufgabe die Fuzzy-Menge $\tilde{B}^{\text{output}}$ in einen crispen Wert umzuwandeln. Scharfe Zahlen lassen sich kanonisch in Fuzzy-Zahlen einbetten, wollen wird aber umgekehrt eine Fuzzy-Zahl in eine scharfe Zahl überführen, sie also defuzzifizieren, so treten einige Problem auf.

Im folgenden stellen wir deshalb drei unterschiedliche Defuzzifizierungsmethoden vor.

Das einfachste Defuzzifizierungsverfahren stellt das *Maximum Kriterium* (MAX) dar. Dabei wird ein beliebiger Punkt des Trägers von $\tilde{b}^{\text{output}}$ gewählt, für den $\mu_{\tilde{b}^{\text{output}}}(x)$ einen maximalen Zugehörigkeitsgrad annimmt. Problematisch wirkt sich hierbei allerdings aus, daß die Menge der x, für die $\mu_{\tilde{b}^{\text{output}}}$ maximal ist, nicht einelementig zu sein braucht. Wählt man allerdings einen Punkt aus dieser Menge zufällig aus, so führt dies zu Nichtdeterminismus des Reglers. Um dies zu vermeiden, kann man beispielsweise die kleinste Zahl wählen, für die $\mu_{\tilde{b}^{\text{output}}}$ maximal ist.

Eine aufwendigere Methode ist die *Schwerpunktdefuzzifizierung* (center of area - COA). Sie setzt voraus, daß der Träger von $\tilde{b}^{\text{output}}$ ein Intervall ist und daß die Menge $\max(\mu_{\tilde{b}^{\text{output}}}) := \{x \in \tilde{b}^{\text{output}} | \forall x' \in \tilde{b}^{\text{output}}, \mu_{\tilde{b}^{\text{output}}}(x') \leq \mu_{\tilde{b}^{\text{output}}}(x)\}$ nicht leer und Borel-meßbar ist. Als Stellwert ν wird der Wert verwendet, der unter dem Schwerpunkt der durch die Funktion $\mu_{\tilde{b}^{\text{output}}}$ erzeugten Fläche liegt. Formal bedeutet das

$$\nu = \frac{1}{\int\limits_{x \in Tr(\tilde{b}^{\text{output}})} \mu_{\tilde{b}^{\text{output}}}(x)dx} * \int\limits_{x \in Tr(\tilde{b}^{\text{output}})} x * \mu_{\tilde{b}^{\text{output}}}(x)dx \ .$$

Die Schwerpunktmethode hat den Vorteil, fast immer ein relativ glattes Regelverhalten zu erzeugen. Die Nachteile der Schwerpunktmethode bestehen darin, daß dieses Verfahren formal aus der Sicht der Fuzzy-Set-Theorie kaum zu rechtfertigen und sehr aufwendig zu berechnen ist (vgl. [Kruse et al.,1993]).

Die letzte hier zu nennende Defuzzifizierungsstrategie stellt die *Mean-of-Maximum Methode* (MOM) dar. Diese Methode beruht auf denselben Voraussetzungen wie die Schwerpunktdefuzzifizierung. Sie berechnet den Mittelwert der Maxima von $\mu_{\tilde{b}^{\text{output}}}$. Allerdings kann die Wahl von symmetrischen triangulären Zugehörigkeitsfunktionen zur Darstellung der Regelprämissen diese Defuzzifizierungsstrategie zu einem unstetigen Verlauf der Stellgrößen führen ([Kruse et al.,1993]).

In der nachfolgenden Abbildung werden die drei Defuzzifizierungsstrategien an einem Beispiel dargestellt.

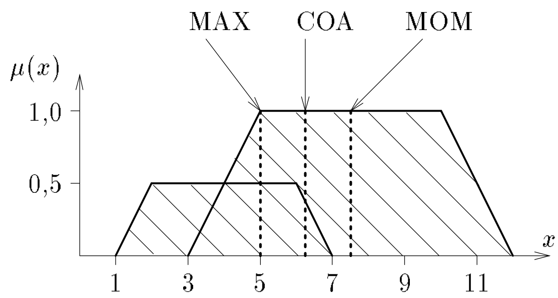

Abbildung 28: Drei unterschiedliche Defuzzifizierungsmethoden nach [Kruse et al.,1993].

Bei Simulationen lieferte COA die besten und MAX die schlechtesten Ergebnisse. Die Stärken von MOM liegen im dynamischen, die von COA im statischen Regelverhalten (vgl. [Lee,1990b]).

