Analysis I SS 2001

– Zusammenfassung –

Stephan Weller, Juli 2002

Inhalt

1. Vollständige Induktion und Ungleichungen
2. Folgen und Reihen
3. Konvergenz und Stetigkeit
4. Differentiation, lokale Extrema, Konvexität
5. Integration, Substitutionsregel und partielle Integration
6. Funktionenfolgen, Potenzreihen, Taylorreihen

Dieser Text soll dazu dienen, kurz die wichtigsten Punkte der Vorlesung Analysis I im SS 2001 bei Prof. Spindler zusammenzufassen. Natürlich kann er das vollständige Skript nicht ersetzen. Insbesondere wurden intuitiv klare Definitionen und Sätze vernachlässigt. Die Sätze sind daher streng mathematisch gesehen unsinnig und falsch, aber trotzdem praktisch. Der Autor übernimmt keinerlei Verantwortung für irgendetwas. Bei entdeckten Fehlern wäre ich über eine kurze Mail an stweller@uos.de dankbar.

---

1. Vollständige Induktion und Ungleichungen

1.1 Vollständige Induktion

Eine Aussage A gilt unter folgener Voraussetzung für jede ganze Zahl n grösser−gleich n_0 $[n \in \mathbb{Z}, n \geq n_0]$ als bewiesen:

1. (Induktionsvoraussetzung) Die Aussage gilt für n_0 $[A(n_0)]$.
2. (Induktionsschritt) Gilt die Aussage für ein m $(m \geq n_0)$,
   so gilt sie auch für $m+1$. $[A(m) \rightarrow A(m+1)]$.

1.2 Geometrische Summenformel

$$\forall n \in \mathbb{N}: \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \text{ mit } x \neq 1$$

1.3 Binomialkoeffizient

Der Binomialkoeffizient beschreibt die Anzahl der k−elementigen Teilmengen einer n−elementigen Menge.

Für $k \in \mathbb{N}$ und eine beliebige Zahl n setzt man $\binom{n}{k} := \prod_{j=1}^{k} \frac{n-j+1}{j}$.

Damit gilt auch (trivialerweise ;−): $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$

Und weiter: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.

1.4 Dreiecksungleichung

Für alle Zahlen x und y $(x, y \in \mathbb{C})$ gilt:

$|x+y| \leq |x| + |y|$

1.5 Bernoullische Ungleichung

Für alle Zahlen $x \in \mathbb{R}$, $x \geq -1$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$(1+x)^n \geq 1+nx$

2. *Folgen und Reihen*

2.1 Konvergenz einer Zahlenfolge

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen konvergiert gegen eine reelle Zahl a , wenn gilt:
Zu jeder reellen Zahl $\epsilon>0$ gibt es ein $n_0\in\mathbb{N}$, so dass für alle $n\in\mathbb{N}$, $n\geq n_0$ gilt:

$$|a-a_n|<\epsilon$$

Konvergiert die Folge gegen eine reelle Zahl, heißt sie *konvergent* und man schreibt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n=a$$

Jede konvergente Folge besitzt genau einen Grenzwert.
Eine Folge, die nicht konvergent ist, heißt *divergent*.

2.2 Rechenregeln für die Grenzwerte von Folgen

Für konvergente (!) Folgen (a_n) und (b_n) mit $\lim_{n\to\infty}(a_n)=a$ und $\lim_{n\to\infty}(b_n)=b$ und reelle Zahlen λ gilt:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty} a_n+\lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n)=a\,b$$

$$\lim_{n\to\infty}(\lambda\,a_n)=\lambda\,a$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{a}{b}$$, falls $b_n\neq 0$ für alle $n\in\mathbb{N}$ und $b\neq 0$

2.3 Unendliche Reihen

$\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ bezeichnet die Folge der Partialsummen $(\sum_{k=n_0}^{n} a_k)_{n\geq n_0}$

Konvergiert die Folge der Partialsummen gegen a , so schreibt man: $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k=a$

Sind $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergent, so gilt (mit $\lambda\in\mathbb{R}$):

$$\sum_{k=0}^{\infty}(a_k+\lambda\,b_k)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k+\lambda\sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

2.4 Geometrische Reihe

Für $x\in\mathbb{C}$ mit $|x|<1$ gilt: $\sum_{k=0}^{\infty} x^k=\frac{1}{1-x}$

2.5 Leibniz−Kriterium für alternierende Reihen

Wenn (a_n) eine monoton fallende Folge reeller Zahlen ist, die gegen Null konvergiert, dann gilt: $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$ ist konvergent.

2.6 Majorantenkriterium / Absolute Konvergenz

Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ komplexer Zahlen heißt absolut konvergent,

wenn die Reihe der Absolutbeträge $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|$ konvergiert.

Ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine konvergente Reihe und c_k eine Reihe mit $|c_k| \leq a_k$ für alle k,

so ist $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ absolut konvergent und $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt *Majorante* von $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$.

