Analysis II - Wiederholung

Stephan Weller

2. Februar 2003

1 Topologie, Stetigkeit

1.1 Definition

$\mathcal{T}$ heißt topologischer Raum $\iff$ X ist eine Menge, $\mathcal{T}$ ist eine Topologie auf X, d.h. $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ mit

(1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$

(2) $A, B \in \mathcal{T} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{T}$

(3) $A_i \in \mathcal{T}, i \in I \Rightarrow \bigcup\limits_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$

Die Elemente von $\mathcal{T}$ heißen dann offen.
$A \subset X$ heißt genau dann abgeschlossen, wenn $X \backslash A$ offen ist.
X heißt hausdorff'sch genau dann, wenn gilt:

$$\forall x, y \in X, x \neq y : \exists U, V \subset \mathcal{T} : x \in U, y \in V, U \cap V = \emptyset$$

1.2 Definition

(X, d) heißt metrischer Raum genau dann, wenn gilt:
X ist eine Menge und $d : X \times X \to \mathbb{R}$ ist eine Metrik, d.h.

(1) $d(x, y) \geq 0, d(x, y) = 0 \iff x = y$

(2) $d(x, y) = d(y, x)$

(3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Für $\epsilon > 0$ sei $U_\epsilon(a) := \{x \in X / d(x, a) < \epsilon\}$
Dann heißt $U \subset X$ offen $(U \in \mathcal{T}_d) \iff \forall a \in U \exists \epsilon > 0 : U_\epsilon(a) \subset U$.
$\mathcal{T}_d$ heißt dann die auf X durch d induzierte Topologie.

1.3 Definition

$(X, \|\|)$ heißt normierter (Vektor-)raum genau dann, wenn X ein (Vektor-)raum über $\mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{C}$) ist und $\|\| : X \to \mathbb{R}$ eine Norm, d.h.

(1) $\|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \iff x = 0$

(2) $\|ax\| = |a| \cdot \|x\|$ für $a \in \mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{C}$)

(3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

$\|\|$ definiert eine Metrik $d(x,y) := \|x-y\|$ (nur auf Vektorräumen). Die dadurch induzierte Topologie heißt *Normtopologie*.
Ein normierter Raum induziert also einen metrischen Raum und dieser einen hausdorff'schen topologischen Raum.

Umgebungen

Norm $U_\epsilon(a) = \{x \in X / \|x-a\| < \epsilon\}$

Metrik $U_\epsilon(a) = \{x \in X / d(x,a) < \epsilon\}$

Topologie Ist $a \in X, U \subset X$, dann ist U eine Umgebung von x, genau dann, wenn gilt: $\exists$offene Menge $V \subset X : a \in V, U \subset V$.

1.4 Beispiel: $\mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Metrik

$\|x\| := \sqrt{\sum x_i^2}$ (euklidische Norm)
$d(x,y) = \|x-y\|$ (euklidische Metrik)
Die von der euklidischen Norm auf $\mathbb{R}^n$ induzierte Topologie nennt man *gewöhnliche Topologie*.

1.5 Beispiel: sphärische Geometrie

ach nee, lassen wir das...

1.6 Definition

Sei $(X,d), M \subset X, a \in X$, dann gilt:

(1) a ist ein Randpunkt von M in X
$\iff \forall$ Umgebungen U von $a : U \cap M \neq \emptyset, U \cap \{X \backslash M\} \neq \emptyset$

(2) a ist ein Berührungspunkt von M in X
$\iff \forall$ Umgebungen U von $a : U \cap M \neq \emptyset$

(3) a ist ein innerer Punkt von M in X
$\iff a \in M, \exists$ Umgebung U von $a : U \subset M$

Es wird definiert:

$$\partial M = \{a \in X / a \text{ ist Randpunkt}\}$$
$$\bar{M} = \{a \in X / a \text{ ist Berührpunkt}\}$$
$$\mathring{M} = \{a \in X / a \text{ ist innerer Punkt}\}$$

Regeln:

(1) $\partial M = \bar{M} \cap \overline{X \backslash M}$
(2) $\bar{M} = M \cup \partial M$
(3) $\mathring{M} = M \backslash \partial M$

Rechenbeispiel:

$M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y \leq 0\}$
Behauptung: $(0,0) \in \partial M$
Beweis:
Zu zeigen ist: $\forall \epsilon > 0 : U_\epsilon(0,0) \cap M \neq \emptyset, U_\epsilon(0,0) \cap \mathbb{R}^2 \backslash M \neq \emptyset$.
Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Es gilt:
$(0,0) \in U_\epsilon(0,0) \cap M$
$(0, \frac{\epsilon}{2}) \in U_\epsilon(0,0) \cap (\mathbb{R}^2 \backslash M)_\square$

1.6.1 Weitere Regeln:

(4) $\mathring{M}$ ist offen.