Sugeno/Takagi-Controller

Der Sugeno/Takagi-Controller stellt eine Modifikation des Mamdani-Controllers dar (vgl. [Sugeno et al.,1985, Sugeno,1985]). Die Regeln werden so verändert, daß im Anweisungsteil ein crisper Wert berechnet wird und so eine Defuzzifizierung nicht mehr notwendig ist. Hierdurch reduziert sich der Rechenaufwand bei der Steuerung. Die Fuzzy-Regeln werden in der Form

R_j: `IF` $x_1 \in \tilde{a}_1^j$ `AND` ... `AND` $x_n \in \tilde{a}_n^j$ `THEN` $z_j = c_{0,j} + c_{1,j} * x_1 + \ldots + c_{n,j} * x_n$

angegeben. Jede Regel liefert dann als Ergebnis des Bedingungsteils gerade den Erfüllungsgrad $\alpha_j := \min(\mu_{\tilde{a}_1^j}(x_1), \ldots, \mu_{\tilde{a}_n^j}(x_n))$. Die Auswertung aller Regeln R_j $(1 \leq j \leq r)$ läuft nun ähnlich wie beim Mamdani-Controller ab. Das Gesamtergebnis ergibt sich aus

$$z = \frac{\sum_{j=1}^{r} \alpha'_j * z_j}{\sum_{j=1}^{r} \alpha'_j} \; .$$

Dabei entstehen die Parameter α'_j aus α_j durch Summation

$$\alpha'_j = \sum_{i=1}^{r} \alpha_j \; .$$

Hierzu muß allerdings erwähnt werden, daß der Experte die Aufgabe hat, das gewünschte Regelverhalten des Anweisungsteils in expliziter mathematischer Form anzugeben. Dadurch umgeht er zwar einerseits die Defuzzifizierung und damit die problematische Wahl einer Defuzzifizierungsmethode, andererseits muß er für jede Regel den funktionalen Zusammenhang explizit angeben. Dadurch geht die Möglichkeit, rein linguistische Regeln zu verwenden, verloren.

6.2 Universalität von Fuzzy-Systemen

Einer der Gründe, warum Fuzzy-Contoller so populär geworden sind, liegt in der einfachen Entwicklung dieser Regler. Die Art der Regeln, die in solchen Controllern verwendet werden, liegen dem menschlichen Sprachgebrauch sehr nahe, was die Transparenz der Steuerung erhöht.

Sowohl für den Fuzzy-Controller von E. Mamdani als auch für den von M. Sugeno und T. Takagi gilt, daß sich alle stetigen Funktionen beliebig genau durch diese Fuzzy-Systeme approximieren lassen. Desweiteren läßt sich zeigen, daß diese Eigenschaft auch Fuzzy-Controller besitzen, die Fuzzy-Eingaben zu Fuzzy-Ausgaben verarbeiten, in denen also weder eine Fuzzifizierung noch eine Defuzzifizierung stattfindet. Die Universalitäts-Eigenschaft von unterschiedlichen Fuzzy-Controllern betrachten wir im vorliegenden Abschnitt. Insgesamt stellen Fuzzy-Systeme somit ein sehr mächtiges Modell dar, mit dem sich funktionale Zusammenhänge in Form von linguistischen Regeln beschreiben lassen.

Universalität des MAMDANI-Controllers

J. MENDEL und L.-X. WANG zeigen in [Mendel et al.,1992, Wang,1992], daß der MAMDANI-Controller unter gewissen Voraussetzungen alle stetigen Funktionen beliebig genau approximieren kann. In diesem Abschnitt stellen wir ihr Universalitäts-Theorem vor.

Zur Fuzzifizierung der Eingaben verwenden sie die Singleton-Fuzzifizierung (vgl. Definition 6.3). Die Zugehörigkeitsfunktionen der linguistischen Terme beschreiben sie mittels GAUSSscher Basisfunktionen. Nach Bemerkung 6.4 führt die Verwendung der Singleton-Fuzzifizierung zu einer besonders einfachen Berechnung der Implikationen. Zur Berechnung des Akzeptanzgrades der Regeln entsprechend der Gleichung (18) verwenden J. MENDEL und L.-X. WANG schließlich die Multiplikation auf $\mathbb{R}$. Sie bezeichnen diese Form der Auswertung als *product-inference*. Aus den Implikationen berechnen sie mittels der Schwerpunktdefuzzifizierung den crispen Wert z durch Auswertung der Gleichung

$$z = \frac{\sum_{j=1}^{r} \overline{z}^j \mu_{\tilde{a}_x \circ R_j}(\overline{z}^j)}{\sum_{j=1}^{r} \mu_{\tilde{a}_x \circ R_j}(\overline{z}^j)} .$$

Hierbei nimmt $\mu_{\tilde{a}^j}(z)$ sein Maximum im Punkt $\overline{z}^j \in \mathbb{R}$ an. Der Parameter r steht für die Anzahl der linguistischen Regeln der Entscheidungslogik.