2.7 Quotientenkriterium

Wenn $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ eine Reihe ist mit $c_n \neq 0$ und es gibt ein $\theta \in \mathbb{R}$ mit $0 < \theta < 1$ und ein $n_0 \geq 1$,

so dass $\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| \leq \theta$ für alle $n \geq n_0$, dann ist $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ absolut konvergent.

3. Konvergenz und Stetigkeit

3.1 Exponentialreihe

$\exp(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ ist für alle $z\in\mathbb{C}$ absolut konvergent.

$\exp(z)$ heißt die *komplexe Exponentialfunktion*.

Es gilt: $\exp(z)=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{z}{n})^n$

3.2 Stetigkeit

Eine Funktion heißt *stetig auf X*, wenn sie in jedem Punkt $a\in X$ stetig ist.

Eine Funktion heißt *stetig in a,* wenn gilt:

Zu jedem $\epsilon>0$ gibt es ein $\delta>0$, so dass für alle $x\in X$ mit $|x-a|<\delta$ gilt: $|x-a|<\epsilon$

Alle rationalen Funktionen sind auf ihrem Definitionsbereich stetig.

3.3 Sätze über stetige Funktionen

Die Summe zweier stetiger Funktionen ist stetig.

Das Produkt zweier stetiger Funktionen ist stetig.

Die Komposition zweier stetiger Funktionen ist wieder stetig.

Die Umkehrfunktion einer stetigen Funktion ist stetig (sofern sie existiert).

Stetige Funktionen nehmen auf kompakten Intervallen ihr Maximum und Minimum an.

3.4 Gleichmäßige Stetigkeit

Eine Funktion heißt gleichmäßig stetig auf X, wenn gilt:

Zu jedem $\epsilon>0$ gibt es ein $\delta>0$, so dass gilt:

$|f(x)-f(x')|<\epsilon$ für alle $x,x'\in X$ mit $|x-x'|<\delta$

Jede gleichmäßig stetige Funktion ist auch stetig, nicht aber umgekehrt.

Stetige Funktionen sind auf jedem kompakten Intervall gleichmäßig stetig.

3.5 Sinus und Cosinus

Es gilt (mit $x\in\mathbb{R}$): $e^{ix}=\cos x+i\sin x$

Also ist $\sin x=\mathrm{Im}(e^{ix})$ und $\cos x=\mathrm{Re}(e^{ix})$

4. Differentiation, lokale Extrema, Konvexität

4.1 Differenzierbarkeit

Eine Funktion f heißt differenzierbar in a, wenn der Grenzwert

$$f'(a) := \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existiert. Sie heißt differenzierbar auf X, wenn sie in jedem $a \in X$ differenzierbar ist.

Die Funktion $x \rightarrow f'(x)$ heißt dann die *Ableitung von f*

Alternative Charakterisierung der Differenzierbarkeit:

Eine Funktion ist in x_0 differenzierbar, wenn eine Funktion $\Delta : X \rightarrow \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften existiert:

$-\Delta$ ist stetig in x_0

$-\forall x \in X : f(x) = f(x_0) + \Delta(x) \cdot (x - x_0)$

Dann gilt: $f'(x_0) = \Delta(x_0)$

Es folgt die Darstellung: $f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \varphi(x) \cdot (x - x_0)$

mit $\varphi(x) = \Delta(x) - \Delta(x_0)$

4.2 Differentiationsregeln

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ seien reelle Funktion, beide in $x_0 \in X$ differenzierbar.

Dann gilt:

$-af + bg$ ist in x_0 differenzierbar in x_0 mit $(af + bg)'(x_0) = af'(x_0) + bg'(x_0)$

$-fg$ ist in x_0 differenzierbar in x_0 mit $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$

$-\frac{f}{g}$ ist differenzierbar in x_0 mit $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$

(falls $g(x) \neq 0$ für alle $x \in X$)

$-(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$

− Ist f umkehrbar, dann gilt: $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

4.3 Lokale Extrema

Ist f eine in x_0 differenzierbare Funktion, die in x_0 ein lokales Extremum hat, so ist $f'(x_0) = 0$ (Achtung: Die Umkehrung gilt nicht!)

Gilt $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$, so besitzt f in x_0 ein lokales Minimum.

Gilt $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$, so besitzt f in x_0 ein lokales Maximum.

Seien $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ und $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig und differenzierbar.

Dann gibt es ein $\xi \in (a, b)$, so dass: $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

f ist monoton wachsend auf X genau dann, wenn f' nicht−negativ auf X ist.

Ist f' auf ganz X positiv, so ist f streng monoton wachsend.

Ist f'' nicht−negativ (nicht−positiv) auf X, so ist f konvex (konkav).

5. Integration, Substitutionsregel und partielle Integration

5.1 Integration

Jede stetige Funktion ist integrierbar.

Das Integral ist linear, d.h. $\int \alpha f(x)+\beta g(x)\,dx=\alpha\int f(x)\,dx+\beta\int g(x)\,dx$

Es gilt: $\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx$

Seien f und φ stetig mit $\varphi\geq 0$. Dann gibt es ein ξ, so dass

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx=f(\xi)\int_a^b \varphi(x)\,dx$$

Für eine stetige Funktion f ist das Integral eine Stammfunktion.