(5) $\bar{M}$ ist abgeschlossen, $X \backslash \bar{M} = X \mathring{\backslash} M$

(6) M offen $\iff \mathring{M} = M$

(7) M abgeschlossen $\iff \bar{M} = M$

(8) $\bar{M} = \{a \in X / \exists$ konvergente Folge$(a_n), a_n \in M$ mit $a = \lim\limits_{n \to \infty} a_n\}$

Für die letzte Regel braucht man den Begriff der Konvergenz:

1.7 Definition

Sei (X,d) ein metrischer Raum, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in X, $a \in X$. Dann definiert man:
$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen $a :\iff \forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : d(a, a_n) < \epsilon$

1.8 Definition

Sei (X,d) ein metrischer Raum.
$(a_n) \in X$ *Cauchy-Folge* $:\iff \forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \geq N : d(a_n, a_m) < \epsilon$
(X,d) heißt vollständig $\iff$ Jede Cauchy-Folge konvergiert.

Beispiele

1. $(\mathbb{R}^n, d)$ mit der euklidischen Metrik d ist vollständig.
2. $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y > 0\}$ mit der euklidischen Metrik ist nicht vollständig, denn es gilt z.B.:
   $a_n = (0, \frac{1}{n})$ ist Cauchyfolge in X, aber nicht konvergent in X, denn $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = (0,0) \notin X$. Aber $(X, d_{hyp.})$ ist vollständig!

1.9 Definition (Stetigkeit)

Seien X, Y metrische Räume, $f : X \to Y$ eine Abbildung, $a \in X$ ein Punkt.
Dann gilt:
f ist stetig in a

$$\begin{aligned}
&\iff \quad \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in X : d(a,x) < \delta \Rightarrow d(f(a), f(x)) < \epsilon \\
&\iff \quad \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in U_\delta(a) : f(x) \in U_\epsilon(f(a)) \\
&\iff \quad \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 f(U_\delta(a)) \subset U_\epsilon(f(a)) \\
&\iff \quad \forall \text{ Umgebungen V von f(a) } \exists \text{ Umgebung U von a } : f(U) \subset V \\
&\iff \quad \forall \text{ Folge } (a_n) \in X \text{ mit } a = \lim_{n\to\infty} a_n : (f(a_n)) \text{ konvergiert mit } \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)
\end{aligned}$$

1.10 Definition

Sei $U \in \mathbb{R}^n, f : U \to \mathbb{R}^m, a \in \bar{U}$.
$\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existiert
$\iff \exists b \in \mathbb{R}^m : \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in U : \|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - b\| < \epsilon$
Man schreibt dann $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x\in U}} f(x) = b$,
f ist stetig in den Punkt a fortsetzbar mit $f(a) := b$
f ist stetig in $a \in U \iff f(a) = \lim\limits_{\substack{x\to a \\ x\in U}} f(x)$

1.11 Definition (Stetigkeit)

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung, $a \in U$.
f heißt total differenzierbar in a
$\iff \exists A \in Hom(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) : f(a + x) = f(a) + Ax + o(\|x\|)$
d.h. $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x\neq 0}} \frac{f(x+a)-f(a)-Ax}{\|x\|} = 0$
Es folgt:

- f ist in a partiell differenzierbar und für A gilt:
  $A = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$ (mit $f = (f_1, ..., f_n)$)
- f ist stetig in a

$A = Df(a)$ heißt *Ableitung von f in a.*
Es gilt:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f_1 \\ \vdots \\ \nabla f_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

1.12 Satz

Ist f stetig partiell differenzierbar in einem Punkt a, so ist f auch total differenzierbar in a (Beweis per Mittelwertsatz).