Insgesamt lassen sich durch diesen so definierten MAMDANI-Controller folgende Funktionen darstellen.

Definition 6.5 *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge. Die Menge der mit Fuzzy-Systemen mit Singleton-Fuzzifizierer, product-inference, Schwerpunktdefuzzifikation und* GAUSS*schen Zugehörigkeitsfunktionen darstellbaren Funktionen besteht aus allen Funktionen der Form*

$$g(x) = \frac{\sum_{j=1}^{r} \overline{z}^j \left(\prod_{i=1}^{n} \mu_{\tilde{a}_i^j}(x_i) \right)}{\sum_{j=1}^{r} \left(\prod_{i=1}^{n} \mu_{\tilde{a}_i^j}(x_i) \right)}, \tag{20}$$

wobei $g : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x = (x_1, \ldots, x_n) \in U$ und $\mu_{\tilde{a}_i^j}(x_i)$ die GAUSS*sche Zugehörigkeitsfunktion mit*

$$\mu_{\tilde{a}_i^j}(x_i) = a_i^j \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x_i - \overline{x}_i^j}{\sigma_i^j} \right)^2 \right]$$

ist, für die $a_i^j, \overline{x}_i^j$ und σ_i^j reellwertige Parameter mit $0 \leq a_i^j \leq 1$ sind.

Man setzt hier $\mu_{\tilde{a}^j}(\overline{z}^j) = 1$ voraus. Zur Vereinfachung von Gleichung (20) geben wir nun die folgende Definition an.

Definition 6.6 *Die Funktionen*

$$p_j := \frac{\prod_{i=1}^{n} \mu_{\tilde{a}_i^j}(x_i)}{\sum_{j=1}^{r} \prod_{i=1}^{n} \mu_{\tilde{a}_i^j}(x_i)},$$

wobei $\mu_{\tilde{a}_i^j}(x_i)$ *die* GAUSS*schen Zugehörigkeitsfunktionen sind, werden als* Fuzzy-Basis-Funktionen *bezeichnet.*

Bemerkung 6.7 Die in Definition 6.5 beschriebenen Funktionen lassen sich auch darstellen als Linearkominationen von Fuzzy-Basis-Funktionen Dann gilt

$$g(x) = \sum_{j=1}^{r} \overline{z}^j p_j(x) \ .$$

Satz 6.8 *Es seien* $U \subset \mathbb{R}^n$ *kompakt und* Y *die Menge aller Linearkombinationen aus Fuzzy-Basis-Funktionen. Versehen mit* $d_\infty(g_1, g_2) = \sup_{x \in U}(|g_1(x) - g_2(x)|)$ *wird* Y *zu einem metrischen Raum, der dicht in* $\mathcal{C}(U)$ *liegt. Es gilt also*

$$\forall f \in \mathcal{C}(U),\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\ g \in Y\ , \quad \textit{so daß} \quad \sup_{x \in U}\Big(\big|f(x) - g(x)\big|\Big) < \varepsilon.$$

Beweis: Mit Hilfe des Satzes von STONE-WEIERSTRASS zeigen J. MENDEL und L.-X. WANG, daß

i) (Y, d_∞) eine Algebra ist,

ii) Y die Punkte von U trennt, d.h. $\forall\ x, y \in U \quad \exists\ g \in Y : g(x) \neq g(y)$,

iii) Y auf keinem Punkt von U verschwindet, d.h.
$\forall\ x \in U\ \exists\ g \in Y : g(x) \neq 0$.

Daher liegt (Y, d_∞) dicht in $\mathcal{C}(U)$. □

B. KOSKO gibt in [Kosko,1992a] ebenfalls einen Universalitätsbeweis für Fuzzy-Systeme an. Er verwendet allerdings *Fuzzy-Assoziativspeicher* [engl.: **F**uzzy **A**ssociative **M**emories (FAMs)].