Es gilt: $\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$

5.2 Substitutionsregel

Für stetiges f und stetig differenzierbares φ gilt:

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt=\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx$$

Kurzschreibweise: $\int_a^b f(\varphi(t))\,d\varphi(t)=\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx$

5.3 Partielle Integration

Für stetig differenzierbare Funktionen f und g gilt:

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx=f(x)g(x)\Big|_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

5.4 Uneigentliche Integrale

$f:[a,\infty]$ heißt *uneigentlich integrierbar* auf $[a,\infty)$,

wenn der Grenzwert $\lim_{R\to\infty}\int_a^R f(x)\,dx$ existiert.

$f:(a,b]$ heißt *uneigentlich integrierbar* auf $(a,b]$, wenn gilt:

Der Grenzwert $\lim_{\epsilon\to 0}\int_{a+\epsilon}^b f(x)\,dx$ existiert.

5.5 Integralvergleichskriterium

Es sei $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}_+$ monoton fallend, $a_n=f(n)$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ genau dann, wenn das uneigentliche Integral $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ konvergiert.

6. Funktionenfolgen, Potenzreihen, Taylorreihen

6.1 Konvergenz von Funktionenfolgen

Für eine Folge (f_n) von Funktionen $f_n: X \to \mathbb{R}$ und eine Funktion $f: X \to \mathbb{R}$ gilt:

$-(f_n)$ konvergiert *punktweise* gegen f,
wenn für alle $x \in X$ die Folge $f_n(x)$ gegen $f(x)$ konvergiert.

$-(f_n)$ konvergiert *gleichmäßig* gegen f, wenn gilt:
$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N, x \in X$ gilt: $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$

Konvergiert f_n gleichmäßig gegen f, so folgt aus der Stetigkeit von f_n die Stetigkeit von f.

Ist $f: X \to \mathbb{C}$ eine Funktion, so heißt $\|f\|_X := \sup \{|f(x)| \| x \in X\}$ die *Supremumsnorm* von f.
Eine Folge (f_n) konvergiert genau dann gleichmäßig gegen f, wenn gilt: $\lim_{n \to \infty} \|f - f_n\|_X = 0$

6.2 Weierstraßsches Konvergenzkriterium

Für $n \geq 0$ gelte für eine Funktion $f_n: X \to \mathbb{C}: \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_X < \infty$. Dann gilt:
Die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n|$ konvergieren gleichmäßig.

6.3 Integrale von Funktionenfolgen

Konvergiert (f_n) gleichmäßig f, so gilt $\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx$

6.4 Differenzierbarkeit bei Funktionenfolgen

Sei (f_n) eine Folge stetig differenzierbarer Funktionen, die punktweise gegen f konvergiert.
Weiter konvergiere die Folge (f_n') der Ableitungen gleichmäßig gegen eine Funktion g.
Dann gilt: f ist differenzierbar und g ist die Ableitung von f.

6.5 Taylorsche Formel

Für eine (n+1)−mal stetig differenzierbare Funktion $f: X \to \mathbb{R}$
(für ein offenes Intervall $X \subset \mathbb{R}$) gilt für $a, x \in X$:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1}(x)$$

mit $R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt$

R_{n+1} heißt das *Restglied* (n+1)−ter Ordnung und $f(a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$
heißt das n−te *Taylorpolynom* von f um den Entwicklungspunkt a.

6.5' Lagrange−Form des Restgliedes

(Zur Taylorformel) Es gibt ein $\xi \in (a,x)$, so dass:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{(n+1)}$$

6.6 Approximation durch Taylorpolynom

Ist f n−mal differenzierbar, $a \in X$, so gibt es eine in a stetige Funktion $\Delta : X \to \mathbb{R}$ mit $\Delta(a)=0$, so dass gilt:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\Delta(x)(x-a)^n$$

6.7 Taylorreihe

Die Potenzreihe $T_{f,a}(x)=\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ heißt die *Taylorreihe* von f mit Entwicklungspunkt a. Ihre Partialsummen sind die Taylorpolynome.

6.8 Abelscher Grenzwertsatz

Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergent, $c_n \in \mathbb{R}$.

Dann konvergiert $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ für alle $x \in [0,1]$ und ist stetig auf $[0,1]$.

6.9 Allgemeine binomische Formel (Anwendung der Taylorentwicklung)

Für beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}, |x|<1$ gilt:

$$(1+x)^{\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \text{ mit } \binom{\alpha}{n}=\frac{1}{n!}\prod_{k=1}^{n} (\alpha-k+1)$$

6.10 Wichtige Reihenentwicklungen (oft zur Bestimmung von Taylorpolynomen gebraucht)

$$\sin x=\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \text{(für alle } x \in \mathbb{R}\text{)}$$

$$\cos x=\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad \text{(für alle } x \in \mathbb{R}\text{)}$$

$$\exp(x)=\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \text{(für alle } x \in \mathbb{R}\text{)}$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{\infty} x^k \quad \text{(für alle } x \in \mathbb{R} \text{ mit } |x|<1\text{)}$$