Folgende Folgerungskette ist also gültig:
$f \in C^1$ (stetig partiell differenzierbar) $\Rightarrow$ f ist total differenzierbar $\Rightarrow$ f ist partiell differenzierbar

1.13 Satz (Kettenregel)

Sei $u \in \mathbb{R}^n, V \in \mathbb{R}^m, f : U \to V, g : V \to \mathbb{R}^k, n, m, k \geq 1$
Dann gilt:
Sind f und g total differenzierbar, so auch $g \circ f : U \to \mathbb{R}^k$.
Sind $a \in U, b := f(a) \in V$, so gilt weiter:
$D(g \circ f)(a) = (Dg(b))(Df(a))$

1.14 Satz (lineare & quadratische Approximation)

Sei $f : U \to \mathbb{R}, a \in U$, dann gilt:

$$\begin{aligned} f(a+x) &= f(a) + \nabla f(x)x + o(\|x\|) \\ &= f(a) + \nabla f(x)x + \frac{1}{2}x^t H_f(a)x + o(\|x\|^2) \end{aligned}$$

Dabei ist H_f die Hesse-Matrix von f
$H_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$
Dabei gilt: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_n} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_n x_1}$
(Die Hessematrix ist also symmetrisch)

1.15 Satz (lokale Extrema)

Hat f ein lokales Extremum in a, so gilt $\nabla f(a) = 0$.
Weiter gilt:

1. $H_f(a)$ ist positiv definit $\Rightarrow$ f hat in a ein lokales Minimum.
2. $H_f(a)$ ist negativ definit $\Rightarrow$ f hat in a ein lokales Maximum.
3. $H_f(a)$ ist indefinit $\Rightarrow$ f hat in a kein lokales Extremum.

Ist $H_f(a)$ semidefinit, so ist keine Aussage über Vorliegen von Extrema möglich.

A Appendix: Rechenmethoden

A.1 Separierbare Differentialgleichungen

Eine separierbare DGL genügt der Form $y' = f(x)f(y)$. Der Lösungsansatz besteht darin, die Gleichung $dy/dx = f(x)f(y)$ nach x und y zu „sortieren“ und dann zu integrieren.

A.2 Homogene Differentialgleichungen

Homogene Differentialgleichungen genügen der Form $y' = f(\frac{y}{x})$. Die Lösung erhält man, indem man die Substitution $z := \frac{y}{x}$ verwendet ($\frac{dy}{dx}$ wird dann zu $\frac{dzx}{dx} = z + x \cdot \frac{dz}{dx}$).

A.3 Lineare Differentialgleichungen

Lineare Differentialgleichungen genügen der Form
(*) $y^{(n)} + a_{n-1}y^{n-1} + ... + a_0 y = b(x)$ mit $a_0, ..., a_{n-1} \in \mathbb{K}, b : I \to \mathbb{K}$ Abbildung.
(*) heißt inhomogene lineare DGL n-ter Ordnung.

Der Lösungsraum L_H der zugehörigen homogenen linearen DGL $y^{(n)}+a_{n-1}y^{n-1}+ ... + a_0 y = 0$ ist ein n-dimensionaler Untervektorraum von $Abb(I, \mathbb{K}$.
Der Lösungsraum L_I von (*) ist ein n-dimensionaler affiner Raum mit $L_I = \varphi_0 + L_H$, wobei $\varphi_0 \in L_I$.

Zur Lösung einer linearen DGL ist es also nötig, L_H und φ_0 zu bestimmen.
Für $n \geq 1$ lässt sich (*) in ein System von n DGLs 1. Ordnung umwandeln.
Die Lösung von L_H liefert ein Fundamentalsystem, daraus lässt sich eine spezielle Lösung durch die *Variation der Konstanten* bestimmen.
Sei $Y = (\varphi_1, ..., \varphi_n)$ ein Fundamentalsystem von $y' = Ay$. Dann liefert der Ansatz $\varphi(x) = Y(x)c(x)$ eine spezielle Lösung von $y' = Ay + b(x)$.
Der Ansatz führt auf die Gleichung $b(x) = Y(x)c'(x)$. Meist ist es jedoch einfacher, den Ansatz „von Hand“ durchzuführen.
Das Verfahren der Variation der Konstanten ist allgemeingültig, oft ist aber $c(x)$ nicht ohne weiteres bestimmbar, da das hierfür erforderliche Integral nicht bestimmt werden kann. Falls in (*) alle a_i konstant sind und b ist ein Pseudopolynom, helfen die folgenden Sätze.