Universalität des SUGENO/TAKAGI-Controllers

Nicht nur mit dem MAMDANI-Controller sondern auch mit dem SUGENO/TAKAGI-Controller lassen sich alle stetigen Funktionen beliebig genau approximieren. Dieses Ergebnis stellt J. BUCKLEY in [Buckley,1993] vor. Dazu nimmt er allerdings zwei Modifikationen des Controllers vor. Zum einen betrachtet er Regeln R_i (für $1 \leq i \leq r$) der Form

$$R_i \ : \quad \texttt{IF}\ x_1 \in \tilde{a}_i\ \texttt{AND}\ x_2 \in \tilde{b}_i\ \texttt{THEN}\ z = p_i(n_i, m_i)\ ,$$

wobei mit x_1, x_2 die beiden Meßgrößen, und mit z die Stellgröße bezeichnet wird. Die Funktionen $p_i(n_i, m_i)$ sind keine lineare Funktion, wie in [Sugeno et al.,1985, Sugeno,1985] beschrieben, sondern Polynome der Form

$$p_i(n_i, m_i) = \sum_{k=0}^{n_i} \sum_{l=0}^{m_i} c_i(k,l) x_1^k x_2^l \ .$$

Dabei bezeichnen $c_i(k,l)$ reelle und n_i und m_i positive natürliche Zahlen für $1 \leq i \leq r$. Die Konsequenz für die i-te Regel berechnet der Autor dann mittels Verwendung einer t-Norm T aus

$$\lambda_i = T\Big(\tilde{a}_i(x_1), \tilde{b}_i(x_2)\Big) \ .$$

Insgesamt ist dann die Ausgabe des Controllers

$$c = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i p_i(n_i, m_i). \tag{21}$$

Dies stellt gleichzeitig die zweite Modifikation des SUGENO/TAKAGI-Controllers dar, denn im SUGENO/TAKAGI-Controller wird λ_i zunächst normiert, bevor die Gleichung (21) berechnet wird.

Die Universalitätseigenschaft beweist J. BUCKLEY nun ebenfalls mit Hilfe des Approximationssatzes von STONE-WEIERSTRASS.

Abschließend verweisen wir noch auf eine andere Arbeit von J. BUCKLEY und Y. HAYASHI (vgl. [Buckley et al.,1993b]) in der gezeigt wurde, daß auch Fuzzy-Input-Output-Controller universelle Approximatoren sind. Diese Fuzzy-Regler nutzen weder ein Fuzzifizierungs- noch ein Defuzzifizierungsmodul und bilden so Fuzzy-Mengen auf Fuzzy-Mengen ab. Diese Art von Controller werden in der Praxis nicht weiter betrachtet, sind aber von theoretischem Interesse.

Literatur

[Bellmann et al.,1973] R. E. Bellmann, M. Giertz: *On the analytic formalism of the theory of fuzzy sets.* Information Sciences 5, pp. 149-157, 1973.

[Black,1937] M. Black: *Vagueness: An exercise in logical analysis.* Philosophie of Science 4, pp. 427-455, 1937.

[Böhme,1993] G. Böhme: *Fuzzy-Logik: Eine Einführung in algebraische und logische Grundlagen.* Springer-Verlag 1993.

[Buckley et al.,1993a] J. J. Buckley, Y. Hayashi, E. Czogala: *On the equivalence of neural nets and fuzzy expert systems.* Fuzzy Sets and Systems 53, pp. 129-134, 1993.

[Buckley,1993] J. J. Buckley: *Sugeno-type Controllers are universal approximators.* Fuzzy Sets and Systems 53, pp. 299-303, 1993.

[Buckley et al.,1993b] J. J. Buckley, Y. Hayashi: *Fuzzy input-output controllers are universal approximators.* Fuzzy Sets and Systems 58, pp. 273-278, 1993.

[Dubois et al.,1978] D. Dubois, H. Prade: *Operations on fuzzy numbers.* Int. J. Systems Sciences 9, pp. 613-626, 1978.

[Dubois et al.,1980] D. Dubois, H. Prade: *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications.* Academic Press, New York, 1980.

[Dubois et al.,1985] D. Dubois, H. Prade: *A review of fuzzy set aggregation connectives.* Information Sciences 36, pp. 36-121, 1985.

[Dujmovic,1974] A. Dujmovic: *Weighted conjunctive and disjunctive means and their application in system evaluation.* Publikacije Elektrotehnickog Faculteta Beograd, Serija Matematika i Fizika 483, pp. 147-158, 1974.

[Dyckhoff et al.,1984] *H. Dyckhoff, W. Pedrycz: Generalized means as a model of compensation connectives.* Fuzzy Sets and Systems 14, pp. 143-154, 1984.

[Feuring 1996] Th. Feuring: *Fuzzy neural networks are overlapping.* to appear: Proc. of Int. IEEE Conf. on Fuzzy Systems, New Orleans, 1996.

[Klir et al.,1988] G. J. Klir, T. A. Folger: *Fuzzy sets, uncertainty, and information.* Prentice-Hall International, Englewood Cliffs, NJ, 1988.

[Kosko,1987] B. Kosko: *Foundations of fuzzy estimation theory.* Ph.D. Dissertation, University of California at Irvine, June 1987.

[Kosko,1992a] B. KOSKO: *Fuzzy systems as universal approximators.* Proc. 1st IEEE Int. Conf. on Fuzzy Systems, San Diego CA, pp. 1153-1162, 1992.

[Kruse et al.,1993] R. KRUSE, J. GEBHARDT, F. KLAWONN: *Fuzzy Systeme.* Teubner-Verlag, 1993.

[Lee,1990a] C. C. LEE: *Fuzzy logic in control systems: Fuzzy logic controller.* Part I, IEEE Trans. on Systems Man & Cybernetics 20, pp. 404-418, 1990.

[Lee,1990b] C. C. LEE: *Fuzzy logic in control systems: Fuzzy logic controller.* Part II, IEEE Trans. on Systems Man & Cybernetics 20, pp. 419-435, 1990.

[Lukasiewicz,1957] J. LUKASIEWICZ: ARISTOTELE*'s syllogistic: From the standpoint of modern formal logic.* Clarendon Press Oxford, 2. Ed., 1957.

[Mamdani et al.,1975] E. H. MAMDANI, S. ASSILIAN: *An experiment in linguistic synthesis with a fuzzy logic controller.* Int. Journal of Man-Maschines Studies, 7, pp. 1-13, 1975.

[Mendel et al.,1992] J. M. MENDEL, L.-X. WANG: *Fuzzy basis functions, universal approximation and orthogonal least-squares learnig.* IEEE Trans. on Neural Networks 3, pp. 807-814, 1992.

[Russel,1923] B. RUSSEL: *Vagueness.* The Australasian Journal of Psychology and Philosophy 1, pp. 84-92, 1923.

[Wicht,1993] W. WICHT: *Fuzzy Set-Theorie: Eine neue Wahrscheinlichkeitstheorie?* Unveröffentlichtes Manuskript, Lüneburg 1993.

[Sugeno et al.,1985] M. SUGENO, T. TAKAGI: *Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control.* IEEE Trans. on Systems Man & Cybernetics 15, pp.116-132, 1985.

[Sugeno,1985] M. SUGENO: *An introductory survey of fuzzy control.* Inform. Science 36, pp. 59-83, 1985.

[Wang,1992] L.-X. WANG: *Fuzzy Systems are universal approximators.* Proc. 1st IEEE Int. Conf. on Fuzzy Systems, San Diego CA, pp. 1163-1170, 1992.

[Yager,1980] R. R. YAGER: *On a general class of fuzzy connectives.* Fuzzy Sets and Systems 4, pp.235-242, 1980.

[Zadeh,1965] L. ZADEH: *Fuzzy sets.* Information and Control 8, pp. 338-353, 1965.

[Zadeh,1972] L. ZADEH: *A rationale for fuzzy control.* J. Dynamic Systems, Measurement and Control 94 (6), pp. 3-4, 1972.

[Zadeh,1973] L. ZADEH: *Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes.* IEEE Trans. on Systems, Man & Cybernetics 3, pp. 28-44, 1973.

[Zadeh,1975a] L. ZADEH: *The concept of linguistic variable and its application to approximate reasoning.* Parts 1, 2 and 3, Information Sciences 8, pp.199-249, 8, pp. 301-357, 9, pp. 43-80, 1975.

[Zadeh,1975b] L. ZADEH: *Calculus of fuzzy restriction.* In: L. ZADEH, K.-S. FU, K. TANAKA, M. SHIMURA (Eds.): *Fuzzy sets and their applications to cognitive and decision processes.* Academic Press, New York, pp. 1-40, 1975.

[Zimmermann et al.,1980] H.-J. ZIMMERMANN, P. ZYSNO: *Latent connectives in human decision making.* Fuzzy Sets and Systems 4, pp. 37-51, 1980.

[Zimmermann et al.,1983] H.-J. ZIMMERMANN, P. ZYSNO: *Decision and evaluation by hierachical aggregation of information.* Fuzzy Sets and Systems 10, pp. 243-260, 1983.

[Zimmermann,1991] H.-J. ZIMMERMANN: *Fuzzy Set Theory and its Applications.* Kluver Academic Publishers, 2nd Edition, 1991.