A.4 Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Seien in (*) alle a_i konstant. Für die zugehörige homogene DGL gilt dann:
Ein Fundamentalsystem des Lösungsraums der Gleichung besteht aus den Funktionen
$\varphi_{jm}(x) := x^m e^{\lambda_j x}$, mit $1 \leq j \leq r$ und $0 \leq m \leq k_j - 1$.

Sei $\mu \in \mathbb{C}, P(y) \neq 0, P(T) = T^n + a_{n-1}T^{n-1} + ... + a_0$ (charakteristisches Polynom).
Die inhomogene DGL mit $b(x) = e^{\mu x}$ hat dann eine spezielle Lösung der Form $\psi(x) = \frac{1}{P(\mu)} e^{\mu x}$.

Falls μ eine Nullstelle des Polynoms ist und/oder $b(x) = h(x)e^{\mu x}$ mit einem gewöhnlichen Polynom $h(x)$, ist folgender Satz anwendbar:
Sei $b(x)$ von der Form $h(x)e^{\mu x}$ mit einem Polynom h in x mit komplexen Koeffizienten und dem Grad m. Sei μ Nullstelle k-ter Ordnung des charakteristischen Polynoms P.
Dann hat (*) eine Lösung der Form $\varphi(x) = f(x)e^{\mu x}$ mit einem Polynom f vom Grad $m + k$. Durch Ableiten und Einsetzen in (*) lassen sich die Koeffizienten von φ bestimmen.

A.5 Komplexe e-Funktion

Es gilt:
$e^{ix} = \cos x + i \sin x$

$$\begin{array}{ll} \sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) & \cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) \\ \tan x = -i\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{e^{ix}+e^{-ix}} & \sinh x = \frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x}) \\ \cosh x = \frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x}) & \tanh x = \frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}} \end{array}$$

A.6 Extrema unter Nebenbedingung

Sei f eine stetig differenzierbare Funktion und n eine Nebenbedingungsfunktion, d.h. eine Funktion zur Nebenbedingung $n(x) = 0$. Dann gilt:
Liegt in a ein Extremum unter der Nebenbediungun $n(a) = 0$ vor, so gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass gilt: $\nabla f(a) = \lambda \nabla n(a)$. λ nennt man einen *Lagrangeschen Multiplikator*.

Eine hinreichende Bedingung zum Vorliegen von Extrema unter Nebenbedingung ist die Determinante der *geränderten Hessematrix*. Diese Matrix hat die folgende Form:
$M(x, f, n, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 & \nabla f(x) \\ (\nabla f(x))^t & H_f(x) - \lambda H_n(x) \end{pmatrix}$
Ist $M(a, f, n, \lambda) > 0$, so hat f in a unter der Nebenbedingung n mit dem Lagrangeschen Multiplikator λ ein lokales Maximum.
Ist $M(a, f, n, \lambda) < 0$, so liegt ein Minimum vor.

Für Beispiele ist zu beachten, dass die von der Nebenbedingung beschriebene Menge meist kompakt ist und Maxima und Minima folglich angenommen werden. Gibt es also genau zwei Werte mit $\nabla f(a) = \lambda \nabla n(a)$, so müssen dies ein Minimum und ein Maximum sein, die geränderte Hesse-Matrix muss nicht mehr betrachtet werden.

A.7 Auch noch ganz wichtig

alpha	α	iota	ι	sigma	$\sigma, \varsigma, \Sigma$
beta	β	kappa	κ	tau	τ
gamma	γ, Γ	lambda	λ, Λ	ypsilon	υ, Υ
delta	δ, Δ	mü	μ	phi	ϕ, φ, Φ
epsilon	ϵ, ε	nü	ν	chi	χ
zeta	ζ	xi	ξ, Ξ	psi	ψ, Ψ
eta	η	pi	π, ϖ, Π	omega	ω, Ω
theta	$\theta, \vartheta, \Theta$	rho	ρ, ϱ		